Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1937. Heft II

Mai-Dezember-Sitzung

München 1937

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Konvexität von Raumstücken.

Von Georg Nöbeling in Erlangen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Mai 1937.

Herr H. Tietze hat bewiesen, daß die abgeschlossene Hülle H einer beschränkten, zusammenhängenden, offenen Teilmenge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes dann (und nur dann) konvex ist, wenn in jedem Punkte der Begrenzung von H eine Stützhalbkugel an H existiert.[1] Herr H. Gericke hat diesen Satz dahingehend verschärft, daß man auf die Konvexität schon dann schließen kann, wenn die Existenz einer Stützhalbkugel in allen Begrenzungspunkten von H vorausgesetzt wird mit Ausnahme einer in einer höchstens $(n—3)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit enthaltenen Teilmenge der Begrenzung von H.[2,3] In den folgenden Zeilen wird ein noch schärferes Resultat gewonnen werden, in dem einerseits an Stelle der Stützhalbkugeln viel allgemeinere Stützgebilde treten, anderseits die Menge der Begrenzungspunkte, in welchen die Existenz solcher Stützgebilde nicht vorausgesetzt wird, noch allgemeiner sein darf als bei Herrn Gericke.[4]

Definitionen. Eine abgeschlossene Menge S des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R_n nennen wir ein *Stützgebilde bezüglich des Punktes P* von S, wenn $R_n—S$ in mindestens zwei Komponenten zerfällt, von denen mindestens eine, sie heiße R', durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet ist: jede Gerade durch

[1] H. Tietze, Crelles Journal 158 (1927), 168 ff. und 160 (1929), 67 ff. Math. Ann. 99 (1928), 394 ff.

[2] H. Gericke, „Über ein Konvexitätskriterium“, erscheint in der Math. Zeitschrift.

[3] Eine andere Verallgemeinerung des Satzes von Herrn Tietze bei L. Pasqualini, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 204 (1937), 646 ff.

[4] Die Anregung zu diesen Zeilen verdankt Verfasser der Lektüre eines unveröffentlichten Manuskripts von Herrn O. Haupt, in welchem er eine in unserem Resultat enthaltene, durch die angeführte Arbeit von Herrn Gericke angeregte Verschärfung des Satzes von Herrn Gericke beweist. Über das Ergebnis von Herrn Haupt vgl. Fußnote 6.

P, die mit R' einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Häufungspunkt P hat, besitzt auch mit mindestens einer zweiten, von R' verschiedenen Komponente von R_n—S einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Häufungspunkt P. — Ein Beispiel für Stützgebilde im R_3 ist die Summe S aller Geraden durch einen Punkt P und die Punkte einer einfachen, geschlossenen, zu P symmetrischen (d. h. bei Spiegelung an P in sich übergehenden) Jordankurve; hierbei ist jede der beiden Komponenten von R_3—S eine ausgezeichnete Komponente R'. Fügt man zu S eine beliebige abgeschlossene, nulldimensionale Menge des R_3 hinzu, so entsteht wieder ein Stützgebilde bezüglich P. Ein Kreiskegel mit der Spitze P ist ein Stützgebilde, bei welchem nur eine der beiden Komponenten von R_3—S, nämlich das „Innere des Kegels", eine ausgezeichnete Komponente R' ist.

Ist M eine offene Menge des R_n, P ein Begrenzungspunkt von M, und S ein Stützgebilde bezüglich P, so sagen wir: S *stützt M im Punkte P* (oder: S sei ein Stützgebilde in P an M), wenn der Durchschnitt einer geeigneten Umgebung von P mit M in einer ausgezeichneten Komponente R' von R_n—S enthalten ist.

Wir nennen eine offene Menge M des R_n ein Raumstück, wenn die Begrenzung von M gleichzeitig die Begrenzung des offenen Kernes von R_n-M ist. Dabei wird zugelassen, daß $M = R_n$ ist.

Eine offene Menge M des R_n heiße ein Sternkörper bezüglich des Punktes Z von M, wenn jede in Z endende Halbgerade mit M einen zusammenhängenden Durchschnitt hat. Eine offene Menge M des R_n heißt konvex, wenn für je zwei Punkte von M die sie verbindende Strecke ganz in M enthalten ist.

Wir behaupten folgenden

Satz I. *Es sei M ein Raumstück des Euklidischen R_n, Z ein Punkt von M, und T die Summe aller in Z endenden Halbgeraden, die Z mit Punkten P der Begrenzung B von M verbinden, in welchen keine Stützgebilde an M existieren. Die Menge $M' = M — MT$ sei in M überall dicht und zusammenhängend. Dann ist M ein Sternkörper bezüglich Z.*

Beweis. Es genügt, zu zeigen, daß für jeden Punkt von M die Verbindungsstrecke mit Z in M enthalten ist. Wir beweisen dies zunächst für die Punkte von M'. Wegen der Offenheit von M ist die Menge M'' aller Punkte von M', deren Verbindungsstrecken mit Z in M enthalten sind, in M' offen. Wir nehmen an, es sei M'' eine echte Teilmenge von M', und leiten einen Widerspruch her. Da M' nach Voraussetzung zusammenhängend, d. h. nicht Summe zweier fremder, in M' offener, nichtleerer Teilmengen ist, enthält M' einen Punkt X, der nicht in M'' enthalten, aber ein Häufungspunkt von M'' ist. Da X nicht in M'' enthalten ist, hat die Verbindungsstrecke (ZX) mit der Begrenzung B von M einen nichtleeren Durchschnitt D, welcher übrigens abgeschlossen ist und weder Z, noch X enthält. Es sei P der X am nächsten liegende Punkt von D. Dann liegt die offene Strecke $\langle PX \rangle$ ganz in M. Anderseits liegt (ZX) ganz in $\overline{M}$ als Limes einer Folge von in M enthaltenen Strecken, nämlich einer Folge von Verbindungsstrecken von Z mit den Punkten einer gegen X konvergierenden Punktfolge aus M''. Wir behaupten nun, daß in P kein Stützgebilde S an M existieren kann. Nehmen wir an, es gäbe ein solches S. Dann liegt der Durchschnitt einer geeigneten Umgebung U von P mit M in einer ausgezeichneten Komponente R' von $R_n - S$. Da die offene Strecke $\langle PX \rangle$ in M, also ihr Durchschnitt mit U in R' enthalten ist, hat die Strecke (ZX) mit R' einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Häufungspunkt P. Also muß (ZX) nach der Definition des Stützgebildes noch mit einer zweiten Komponente von $R_n - S$ einen nichtleeren, sich in P häufenden Durchschnitt haben. Dies aber ist nicht der Fall, denn da $(ZX) \subset \overline{M}$ und $UM \subset R'$ ist, gilt $U \cdot (ZX) \subset \overline{R}'$, d. h. $U \cdot (ZX)$ ist fremd zu allen von R' verschiedenen Komponenten von $R_n - S$. Also kann in P kein Stützgebilde S an M existieren, wie behauptet. Dies bedeutet aber: der Punkt X liegt auf einer in Z endenden Halbgeraden, welche Z mit einem Punkt von B ohne Stützgebilde an M verbindet, d. h. X liegt in MT und damit nicht in M', während er doch als Punkt von M' gewählt war.[5]

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Punkt Y von M, für welchen die Verbindungsstrecke (ZY) mindestens einen Punkt Q

---

[5] Der Grundgedanke dieses Beweises ist eine bekannte, auch von Herrn Tietze l. c. benutzte, auf Herrn E. Schmidt zurückgehende Schlußweise; vgl. L. Bieberbach, „Differentialgeometrie", Leipzig-Berlin, 1932, 20–21.

mit R_n—M gemein hat. Da M ein Raumstück ist, existieren in beliebiger Nähe von Q zu M fremde, n-dimensionale Vollkugeln. Daher existiert (in beliebiger Nähe von Y) eine ganz in M enthaltene Vollkugel L derart, daß für jeden Punkt X von L die Strecke (ZX) einen nichtleeren Durchschnitt mit R_n—M hat. Nun enthält L Punkte der nach Voraussetzung in M überall dichten Menge M', deren Punkte nach dem bereits Bewiesenen mit Z durch ganz in M enthaltene Strecken verbunden sind. Also ergibt unsere Annahme einen Widerspruch. Damit ist der Satz I bewiesen.

Um den soeben bewiesenen Satz I mit der Konvexität zu verknüpfen, beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Das Raumstück M sei ein Sternkörper bezüglich jedes Punktes Z einer Menge $Z^* \subset M$, für welche jeder Punkt der Begrenzung B von M ein Häufungspunkt ist. Dann ist M konvex.*

Beweis. In beliebiger Nähe jedes Punktepaares von M liegt ein Punktepaar, dessen Verbindungsgerade entweder B nicht trifft oder durch einen Punkt von Z^* geht, dessen Verbindungsstrecke also in M liegt. Hieraus folgert man leicht mit Hilfe einer dem zweiten Teil des Beweises von Satz I analogen Überlegung, daß die Verbindungsstrecke je zweier Punkte von M in M enthalten ist.

Aus diesem Hilfssatz und Satz I ergibt sich folgender

Satz II. *Die Voraussetzungen des Satzes I seien erfüllt für alle Punkte Z einer Menge $Z^* \subset M$, für welche jeder Punkt von B ein Häufungspunkt ist. Dann ist M konvex.*

Dieser Satz II ist die eingangs erwähnte Verschärfung der Sätze von Herrn Tietze und Herrn Gericke. Nach ihm ist die Konvexität eines zusammenhängenden Raumstückes M im R_n $(n \geqq 3)$ (und damit die Existenz von Stützhyperebenen in allen Begrenzungspunkten von M) beispielsweise schon gesichert, wenn die Existenz von Stützgebilden in allen Punkten der Begrenzung mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen bekannt ist, oder allgemeiner, wenn die Menge der Begrenzungspunkte von M, in welchen die Existenz eines Stützgebildes nicht bekannt ist, enthalten ist in der Summe von abzählbar vielen, höchstens

(n—3)-dimensionalen, stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeiten; denn dann sind die Voraussetzungen des Satzes I für jeden Punkt Z des Raumes erfüllt.[6]

---

[6] Das in Fußnote 4 erwähnte Ergebnis von Herrn Haupt besagt, daß ein Raumstück M des R_n konvex ist, wenn für jeden Punkt Z einer in M überall dichten Menge Z^* die in Satz I definierte Menge M' in M überall dicht und bogenverknüpft ist (d. h. zu je zwei Punkten einen sie verbindenden Bogen enthält). Hierbei werden allerdings statt unserer allgemeinen Stützgebilde Stützhalbkugeln benutzt. Aus ihm ergeben sich dieselben, von uns oben erwähnten Folgerungen aus Satz II, wenn man darin statt Stützgebilde immer Stützhalbkugel setzt. — Unsere Überlegungen und Beweise haben sich aus denen von Herrn Haupt durch bloße Weglassung entbehrlicher Voraussetzungen ergeben.