Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. Februar 1923.

Der Invariantentheorie wichtiger geometrisch definierter Gruppen ist in den letzten Jahren besondere Beachtung zuteil geworden. So entstand die Affingeometrie, so sind zur Inversionsgeometrie, der Geometrie der Gruppe der Bewegung, Ähnlichkeit und Transformation durch reziproke Radien wichtige Beiträge geleistet worden.[1])

Die folgende Darlegung befaßt sich mit den Inversionsinvarianten der Kurven. Zunächst wird die Integralinvariante („Inversionslänge" oder „Inversionsparameter") berechnet, die der Bogenlänge in der euklidischen Geometrie entspricht, und zwar für Räume beliebiger Dimension. In der Ebene und im R_3 ist sie leicht geometrisch zu deuten. Daran schließt die Bestimmung der Nullkurven (§ 1).

In § 2 werden die Extremalen besprochen, die aus der Forderung gewonnen werden, daß die erste Variation der „Inversionslänge" zu Null werden soll. Das Ergebnis ist besonders in der Ebene sehr einfach.

Daran schließt die Berechnung der niedrigsten Differentialinvariante, der „Inversionskrümmung" für ebene Kurven und Kurven des R_3. In der Ebene ergibt sich, daß die in § 2 bestimmten Extremalen alle konstante Inversionskrümmung besitzen, nur für eine bestimmte Auswahl von ihnen ist sie gleich Null. Die entsprechende Untersuchung im Raum führte u. a. zur

---

[1]) Vgl. z. B. A. Voss, Zur Theorie der reziproken Radien. Münchener Berichte 1920, S. 229—259.

Aufstellung der Bedingung dafür, daß eine Schar von ∞^1 Kugeln aus den Schmiegungskugeln einer Raumkurve besteht (§ 3).

Was die Methode betrifft, so ist zu bemerken, daß man in einfachen Fällen die Invarianten fast unmittelbar geometrisch aus der Theorie der reziproken Radien bestimmen kann. Gelegentlich ist weiter auszuholen und die Lie'sche Theorie heranzuziehen.

§ 1. Der Inversionsparameter.

1. Ebene Kurven. Bei der Inversion

$$x_1 = \frac{k^2 x}{r^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{r^2} \qquad (x^2 + y^2 = r^2)$$

entspricht bekanntlich dem Bogenelement ds das Bogenelement

$$ds_1 = \frac{k^2}{r^2} ds. \tag{1}$$

Bildet man ferner den Kreis

$$K(\xi, \eta, \varrho) \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

ab, so wird ihm der Kreis $K_1(\xi_1, \eta_1, \varrho_1)$ zugeordnet, dabei ist

$$\begin{aligned} \xi_1 : \eta_1 : \varrho_1 : 1 &= k^2 \xi : k^2 \eta : k^2 \varrho : N, \\ N &= \xi^2 + \eta^2 - \varrho^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachtet man insbesondere eine Schar von Krümmungskreisen, so daß

$$\xi = x + \varrho \cos\varphi, \quad \eta = y + \varrho \sin\varphi \tag{3}$$

die Koordinaten der Punkte der Evolute sind und die bekannte Beziehung besteht

$$d\xi = d\varrho \cos\varphi, \quad d\eta = d\varrho \sin\varphi,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} d\varrho_1 &= k^2 \left(\frac{d\varrho}{N} - \frac{2\varrho}{N^2} (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta - \varrho\, d\varrho) \right) \\ &= k^2 \frac{d\varrho}{N^2} \{(\xi - \varrho\cos\varphi)^2 + (\eta - \varrho\sin\varphi)^2\} = \frac{k^2 d\varrho}{N^2} r^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen (1) und (2)

$$\frac{ds_1\, d\varrho_1}{\varrho_1^2} = \frac{ds\, d\varrho}{\varrho^2}.$$

Da diese Größe bei Bewegung und Ähnlichkeit ebenfalls invariant ist, so ist

$$(4)\qquad \int \frac{\sqrt{ds\,d\varrho}}{\varrho} = \int \left(\frac{d\varphi\,d\varrho}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} = \int \left(\frac{d\varrho}{\varrho\,d\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi = t,$$

worin $d\varphi$ den Winkel zweier Nachbarnormalen darstellt, eine Integralinvariante bei der Gruppe der Kreisverwandtschaften, die wir als „Inversionsparameter" bezeichnen können, entsprechend dem „Affinparameter".

Man kann dafür auch schreiben

$$(5)\qquad \int (x'\,y''' - y'\,x''')^{\frac{1}{2}}\,ds,$$

wobei die Akzente die Differentiation nach der Bogenlänge bedeuten.

2. Raumkurven. Für die Integralinvariante von Raumkurven liegt im Hinblick auf (5) der Ansatz nahe

$$(6)\qquad \int (\Sigma\,(x'\,y''' - y'\,x''')^2)^{\frac{1}{4}}\,ds.$$

Den Nachweis, daß (6) eine Invariante bei Bewegung und Ähnlichkeit ist, können wir der Einfachheit halber unterlassen, wollen in dieser Hinsicht nur betonen, daß das Integral hinsichtlich der Bogenlänge die Dimension Null besitzt. Es mag genügen, das Verhalten bei einer einzelnen Inversion zu untersuchen.

Wegen der Identitäten

$$\Sigma\,(x'\,y''' - y'\,x''')^2 = \Sigma\,(x')^2 \cdot \Sigma\,(x''')^2 - (\Sigma\,x'\,x''')^2,$$
$$\Sigma\,(x')^2 = 1, \quad \Sigma\,x'\,x'' = 0, \quad \Sigma\,x'\,x''' + \Sigma\,(x'')^2 = 0$$

ist $\qquad \Sigma\,(x'\,y''' - y'\,x''')^2 = \Sigma\,(x''')^2 - (\Sigma\,(x'')^2)^2.$

Die Inversion sei gegeben durch

$$x_1 = \frac{k^2\,x}{r^2}, \quad y_1 = \frac{k^2\,y}{r^2}, \quad z_1 = \frac{k^2\,z}{r^2}.$$

Zu berechnen ist

$$\Sigma\left(\frac{d^3\,x_1}{d\,s_1^3}\right)^2 - \left(\Sigma\left(\frac{d^2\,x_1}{d\,s_1^2}\right)^2\right)^2,$$

wobei noch zu berücksichtigen ist (1)

$$\frac{ds_1}{ds} = k^2 r^{-2} \text{ oder } \frac{ds}{ds_1} = r^2 k^{-2},$$

$$\frac{d^2 s}{ds_1^2} = 2 r^3 r' k^{-4},$$

$$\frac{d^3 s}{ds_1^3} = 2 r^4 (3 (r')^2 + r r'') k^{-6}.$$

Man findet dann

$$\Sigma \left(\frac{d^2 x_1}{d s_1^2}\right)^2 = k^{-4} r^4 (\Sigma (x'')^2 + 4 r'' r^{-1}),$$

$$\Sigma \left(\frac{d^3 x_1}{d s_1^2}\right)^2 = k^{-8} r^8 (\Sigma (x''')^2 + 16 r^{-2} (r'')^2 + 8 r^{-1} r'' \Sigma (x'')^2)$$

und hieraus leicht

$$\left\{\Sigma \left(\frac{d^3 x_1}{d s_1^3}\right)^2 - \left(\Sigma \left(\frac{d^2 x_1}{d s_1^2}\right)^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}} d s_1 = \{\Sigma (x''')^2 - (\Sigma (x'')^2)^2\}^{\frac{1}{4}} d s. \tag{7}$$

Hierdurch ist bestätigt, daß (6) in der Tat Integralinvariante ist.

Der Bau dieser Invariante und der Gang der Rechnung zeigt, daß das entsprechende Integral im R_n ebenfalls invariant bleibt bei der konformen Gruppe.

Interessanter als diese naheliegende Verallgemeinerung ist die geometrische Deutung, die mit Hilfe der Serret-Frenetschen Formeln unter Einbeziehung vom Krümmungsradius r (nicht zu verwechseln mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) und Radius R der Schmiegungskugel sich ergibt. Man findet

$$(\Sigma (x' y''' - y' x''')^2)^{\frac{1}{4}} d s = \frac{\sqrt{d s\, d r}}{r} \frac{R^{\frac{1}{2}}}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}}. \tag{8}$$

Man erhält noch engere Anpassung an (4), wenn man den Abstand $\bar{\varrho}$ des Kurvenpunktes P vom Schnittpunkt der Krümmungsachse mit der Tangentialebene der Schmiegungskugel in P einführt. $\bar{\varrho}$ geht für $R = \infty$ in den Krümmungsradius ϱ der ebenen Kurven über, und es zeigt sich, daß die Invariante (8) der Raumkurven den Wert hat

$$\frac{\sqrt{d s\, d r}}{r} \cdot \left(\frac{\bar{\varrho}}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8'}$$

Man könnte (8') direkt durch geometrische Betrachtungen gewinnen, doch ist die oben gegebene rechnerische Aufstellung der Invariante (6) schließlich einfacher.

3. Die Nullkurven (Inversionsminimalkurven). Die Kurven, längs deren das Integral (5), zwischen zwei beliebigen Punkten erstreckt, den Wert Null hat, sind nach (4) leicht zu bestimmen.

Man erhält einmal die durch

$$ds = 0$$

bestimmten Minimalgeraden, und dazu noch

$$d\varrho = 0,$$

also die Kreise. (In der Affingeometrie sind die Parabeln Nullkurven.) Dies zusammen sind die einzigen in reellen Ebenen gelegenen Nullkurven.

Im R_3 erhält man aus (6) folgende Nullkurven:

Zunächst die Minimalkurven der euklidischen Geometrie. Dazu kommen als einzige reelle Nullkurven die durch

$$\begin{aligned} x' y''' - y' x''' &= 0, \\ y' z''' - z' y''' &= 0, \\ z' x''' - x' z''' &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten, das sind die Kreise.

Die durch

$$(x' y''' - y' x''')^2 + (y' z''' - z' y''')^2 + (z' x''' - x' z''')^2 = 0$$

gegebenen imaginären Kurven lassen sich, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, durch Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung bestimmen. Die ebenen Kurven unter ihnen kann man ohne Integration angeben.

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} z &= ux + vy, \\ z' &= ux' + vy', \\ z'' &= ux'' + vy'', \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} y' z'' - z' y'' &= u(y' x'' - x' y''), \\ z' x'' - x' z'' &= v(y' x'' - x' y''), \end{aligned}$$

es ist also zu fordern

$$(x' y''' - y' x''')^2 (1 + u^2 + v^2) = 0,$$

was einerseits in jeder beliebigen Ebene die Kurve liefert, oder auf der andern Seite die Forderung, daß die Ebene den imaginären Kugelkreis berührt. Die in diesen Ebenen gelegenen Kurven also, die bekanntlich in der metrischen (euklidischen) Differentialgeometrie zu langen Erörterungen geführt haben, treten in der Inversionsgeometrie als Nullkurven auf.

§ 2. Die Extremalen.

1. Die Extremalen in der Ebene und auf der Kugel. Die Kurven extremer Inversionslänge, also nach (4) die Lösungen des Variationsproblems

$$\delta \int \sqrt{\frac{d\varphi\, d\varrho}{\varrho}} = \delta \int \left(\frac{1}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} d\varrho = 0 \tag{9}$$

sind in der Ebene leicht zu bestimmen, wenn man sich der Koordinaten (ξ, η) der Evolutenpunkte bedient und als unabhängige Veränderliche den Krümmungsradius ϱ beibehält. Die Differentiationen seien durch Fußmarken angedeutet.

Es ist dann die Nebenbedingung zu berücksichtigen

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1 = 0, \tag{10}$$

und es wird

$$\xi_2 = -\sin\varphi \cdot \varphi_1, \quad \eta_2 = \cos\varphi \cdot \varphi_1,$$

also

$$\varphi_1 = \frac{\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_1^2 + \eta_1^2} - \frac{2\xi_1 (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2} = -\cos\varphi \cdot \varphi_1,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} = -\sin\varphi \cdot \varphi_1,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = -\frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_2} = \cos\varphi.$$

Das Variationsproblem (9) mit Nebenbedingung (10) setzen wir dann in der Form an

$$\delta \int U d\varrho = 0,$$

dabei ist

$$U = 2\varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1).$$

Mit Verwendung der Bezeichnungen

$$A = \lambda - \varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{\frac{1}{2}}, \quad B = \varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{-\frac{1}{2}}$$

ist dann

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = A \cos\varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta_1} = A \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_2} = -B \sin\varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_2} = B \cos\varphi,$$

und die Euler'schen Gleichungen werden

$$\frac{d}{d\varrho}(A\cos\varphi) + \frac{d^2}{d\varrho^2}(B\sin\varphi) = 0,$$

$$\frac{d}{d\varrho}(A\sin\varphi) - \frac{d^2}{d\varrho^2}(B\cos\varphi) = 0.$$

Hieraus folgt

$$A_1 + 2B_1\varphi_1 + B\varphi_2 = 0,$$

$$A\varphi_1 - B_2 + B\varphi_1^2 = 0.$$

Setzt man probeweise an

$$\varphi = \varkappa \log\varrho,$$

also die natürliche (innere) Gleichung der logarithmischen Spiralen, so kommt

$$\varphi_1 = \varkappa\varrho^{-1}, \qquad \varphi_2 = -\varkappa\varrho^{-2},$$

$$A = \lambda - \varkappa^{\frac{1}{2}}\varrho^{-1}, \quad B = \varkappa^{-\frac{1}{2}},$$

$$A_1 = \lambda_1 + \varkappa^{\frac{1}{2}}\varrho^{-2}, \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Dies in die obigen Gleichungen eingesetzt, gibt

$$A_1 + B\varphi_2 + 2B_1\varphi_1 = \lambda_1 + \varkappa^{\frac{1}{2}}\varrho^{-2} - \varkappa^{-\frac{1}{2}}\varkappa\varrho^{-2} = 0,$$

$$\varphi_1(A + B\varphi_1) - B_2 = \varphi_1(\lambda - \varkappa^{\frac{1}{2}}\varrho^{-1} + \varkappa^{-\frac{1}{2}}\varkappa\varrho^{-1}) = 0,$$

also können die Gleichungen erfüllt werden, indem man setzt:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.$$

Alle logarithmischen Spiralen, daher auch die durch Inversion aus ihnen ableitbaren Kurven, die Isogonalen eines linearen Kreisbüschels (und seines Orthogonalbüschels), die man auch Loxodromen nennt, sind also Extremalen.

Im ganzen sind das ∞^6 Kurven, der Tatsache entsprechend, daß das Variationsproblem, wenn man wie üblich sich die Aufgabe stellte, y als Funktion von x (nicht ξ und η als Funktionen von ϱ) zu bestimmen, auf eine Differentialgleichung der sechsten Ordnung führen müßte.

Es bleibt dann noch die Aufgabe bestehen, zwei beliebige Krümmungselemente der Ebene wirklich durch eine Loxodrome zu verbinden, die diese Elemente enthält. Sodann wäre die Frage zu beantworten: Ist das Extrem ein Minimum oder ein Maximum? Geometrische Überlegungen führen auf den zweiten Fall — genau so, wie in der Affingeometrie die Extremalen (Parabeln) das Maximum der Affinlänge zwischen zwei Linienelementen liefern.

Endlich überträgt sich das Ergebnis durch Inversion sofort auf die Kugel. Die Extremalen sind auch auf der Kugel Isogonaltrajektorien eines linearen Kreisbüschels, also, wenn man das Büschel der Meridiane nimmt, eigentliche Loxodromen.

2. Das Extremalenproblem im Raum. Im R_3 erhielte man bei schematischer Behandlung des Variationsproblems

$$\delta \int (\Sigma (x' y''' - y' x''')^2)^{\frac{1}{4}} \, ds = 0 \tag{11}$$

zur Bestimmung von y und z zwei Differentialgleichungen sechster Ordnung, womit übrigens auf Grund der Erfahrungen in der Affingeometrie noch nicht gesagt ist, daß es ∞^{12} Extremalen gibt.

Wir geben hier ein Verfahren an, das auf ∞^{10} Extremalen führt und gehen von dem Ansatz aus

$$\begin{aligned} x &= u e^{K\varphi} \cos \varphi, \\ y &= u e^{K\varphi} \sin \varphi, \\ z &= v u e^{K\varphi}, \end{aligned} \tag{12}$$

u und v sollen die abhängigen Veränderlichen sein, φ die Unabhängige. Das zu variierende Integral erhält dadurch die Form

$$\int F(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \, d\varphi.$$

Wenn dabei zufällig F von u frei ist, so lassen sich sofort Lösungen der Euler'schen Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right) + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right) - \frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial v_1}\right) + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v_2}\right) - \frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{\partial F}{\partial v_3}\right) = 0$$

angeben. Man braucht nur u einer beliebigen Konstanten gleich zu setzen und v gleich dem Wert v_0, der sich ergibt durch Auflösung von

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Dieser Kunstgriff erfordert nun, und darin liegt seine Bedeutung, nicht die vollständige Berechnung von F — in der Tat, man darf wohl billigerweise verlangen, daß man eine Auswahl von Extremalen auch feststellen kann, ohne die kompendiöse Differentialgleichung hinzuschreiben.

Man braucht ja F nur zu berechnen unter der Voraussetzung, daß die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von u und v nach φ Null sind. Wenn die „gekürzte Funktion" dann von u frei ist, ist das Verfahren anwendbar.

Die Rechnung gibt bis auf einen konstanten Faktor

$$\int (\Sigma(x'y''' - y'x''')^2)^{\frac{1}{4}} ds = \int (1 + v^2)^{\frac{1}{4}} (K^2 + 1 + v^2 K^2)^{-\frac{1}{2}} d\varphi,$$

also ist das Verfahren anwendbar, und zwar ist v_0 zu bestimmen aus

$$\frac{\partial F}{\partial (v^2)} = \tfrac{1}{4}(1 + v^2)^{-\frac{3}{4}} (K^2 + 1 + v^2 K^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- \tfrac{1}{2}(1 + v^2)^{\frac{1}{4}} K^2 (K^2 + 1 + v^2 K^2)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Man hat also nur die Gleichung

$$K^2 + 1 + v^2 K^2 - 2(1 + v^2) K^2 = 0$$

aufzulösen und erhält

$$v_0 = \frac{\sqrt{1 - K^2}}{K},$$

also die ∞^1 Extremalen

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
x &= c e^{K\varphi} \cos\varphi, \\
y &= c e^{K\varphi} \sin\varphi, \\
z &= c \frac{\sqrt{1-K^2}}{K} e^{K\varphi},
\end{aligned}
$$

das sind konische Spiralen.

Berechnet man den Winkel, unter dem diese konischen Spiralen die Erzeugenden schneiden, so findet man

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma x x'}{(\Sigma x^2 \cdot \Sigma x'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also: Die auf Rotationskegeln gelegenen konischen Spiralen, die die Mantellinien unter dem Winkel $\pi/4$ schneiden, sind Extremalen.

Man erhält durch Anwendung der konformen Gruppe dann ∞^{10} Extremalen, nämlich auf jeder Dupinschen Cyklide die beiden Scharen von $\pi/4$-Trajektorien der Krümmungslinien.

Übrigens sind auf der Dupinschen Cyklide alle Isogonaltrajektorien Lösungen des gebundenen Variationsproblems, von dem man also ∞^2 der ∞^6 Lösungen angeben kann. Diese Cykliden sind ein Gegenstück zu den Regelflächen, von deren ∞^2 geodätischen Linien (Lösungen des gebundenen Variationsproblems) ∞^1 gerade Linien (Lösungen des freien Variationsproblems) sind.

§ 3. Die Inversionskrümmung.

1. Ebene Kurven. Um für ebene Kurven die niedrigste Differentialinvariante zu bestimmen, gehen wir davon aus, daß im Raum der Kreise $K(\xi, \eta, \varrho)$ die Gruppe sich darstellt als sechsgliedrige Untergruppe der zehngliedrigen, vermöge deren

$$d\xi^2 + d\eta^2 - d\varrho^2$$

bis auf einen Faktor invariant bleibt; diese sechsgliedrige (nichteuklidische) Gruppe ist durch die Forderung, daß

$$(14) \qquad \frac{d\xi^2 + d\eta^2 - d\varrho^2}{\varrho^2}$$

eine Invariante ist, definiert.

Schreiben wir x, y, z für ξ, η, ϱ, so sind die infinitesimalen Transformationen

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},\\
&U(f) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},\\
&x\,U(f) - \frac{x^2+y^2-z^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x},\\
&y\,U(f) - \frac{x^2+y^2-z^2}{2}\frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Es ist indessen zu beachten, daß mit Rücksicht auf (10) für Krümmungskreise der Ausdruck (14) zu Null wird.

Um das gleich im Ansatz zu berücksichtigen, setzen wir

$$\frac{dx}{dz} = x_1 = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{dz} = y_1 = \sin\varphi$$

und haben dann z. B. bei der fünften erzeugenden Transformation

$$Z = xz, \quad X = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2}, \quad Y = xy,$$

und hieraus zunächst

$$X_1 = \frac{dX}{dz} - x_1\frac{dZ}{dz} = z(1 - x_1^2) - y y_1,$$

$$Y_1 = \frac{dY}{dz} - y_1\frac{dZ}{dz} = x_1(y - y_1 z).$$

Ferner ist $$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1},$$

daher $$\Phi = \frac{x_1 Y_1 - y_1 X_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{y - z y_1}{x_1^2 + y_1^2} = y - z\sin\varphi,$$

und hieraus weiter

$$\Phi_1 = \frac{d}{dz}(y - z\sin\varphi) - \varphi_1(x + z\cos\varphi) = -2z\cos\varphi\,\varphi_1 - x\varphi_1,$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 &= \frac{d\Phi_1}{dz} - \varphi_2(x + z\cos\varphi)\\
&= -3\cos\varphi(\varphi_1 + z\varphi_2) + 2z\sin\varphi\cdot\varphi_1^2 - 2x\varphi_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_3 &= \frac{d\Phi_2}{dz} - \varphi_3(x + z\cos\varphi)\\
&= \sin\varphi(5\varphi_1^2 + 7z\varphi_1\varphi_2) + \cos\varphi(-8\varphi_2 + 2z\varphi_1^3 - 4z\varphi_3) - 3x\varphi_3.
\end{aligned}
$$

Die drei ersten erzeugenden Transformationen, die zusammen die Gruppe der Bewegungen der Ebene ergeben, zeigen, daß die durch

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \Phi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \Phi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + \Phi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} = 0$$

definierte Differentialinvariante von x, y und φ frei sein muß; die dritte (Ähnlichkeit) gibt dann noch die Forderung

$$z \frac{\partial f}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - 2 \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - 3 \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} = 0,$$

also muß f eine Funktion von $z \varphi_1$, $z^2 \varphi_2$, $z^3 \varphi_3$ sein.[1])

Das ist von vorneherein klar, eine Invariante der viergliedrigen ebenen Gruppe Bewegung + Ähnlichkeit kann nur von

$$\varrho \frac{d\varphi}{d\varrho}, \quad \varrho^2 \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2}, \quad \varrho^3 \frac{d^3\varphi}{d\varrho^3}$$

abhängen. Die oben angegebenen Werte von Z, X, ... Φ_3 für die fünfte erzeugende Transformation ergeben dann die weitere Forderung

$$\begin{aligned} & x\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - 2\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - 3\varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right) \\ & + \cos\varphi \left\{-2z\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - 3(\varphi_1 + z\varphi_2) \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + (-8\varphi_2 + 2z\varphi_1^3 - 4z\varphi_3) \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right\} \\ (16) \qquad & + \sin\varphi \left\{2z\varphi_1^2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + (5\varphi_1^2 + 7z\varphi_1\varphi_2) \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Dabei sind $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ bereits ausgelassen, da ja f sicher von x und y frei ist.

Die sechste erzeugende Transformation gibt eine genau so gebaute Gleichung, nur an Stelle von

$$\begin{array}{ll} x, \cos\varphi, & \sin\varphi, \\ y, \sin\varphi, & -\cos\varphi. \end{array}$$

Man braucht also, da die erste Zeile für $f(z\varphi, z^2\varphi_2, z^3\varphi_3)$ Null ist, nur noch die zweite und dritte gleich Null zu setzen und erhält dann

---

[1]) Die Inkremente Z, X, ... Φ_3 für die trivialen Transformationen (15), 1—4 brauchen nicht ausgerechnet zu werden.

$$J = 4\,t - 7\,w^2; \tag{17}$$

dabei ist gesetzt

$$\begin{aligned}
w &= u_1^{-\frac{3}{2}}(u_2 u_1^{-1} + 3),\\
t &= (u_3 + 8\,u_2)\,u_1^{-2} + u_1 + 12\,u_1^{-1},\\
u_1 &\left(= z\,\frac{d\varphi}{dz}\right) = \varrho\,\frac{d\varphi}{d\varrho},\\
u_2 &\left(= z^2\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = \varrho^2\,\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2},\\
u_3 &\left(= z^3\,\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right) = \varrho^3\,\frac{d^3\varphi}{d\varrho^3}.
\end{aligned} \tag{17'}$$

Diese Invariante (17), die in x, y, y' . . . geschrieben von der fünften Ordnung ist, wollen wir als „Inversionskrümmung“ einführen.

Die Kurven konstanter Inversionskrümmung lassen sich dann leicht angeben.

Setzt man $\varrho = a\,e^{K\varphi}$,

so wird $u_1 = K^{-1}, \quad u_2 = -K^{-1}, \quad u_3 = 2\,K^{-1},$

$$r = 2\,K^{\frac{3}{2}}, \qquad t = 6\,K^{-1},$$

$$J_2 = 4\,(K^{-1} + 6\,K - 7\,K^3).$$

Hieraus folgt: Die logarithmischen Spiralen und die aus ihnen durch die Gruppe der Kreisverwandtschaften abzuleitenden Isogonaltrajektorien linearer Kreisbüschel sind die Kurven konstanter Inversionskrümmung. In diesen Kurven haben wir oben (§ 2, 1) die Extremalen erkannt.

J wird zu Null für

$$K^2 = 1, \qquad K^2 = -\frac{1}{7}.$$

Also kommt den reellen $\pi/4$-Trajektorien und gewissen andern imaginären Trajektorien die Krümmung Null zu.

2. Die Raumkurven. Einfacher als bei ebenen Kurven wird bei Raumkurven die Bestimmung der Inversionskrümmung. Wir kennen schon eine invariante Differentialform

$$dt = \frac{\sqrt{ds\,dr}}{r}\,\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}}. \tag{8}$$

Außerdem aber läßt sich eine zweite sofort angeben, wenn man beachtet, daß die zehngliedrige konforme Gruppe des Raumes zugleich die zehngliedrige Gruppe der Kugeln

$$K(X, Y, Z, R) = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - R^2$$

ist, und daß dabei die quadratische Differentialform

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dR^2}{R^2}$$

invariant ist, oder auch

$$dt = \frac{dR}{R}(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Fußmarken bedeuten die Differentiation nach R.

Insbesondere gilt für eine Schar von Schmiegungskugeln

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1 = \left(\frac{r}{r'\varrho}\right)^2,$$

wobei r der Krümmungsradius, ϱ der Torsionsradius ist und der Akzent die Differentiation nach der Bogenlänge (s) der Kurve bedeutet.

Berücksichtigt man schließlich noch die bekannte Formel

$$\varrho^2 = (R^2 - r^2)\left(\frac{dr}{ds}\right)^{-2},$$

so erhält man die Invariante

$$J_3 = \frac{dt}{dt} = \frac{r^2}{\varrho^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}} \frac{dR}{dr}, \tag{18}$$

die man als „Inversionskrümmung der Raumkurven" bezeichnen kann.

3. Inversionskrümmung von Kanalflächen. Es liegt nahe, die Berechnung der Inversionskrümmung an eine andere Betrachtung anzuschließen. Die zehngliedrige Gruppe des Elementes

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dR^2}{R^2}$$

gibt nämlich als niedrigste Invariante[1])

---

[1]) Mit dieser Invariante beschäftigt sich eine bei der Heidelberger Akademie eingereichte Arbeit über die Liesche Cyklide.

(19) $$J = U^{-3}(V - U)^2 + W U^{-2},$$

wobei gesetzt ist

$$U = 1 - \Sigma \left(\frac{d X}{d R}\right)^2,$$

(19′) $$V = R \Sigma \frac{d X}{d R} \frac{d^2 X}{d R^2},$$

$$W = R^2 \Sigma \left(\frac{d^2 X}{d R^2}\right)^2,$$

und es liegt nahe, diese Invariante für eine Schar von Schmiegungskugeln zu berechnen.

Man erhält

$$U = - \frac{r^2}{(r')^2 \varrho^2},$$

$$V = \frac{R^2}{r \varrho} \frac{d}{d R} \left(\frac{R}{r' \varrho}\right),$$

$$W = R^2 \left\{\left[\frac{d}{d R}\left(\frac{R}{r' \varrho}\right)\right]^2 + \frac{R^2}{(r')^2 \varrho^4 (R')^2}\right\};$$

dabei ist

$$\frac{d}{d R}\left(\frac{R}{r' \varrho}\right) = - \frac{r^2}{\varrho^3 (r')^2} + \frac{r R}{(r')^2 \varrho^3 R'}.$$

Setzt man in (19) ein, so kommt

(20) $$J = +1.$$

Der Satz läßt sich umkehren:

Für eine Kugelschar

$$K(a, b, c, R) \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0,$$
$$a = a(R), \quad b = b(R), \quad c = c(R)$$

ist die durch

$$J = U^{-3}(U - V)^2 + W U^{-2},$$

$$U = 1 - \Sigma \left(\frac{d a}{d R}\right)^2,$$

$$V = R \Sigma \frac{d a}{d R} \frac{d^2 a}{d R^2},$$

$$W = R^2 \Sigma \left(\frac{d^2 a}{d R^2}\right)^2.$$

definierte Invariante dann und nur dann gleich $+1$, wenn die Kugeln Schmiegungskugeln einer Raumkurve sind.

Diese Beziehung ist das Gegenstück zur Beziehung (10)

$$\left(\frac{d\xi}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varrho}\right)^2 - 1 = 0$$

für die Krümmungskreise $K(\xi, \eta, \varrho)$ einer ebenen Kurve.

Man kann die Invariante auch so schreiben:

$$J = \frac{R^2\{(\Sigma a_1 a_2)^2 - \Sigma a_1^2 \cdot \Sigma a_2^2) + R_2^2 \Sigma a_1^2 - 2 R_1 R_2 \Sigma a_1 a_2 + R_1^2 \Sigma a_2^2\}}{(R_1^2 - \Sigma a_1^2)^3}$$

$$(21) \qquad - \frac{2R(R_1 \Sigma a_1 a_2 - R_2 \Sigma a_1^2)}{(R_1^2 - \Sigma a_1^2)^3}.$$

Dabei deuten die Fußmarken 1 und 2 auf die erste und zweite Differentiation nach einem Parameter hin, von dem a, b, c und R abhängen.

Ist z. B. der Radius R konstant, so wird

$$J = + \frac{R^2(\Sigma a_1^2 \cdot \Sigma a_2^2 - (\Sigma a_1 a_2)^2)}{(\Sigma a_1^2)^2} = \frac{R^2}{\bar{r}^2},$$

wobei $\bar{r}$ der Krümmungsradius des Mittelpunktsorts der Kugeln ist.

Insbesondere erhält man, wenn J gleich $+1$ ist, die Folgerung: Wenn alle Schmiegungskugeln einer Raumkurve denselben Radius besitzen, $R = k$, dann hat der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln konstante Krümmung

$$(\bar{r})^{-1} = k^{-1}.$$

Aus (20) und (21) lassen sich weitere geometrische Sätze ableiten.