Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1937. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Der Transversalensatz für die Kugel und für die hyperbolische Ebene.

Von Heinrich Liebmann in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. April 1937.

Der Transversalensatz, d. h. der Satz, daß die Verbindungsstrecken (AD, BE, CF) der Ecken A, B, C eines euklidischen Dreiecks $\{ABC\}$ mit den Mitten D, E, F der Gegenseiten einander in einem Punkt S schneiden, wird durch Kongruenzsätze und das Postulat von der Winkelsumme ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$) bewiesen, und es scheint zunächst so, als gelte der Satz nur für die euklidische Geometrie.

Doch gilt er auch für die Kugel, was wohl meist durch trigonometrische Rechnungen bewiesen wird, und ebenso für die hyperbolische Ebene, wobei der Beweis durch hyperbolische Maßbestimmung erbracht wird, die aber auch durch rein synthetische Betrachtungen ersetzt werden können (Lit. 1 S. 87). Der Beweis kann aber für die Kugel elementargeometrisch geleistet werden, d. h. allein durch Benützung von Kongruenzsätzen und fast ebenso einfach für die hyperbolische Geometrie, in letzterem Falle allerdings zunächst unter der beschränkenden Voraussetzung, daß $\{ABC\}$ einen umschriebenen Kreis besitzt (§ 1).

Weitergehende Betrachtung erfordert der Beweis, wenn das hyperbolische Dreieck keinen umschriebenen Kreis besitzt (§ 4).

Dabei wird immer die Zentralprojektion des ebenen Dreiecks benützt, einmal vom Mittelpunkt einer geeignet gewählten Kugel des euklidischen Raumes aus, dann vom unendlich fernen Mittelpunkt einer Grenzkugel des nicht-euklidischen Raumes, und der Umstand, daß bei Zentralprojektion gerade Linien in Hauptkreise der Kugel bzw. Grenzkreise auf der Grenzkugel übergehen, auf der bekanntlich die euklidische Geometrie gilt (Lit. 2 S. 12, Lit. 3 S. 50).

In § 2 und § 3 werden die erforderlichen Hilfssätze der hyperbolischen Geometrie besprochen. In § 4 ist eine andere Grenzkugel als in § 1 zu wählen, wie wir sehen werden.

§ 1. Transversalensatz für die Kugel und gewisse Dreiecke der hyperbolischen Ebene.

Die Kugel sei in einen euklidischen Raum eingebettet, $\{A, B, C\}$ das zu untersuchende Dreieck; $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ die Mittelpunkte der Hauptkreisbogen $(\overline{BC})$, $(\overline{CA})$, $(\overline{AB})$ und O liegt auf der Senkrechten der Ebene $\overline{ABC}$, die die Ebene im Mittelpunkt des umschriebenen Kreises trifft. Projiziert man zentral (von O aus) auf die Ebene ABC, so ist selbstverständlich vorausgesetzt $A \equiv \bar{A}$, $B \equiv \bar{B}$, $C \equiv \bar{C}$, während $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ in die Mittelpunkte D, E, F von (BC), (CA), $EF)$ übergehn. Die drei Ebenen $OD\bar{D}A$, $OE\bar{E}B$, $OF\bar{F}C$ haben dann die beiden Punkte O und $S = (AD) \times (BE) \times (CF)$ gemein, also eine Schnittgerade, die die Kugel in $(\overline{AD}) \times (\overline{BE}) \times (\overline{CF})$ trifft, demnach gehen die drei Hauptkreisbogen (Transversalen des sphärischen Dreiecks) durch einen Punkt $\bar{S}$.

Dieser ganz einfache und wahrscheinlich in manchem Lehrbuch der Elementargeometrie enthaltene Beweis des Transversalensatzes für die Kugel wurde vorausgeschickt, weil der jetzt zu erbringende Beweis für den Transversalensatz in der hyperbolischen Geometrie ganz ähnlich verläuft. —

Es sei $\{ABC\}$ ein Dreieck der hyperbolischen Geometrie, das einen umbeschriebenen Kreis mit dem Mittelpunkt M besitzt. Man errichtet dann auf der Ebene des Dreiecks in M die Senkrechte MO_∞. Legt man die Grenzkugel durch ABC und bringt die Verbindungslinien DO_∞, EO_∞, FO_∞ der Mittelpunkte D, E, F der Seiten des hyperbolischen Dreiecks mit der Grenzkugel zum Schnitt $(\bar{D}, \bar{E}, \bar{F})$, dann sind $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ die Mittelpunkte des durch Zentralprojektion auf der Grenzkugel von O_∞ aus entstandenen Grenzbogendreiecks $\{\overline{ABC}\}$. Weil aber hier die euklidische Geometrie gilt, schneiden die Grenzkreisbogen $(A\bar{D})$, $(B\bar{E})$, $(C\bar{F})$ einander in einem Punkt $\bar{S}$, und $O_\infty \bar{S}$ trifft die Ebene in einem Punkt S, in dem sich die Geraden (AD), (BE), (CF) schneiden. Damit ist der Transversalensatz für das ebene Dreieck $\{ABC\}$ bewiesen.

Dieser Beweis gilt aber, wie gesagt, nur für den Fall, daß das ebene Dreieck einen umbeschriebenen Kreis besitzt, auch ist der Vollständigkeit halber hervorzuheben, daß nun nicht mehr wie in der euklidischen Geometrie $(AS) = 2\,(SD)$, $(BS) = 2\,(SE)$, $(CS) = 2\,(SF)$ ist.

Verschiedene Versuche, diesen Gedankengang auf den Fall zu übertragen, daß die Ecken des ebenen Dreiecks $\{ABC\}$ auf einem Grenzkreis oder auf einer Abstandslinie liegen, waren nicht durchführbar.

§ 2. Ein Satz der hyperbolischen Ebene.

Errichtet man in der Ebene des Dreiecks $\{ABC\}$ die Mittelsenkrechte FF_∞ auf (AB) — natürlich nach der Seite hin, auf der C liegt — und auf ihr wieder die Senkrechten g, die (AC) und (BC) treffen (Schnittpunkte Q und P), dann gehen (AP), (BQ), (CF) durch einen Punkt. (Dies wird in § 4 bewiesen.)

§ 3. Mittelliniensatz nach Lobatschefskij.

Die Mittellinie DE des hyperbolischen Dreiecks schneidet die Mittelsenkrechte FF_∞ von (AB) senkrecht. Der Beweis wird durch Symmetriekongruenz geführt, wobei zu beachten ist, daß die Lote (AA_1), (BB_1), (CC_1) auf die Mittellinie dieselbe Länge besitzen (Lit. 2 S. 34). Die Mittellinie DE gehört also zu den oben mit g bezeichneten Geraden, d. h. (AD), (BE), (CF) gehen durch einen Punkt (§ 2). Wenn also der Hilfssatz in § 2 bewiesen ist, ist damit der Transversalensatz des allgemeinen hyperbolischen Dreiecks bewiesen.

§ 4. Beweis des Satzes in § 2.

Auch hier wird wieder eine Grenzkugel benützt, die aber jetzt nicht durch die Ecken des Dreiecks $\{ABC\}$ geht, sondern die Ebene des Dreiecks im Mittelpunkt F von (AB) berührt. Wieder ist die Zentralprojektion von O_∞ aus zu benützen, wobei auch wieder die Bilder der Punkte und Geraden durch Überstreichung bezeichnet werden, also geht A in $\bar{A}$, B in $\bar{B}$, C in $\bar{C}$ über, und die auf FF_∞ senkrechten Geraden g in Grenzkreisbogen $\bar{g}$, die auf $F\bar{F}_\infty$ senkrecht stehen, was man durch Spiegelung an der Ebene $FF_\infty\ \bar{F}_\infty\ O_\infty$ erkennt. Da auf der Grenzkreiskugel die euklidische Geometrie herrscht, sind alle $\bar{g}$ zueinander parallel, und da (§ 2) DE einer „Geraden" g angehören, steht $\overline{DE}$

auf $F\bar{F}_\infty$ senkrecht und $\overline{DE}$ ist zu $(\overline{AB})$ parallel. Jetzt benützen wir den elementar, ohne die Lehre von den harmonischen Punkten zu beweisenden Satz der euklidischen Geometrie: Schneidet man die Seiten $(\overline{AC})$ und $(\overline{BC})$ mit Parallelen $\bar{g}$ zur Grundlinie $(\overline{AB})$, so erhält man Schnittpunkte $\bar{Q}$ und $\bar{P}$, und die Punkte $(\overline{AP}) \times (\overline{BQ})$ liegen auf der Geraden $\overline{CF}$, die die Ecke $\bar{C}$ mit der Mitte $\bar{F}$ von $(\overline{AB})$ verbindet.

Diesen Satz wenden wir auf das in die Ebene zurückprojizierte Dreieck $\{ABC\}$ an und erkennen, daß zu den Punktepaaren PQ auch das Paar DE gehört, also gehen (AD), (BE) und (CF) durch einen Punkt. —

Der hier mitgeteilte Beweis ist immer noch umständlich, insofern als der Raum und die Grenzkugel benützt werden, während die beiden anderen Schnittpunktsätze (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und Höhenschnittpunkt) bekanntlich in der Ebene ohne Benützung des Raumes geführt werden.

Literaturverzeichnis.

1. H. Liebmann, Synthetische Geometrie (Leipzig 1934).

2. N. I. Lobatschefskij. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von F. Engel (Leipzig 1898).

3. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Auflage (Berlin und Leipzig 1923). Vgl. auch R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie (Berlin und Leipzig 1927) S. 111 u. 112. Baldus verwendet bei seinem Beweis des Transversalensatzes die Grenzkugel nicht, aber (S. 112) die projektive Geometrie und hebt ebenfalls hervor, daß ein rein planimetrischer Beweis ohne jede Verwendung des Parallelenaxioms, also im Bereich der für die absolute Geometrie, d. h. gleichzeitig für die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie gilt, noch nicht geführt ist. Übrigens wählt er den Weg in das Gebiet der nichteuklidischen Geometrie (S. 57), „der von den Elementen der euklidischen Geometrie ausgehend, über die Elemente der analytischen und der projektiven Geometrie führt", dem Grundgedanken von Cayley und Klein folgend – mit den weitgehenden Ergänzungen, welche die neuere Axiomatik fordert.