

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 11. Abhandlung

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse
der südbayerischen Dreieckskette

von

M. Schmidt

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
- Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
- Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
- Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definierten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
- Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2 . Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 11. Abhandlung

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse
der südbayerischen Dreieckskette

von

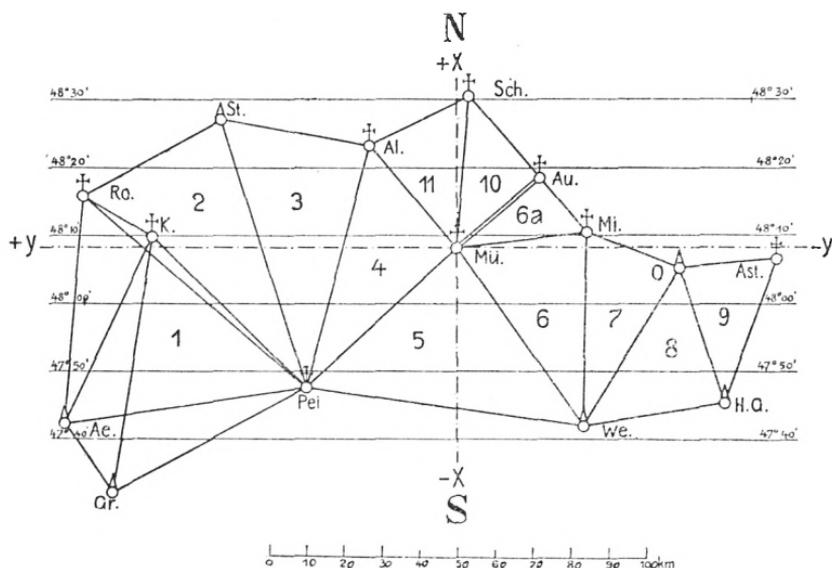
M. Schmidt

Vorgelegt am 5. November 1910



München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Südbayerische Dreieckskette.



In den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Band 36, 1906, Heft 1 sind die Ergebnisse der Winkelmessung und Seitenberechnung einer im südlichen Bayern längs des 48. Breitenparallels in den Jahren 1901 bis 1904 gemessenen Hauptdreieckskette mitgeteilt worden, welche zur Verbindung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und mit der an das rheinische Dreiecksnetz angeschlossenen württembergischen Dreieckskette von Hammer dient und ein Glied der auf dem genannten Parallel in Ausführung begriffenen Längengradmessung bildet. Der Berechnung dieser Dreieckskette liegt die vom Oberst Bonne im Jahre 1801 zwischen München und Aufkirchen gemessene altbayerische Basis zu Grunde, welche auch bei der in amtlichem Auftrag durch Karl v. Orff im Jahre 1873 ausgeführten wissenschaftlichen Bearbeitung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes Verwendung gefunden hat.

Die altbayerische Grundlinie ist nur einmal mittelst eines

Basisapparates gemessen worden, der aus fünf an den Enden mit Metallkappen versehenen Holzstangen von je fünf Meter Länge besteht, die bei der Messung in wagrechte Lage gebracht und mit ihren ebenen Endflächen aneinander gelegt wurden.

Um für die Richtigkeit dieser Messung die erforderliche Probe zu erhalten, ist bei der Weiterführung der Landestrian- gulierung bis an die nördliche Landesgrenze im Jahre 1807 durch die bayerische Katasterkommission eine zweite, sogenannte Verifikationsbasis, in der Gegend von Nürnberg mit einem aus fünf eisernen Stäben von je vier Meter Länge bestehenden Basisapparat gemessen worden, der von Reichenbach in München angefertigt war. Da die aus dieser Messung abgeleiteten Hauptdreiecksseiten mit den entsprechenden, aus der altbayerischen Grundlinie berechneten Werten gute Übereinstimmung zeigten, so wurden beide Grundlinienmessungen als zuverlässig angesehen und der endgültigen Berechnung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes zu Grunde gelegt.

Die Seitenberechnung für den südlich der Donau gelegenen Teil des Hauptdreiecksnetzes geht von der Grundlinie bei München aus, jene des nördlichen Netzteiles von der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg.

Beide Netzteile stehen durch das Ausgleichungspolygon XII der v. Orff'schen Bearbeitung der Bayerischen Landesvermessung (B. L. V.) miteinander in Beziehung, in welchem sich bei der Seitengleichung *I* (B. L. V., S. 393) der logarithmische Widerspruch zwischen den aus den beiderseitigen Grundlinien hergeleiteten Dreiecksseiten Wülzburg—Habsberg und Altomünster—Schweitenkirchen zu 30 Einheiten der 7. Logarithmenstelle ergab, welcher durch entsprechende Verbesserung der beteiligten Winkel ausgeglichen wurde.

Für die Ausführung einer neuen Berechnung der Seiten und Koordinaten der in der südbayerischen Dreieckskette zusammengefaßten Dreiecke kommt zunächst nur die altbayerische Grundlinie in Betracht, wenn man deren Werte mit jenen der Landesvermessung vergleichen will. In dieser Absicht wurde bei Berechnung der südbayerischen Kette auch das Soldnersche

Tabelle I.

 Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Seiten der
 südbayerischen Dreieckskette.

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgegliche- ne Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
1	Ro.	53 ⁰ 00' 39.93	4.810 2266.5
	Pei.	50 16 40.43	4.793 8268.9
	Ae.	76 42 49.52	4.896 0355.7
		180 ⁰ 00' 9.88	
1a	Ro.	62 ⁰ 50' 26.87	4.746 4113.4
	Ae.	20 04 56.53	4.332 9061.5
	K.	97 04 39.61	4.793 8268.9
		180 ⁰ 00' 3.01	
1b	Ae.	56 ⁰ 37' 53.00	4.760 5814.1
	K.	69 26 11.80	4.810 2266.5
	Pei.	53 56 2.81	4.746 4113.4
		180 ⁰ 00' 7.61	
1c	Ae.	64 ⁰ 49' 13.84	4.768 9945.3
	Pei.	19 30 34.77	4.336 0525.0
	Gr.	95 40 14.59	4.810 2266.5
		180 ⁰ 00' 3.20	
1d	Ae.	121 ⁰ 27' 06.84	4.842 5223.9
	K.	15 24 48.49	4.336 0525.0
	Gr.	43 08 7.29	4.746 4113.4
		180 ⁰ 00' 2.62	
1e	Gr.	52 ⁰ 32' 7.30	4.760 5814.1
	K.	54 01 23.31	4.768 9945.3
	Pei.	73 26 37.58	4.842 5223.9
		180 ⁰ 00' 8.19	

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
2	Pei.	30° 38' 38"84	4.610 2282.1
	Ro. St.	69 31 53.63 79 49 35.13	4.874 5940.5 4.896 0355.7
		180° 00' 7"60	
3	Pei.	32° 33' 28"21	4.608 3376.7
	St. Al.	63 59 49.93 83 26 48.77	4.831 0888.6 4.874 5940.5
		180° 00' 6"91	
4	Pei.	32° 22' 55"01	4.560 0587.8
	Al. Mü.	56 01 50.33 91 35 19.82	4.749 9840.9 4.831 0888.6
		180° 00' 5"16	
5	Pei.	49° 57' 55"94	4.766 9387.2
	Mü. We.	82 36 57.21 47 25 15.09	4.879 2915.1 4.749 9840.9
		180° 00' 8"24	
6	We.	35° 26' 32"03	4.532 7460.9
	Mü. Mi.	60 39 58.64 83 53 33.72	4.709 8166.6 4.766 9387.2
		180° 00' 4"39	
6 a	Mü.	36° 01' 14"33	4.302 6326.2
	Au. Mi.	87 22 51.43 56 35 55.68	4.532 7460.9 4.454 8006.7
		180° 00' 1"44	

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
7	We.	30 ⁰ 24' 0"36	4.423 2231.7
	Mi.	71 22 15.86	4.695 6738.4
	O.	78 13 47.03	4.709 8166.6
		180 ⁰ 00' 3"25	
8	We.	50 ⁰ 00' 5"24	4.585 8519.6
	O.	49 26 8.75	4.582 2178.3
	H. G.	80 33 49.68	4.695 6738.4
		180 ⁰ 00' 3"67	
9	H. G.	39 ⁰ 03' 2"02	4.430 7252.7
	O.	76 43 48.08	4.619 6288.4
	Ast.	64 13 12.45	4.585 8519.6
		180 ⁰ 00' 2"55	
10	Mü.	45 ⁰ 29' 38"09	4.464 7222.8
	Sch.	44 11 32.08	4.454 8006.7
	Au.	90 18 51.93	4.611 5204.7
		180 ⁰ 00' 2"10	
11	Mü.	43 ⁰ 36' 51"91	4.462 2190.3
	Al.	76 36 22.96	4.611 5204.7
	Sch.	59 46 47.72	4.560 0587.8
		180 ⁰ 00' 2"59	

Koordinatensystem mit der Spitze des Nordturmes der Frauenkirche in München als Nullpunkt sowie der Halbmesser der von Soldner gewählten Projektionskugel $R = 6388172 m$, der Logarithmus der Seite München—Aufkirchen mit dem Werte 4.454 8006.7 und der aus der Azimutmessung Henrys folgende Direktionswinkel dieser Seite $138^{\circ} 59' 53''.00$ (B. L. V., S. 501) unverändert beibehalten.

Tabelle I enthält die Zusammenstellung der für die Koordinatenberechnung verwendeten ausgeglichenen Winkel und der Seitenlogarithmen mit Hinzufügung der entsprechenden Werte der beiden Dreiecke 10 und 11, welche für den Anschluß der fränkischen Grundlinie und einer über Nürnberg zur nördlichen Landesgrenze führenden Dreieckskette erforderlich sind. Durch Einfügen dieser beiden Dreiecke erhält man für den mittleren Teil der südbayerischen Kette ein geschlossenes Kranzsystem von 6 Dreiecken mit München als Zentralpunkt, das unter Annahme gleicher Winkelgewichte ausgeglichen worden ist.

Die Ausgleichung ist mit acht Bedingungsgleichungen und zwar sechs Dreieckswinkelgleichungen, einer Stationsgleichung und einer Seitengleichung durchgeführt worden und hat den mittleren Winkelfehler $\pm 0''.82$ ergeben.

Als Beobachtungswerte wurden hiebei außer den in Sitzgsb. 1906, Band 36, Heft 1 zusammengestellten Winkeln die der B. L. V., S. 349 und 350 entnommenen Winkel der Dreiecke 10 und 11 eingeführt.

Mit den in Tabelle I enthaltenen ausgeglichenen Winkeln und Seitenlogarithmen ist sodann die Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der Dreieckspunkte ausgeführt, deren Werte neben den ursprünglichen Koordinaten der Landesvermessung in Tabelle II angegeben sind. Hiezu ist noch zu bemerken, daß die Koordinaten der beiden Punkte Kirchheim und Grünten nach dem für Doppelpunkteinschaltungen gebräuchlichen Verfahren berechnet wurden.

In den beiden letzten Spalten der Tabelle II sind die auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen Koordinaten auf-

Tabelle II.

Sphärische rechtwinklige Koordinaten für die Punkte der südbayerischen Dreieckskette

Nr.	Stationen	nach der Landesvermessung		nach der Neuberechnung		bezogen auf den Schwerpunkt des Systems	
		x	y	x'	y'	(x)	(y)
1	Aenger	- 45 909,45	+ 106 021,72	- 45 909,40	+ 106 022,59	- 40 139,43	+ 88 641,41
2	Roggenburg . . .	+ 15 993,12	+ 99 813,94	+ 15 993,27	+ 99 814,29	+ 21 763,24	+ 82 433,11
3	Peissenberg . . .	- 37 406,92	+ 41 985,02	- 37 407,17	+ 41 985,35	- 31 637,20	+ 24 604,17
4	Stauffersberg . . .	+ 34 377,91	+ 63 435,94	+ 34 378,18	+ 63 435,96	+ 40 148,15	+ 46 054,78
5	Altomünster . . .	+ 27 772,15	+ 23 394,70	+ 27 772,31	+ 23 394,79	+ 33 542,28	+ 6 013,61
6	München, nördlicher Frauenturm . . .	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 5 769,97	- 17 381,18
7	Aufkirchen	+ 18 696,58	- 21 506,37	+ 18 696,58	- 21 506,37	+ 24 466,55	- 38 887,55
8	Mitbach	+ 2 960,82	- 33 970,63	+ 2 960,89	- 33 970,55	+ 8 730,86	- 51 351,73
9	Wendelstein	- 48 294,72	- 32 962,63	- 48 294,39	- 32 962,15	- 42 524,42	- 50 343,33
10	Hochgern	- 42 665,58	- 70 759,91	- 42 665,48	- 70 758,91	+ 36 895,51	- 88 139,09
11	Asten	- 3 814,77	- 85 782,52	- 3 814,73	- 85 781,59	+ 1 955,24	- 103 162,77
12	Schweitenkirchen . . .	+ 40 804,36	- 2 498,69	+ 40 804,48	- 2 498,65	+ 46 574,45	- 19 879,83
13	Kirchheim	+ 4 304,22	+ 81 741,05	+ 4 304,18	+ 81 741,12	+ 10 074,15	+ 64 359,94
14	Grünthen	- 64 146,21	+ 94 295,61	- 64 146,37	+ 94 296,45	- 58 376,40	+ 76 915,27
15	München, Sternwarte	+ 778,18	- 2 494,58	+ 778,11	- 2 494,60	+ 6 548,08	- 19 875,78
16	Oberhof	—	—	- 5 995,91	- 58 909,62	—	—

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse.

Tabelle III.

Koordinatenunterschiede der Stationspunkte der südbayerischen Dreieckskette und der Landesvermessung.

Nr.	Stationen	$dx = x' - x$	$dy = y' - y$	$v_x = x'' - x$	$v_y = y'' - y$	$r_x = dx - v_x$	$r_y = dy - v_y$
		cm	cm	cm	cm	cm	cm
1	Aenger Pyr. . . .	+ 5	+ 87	+ 10	+ 31	- 5	+ 56
2	Roggenburg Tm. . .	+ 15	+ 35	+ 9	+ 33	+ 6	+ 2
3	Peissenberg Tm. . .	- 25	+ 33	+ 6	+ 32	- 31	+ 1
4	Stauffersberg Pyr. .	+ 27	+ 2	+ 7	+ 36	+ 20	- 34
5	Altomünster Tm. . .	+ 16	+ 9	+ 5	+ 36	+ 11	- 25
6	München, n. Fr.-Tm.	0	0	+ 4	+ 34	- 4	- 34
7	Aufkirchen Tm. . .	0	0	+ 3	+ 35	- 3	- 35
8	Mitbach Tm. . . .	+ 7	+ 8	+ 2	+ 34	+ 5	- 26
9	Wendelstein Pyr. . .	+ 33	+ 48	+ 2	+ 32	+ 31	+ 16
10	Hochgern Pyr. . . .	+ 10	+ 100	0	+ 36	+ 10	+ 64
11	Asten Tm.	+ 4	+ 93	0	+ 34	+ 4	+ 59
12	Schweitenkirchen T.	+ 12	+ 4	+ 4	+ 36	+ 8	- 32
13	Kirchheim Tm. . . .	- 4	+ 7	+ 8	+ 35	- 12	- 28
14	Grünten Pyr. . . .	- 16	+ 84	+ 9	+ 31	- 25	+ 53
15	München, Sternw. . .	- 7	- 2	+ 4	+ 34	- 11	- 36
		$[dx] = + 77$ cm $dx_0 = + 5$ cm	$[dy] = + 508$ cm $dy_0 = + 34$ cm			$m_x = \pm 16$ cm	$m_y = \pm 38$ cm

geführt, dessen Lage gegen den Koordinatenursprung der Landesvermessung durch die unter Nr. 6 angegebenen Koordinatenwerte bestimmt ist.

Zum Zwecke der Vergleichung der neu berechneten Koordinatenwerte mit jenen der Landesvermessung sind ferner die Unterschiede

$$x' - x = dx \quad \text{und} \quad y' - y = dy$$

gebildet und in Tabelle III zusammengestellt worden.

Um beide Punktsysteme in möglichst gute Übereinstimmung zu bringen, denkt man sich dieselben nach Helmert (Längengradmessung I, 1893, S. 47) so aufeinander gelegt und gegenseitig verschoben, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum ist.

Man verfährt dabei in der Weise, daß der Schwerpunkt der in Betracht kommenden Punkte der einen Figur als Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten (x) , (y) gewählt wird deren Werte man für alle diese Punkte berechnet.

Dreht man nun die zweite Figur um den Koordinatenanfang im Sinne wachsender Direktionswinkel um δ , verschiebt dieselbe um δx und δy und ändert man zugleich ihren Maßstab durch Multiplikation mit dem Faktor $(1 - \mu)$, so lassen sich die Variablen δ , μ und die Koordinatenänderungen des Nullpunktes dx_0 und dy_0 derart bestimmen, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum ist.

Dieser Bedingung genügen im vorliegenden Falle die Werte der Variablen

$$dx_0 = + \frac{[dx]}{n} = + 0,05 \text{ m}; \quad dy_0 = + \frac{[dy]}{n} = + 0,34 \text{ m}$$

$$\delta = - \rho'' \frac{[(x) dy - (y) dx]}{[(x)^2 + (y)^2]} = + 0,11;$$

$$\mu = - \frac{[(x) dx + (y) dy]}{[(x)^2 + (y)^2]} = - 24,6 \times 10^{-9}.$$

Die berechneten Größen dx_0 , dy_0 , δ und μ sind bei den hier betrachteten beiden Punktsystemen als Verbesserungen der Koordinatenwerte der Landesvermessung zu nehmen.

Die wegen der Nullpunktverschiebung, Orientierungs- und Maßstabänderung verbesserten Koordinatenwerte der Landesvermessung sind sodann:

$$\begin{aligned}x'' &= x + dx_0 + (y) \delta - (x) \cdot \mu \\y'' &= y + dy_0 - (x) \delta - (y) \cdot \mu.\end{aligned}$$

Hiermit erhält man die in Tabelle III eingetragenen Koordinatenverbesserungen

$$v_x = x'' - x \quad \text{und} \quad v_y = y'' - y$$

und die Restfehler

$$r_x = dx - v_x; \quad r_y = dy - v_y.$$

Aus diesen ergeben sich schließlich die mittleren Koordinatenfehler der Punkte der Landesvermessung

$$m_x = \pm 16 \text{ cm}; \quad m_y = \pm 38 \text{ cm}$$

sowie der mittlere lineare Abstand der gleichnamigen Punkte in beiden Systemen

$$m_r = \pm 41 \text{ cm.}$$

Die größten Restfehler mit den Werten + 64, + 59, + 56 und + 53 cm zeigen die Punkte Hochgern, Asten, Aenger und Grünten, welche mit Ausnahme des Turmpunktes Asten mit Pyramidensignalen bebaut waren, deren Spitzen den Dreieckspunkt bezeichneten. Diese nicht unbeträchtlichen Fehler erklären sich zum Teil dadurch, daß die genaue örtliche Festlegung der Pyramidenspitzen in der Bodenfläche zur Zeit der Ausführung der Winkelmessungen unterblieb und daß bei der nachträglich vorgenommenen Versicherung der Dreieckspunkte mit Marksteinen die ursprüngliche Lage dieser Punkte sich nicht mehr mit voller Sicherheit bestimmen ließ, sondern nur nach den im Boden noch vorgefundenen Resten des Holzwerkes der Pyramiden ermittelt wurde, da die Pyramiden inzwischen beseitigt oder verfallen waren.

Berechnet man die den Werten m_x und m_y entsprechenden Richtungsfehler $d\varphi$ für die Seiten der Dreieckskette auf Grund der Beziehung

$$d\varphi = \varrho'' \left(\frac{\sin \varphi}{s} \cdot m_y - \frac{\cos \varphi}{s} m_x \right),$$

in welcher s die Längen und φ die Direktionswinkel der Seiten bezeichnen, so findet sich, wenn nur das eine Seitenende als unsicher betrachtet wird, im Mittel

$$m_{\varphi_y} = \pm 1.17; \quad m_{\varphi_x} = \pm 0.55 \quad \text{und} \quad m_{\varphi_r} = \sqrt{m_{\varphi_y}^2 + m_{\varphi_x}^2} \\ = \pm 1.29.$$

Nimmt man beide Endpunkte der Dreiecksseiten als veränderlich an und führt die Richtungsfehler in Winkelfehler über, so erhält man den mittleren Winkelfehler

$$m_w = \pm 2 m_{\varphi_r} = \pm 2.58.$$

Nach B. L. V., S. 483 hat sich der mittlere Fehler der auf eine 10 fache Repetition gestützten Bestimmung des Winkels zweier Richtungen aus der Netzausgleichung zu $e = \pm 2.45$ ergeben. Beide Werte stimmen also recht gut überein und es kann somit mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden, daß die in Tabelle III nachgewiesenen Koordinatenrestfehler zufälliger Natur sind und außerdem in den Fehlern der älteren Winkelmessungen nach dem Repetitionsverfahren, in der Unsicherheit der Festlegung und Wiederherstellung der ursprünglichen Dreieckspunkte, sowie in den im Laufe der Zeit eingetretenen Lageänderungen ihren Grund haben, welchen die als Zielpunkte benützten Spitzen hoher Türme mit aus Holz gezimmerten Helmen unter dem Einfluß von Wind und Wetter unterliegen.

Hiezu kommt noch, daß bei der Zentrierung älterer Winkelmessungen auf Türmen die von der Mitte des Turmmauerwerks abweichende Lage der Turmspitzen in der Regel keine entsprechende Berücksichtigung gefunden hat.

Die Größe der derzeitigen Abweichung der Turmspitzen von den Turmachsen läßt sich zwar nachträglich ermitteln, allein es bleibt zweifelhaft, ob nicht im Laufe der inzwischen verflossenen langen Zeit durch äußere Einflüsse, wie z. B. durch Stürme, merkliche Verschiebungen im Zimmerwerk der Turm-

helme und infolgedessen Lageänderungen der Turmspitzen eingetreten sind.

Auf Vorgänge dieser Art könnte aus den für die Spitze des 98 m hohen Nordturmes der Frauenkirche in München gefundenen Koordinatenänderungen $dx_0 = +0,05$ m und $dy_0 = +0,34$ m geschlossen werden, welchen eine Verschiebung der Turmspitze nach Osten, d. i. in der Richtung der vorherrschenden Winde, entspricht.

Bei der großen Angriffsfläche, welche die hölzerne Kuppel des Turmes bei 11 m Höhe und 14,5 m Durchmesser dem Winddruck darbietet, ist dieselbe jedenfalls der Wirkung großer Schubkräfte ausgesetzt, aber gleichwohl kann eine so beträchtliche Verschiebung in dem gut gefügten und verstrebtten Zimmerwerk der Turmkuppel nicht als wahrscheinlich angesehen werden, da dasselbe überdies durch die allseitig geschlossene Dachverschalung und ihre Verkleidung mit Kupferblech eine sehr große Widerstandsfähigkeit gegen Formänderung erhalten hat.

Zudem haben sehr sorgfältig ausgeführte Messungen ergeben, daß das untere Ende der 6 m langen und 27 cm starken Helmsäule der Turmkuppel gegen das die Kugel tragende Kopfende gegenwärtig die Koordinaten $+0,07$ m und $+0,03$ m besitzt und mit dem geometrischen Mittelpunkte des Mauerpolygons in der Turmstube, in welcher die Winkelmessungen ausgeführt sind, genau zusammenfällt. Wenn also eine östliche Verschiebung der Turmspitze seit der Ausführung der bei der Berechnung der Landesvermessung benützten Winkelmessungen eingetreten sein sollte, so müßte die Turmspitze früher 0,34 m westlich von der Achse des Mauerwerks gelegen sein, was kaum anzunehmen ist.

Für die Erklärung der rechnerisch ermittelten Koordinatenänderungen der Spitze des Nordturmes der Frauenkirche in München könnte noch eine im Laufe des vergangenen Jahrhunderts eingetretene Abweichung der Turmachse von der lotrechten Stellung in Betracht kommen. Einer solchen Neigung des Turmes nach Osten wirkt aber die nördliche Langmauer

des Kirchenschiffes als mächtiger Strebepfeiler entgegen, in deren Verbindung mit dem Turmmauerwerk keinerlei Risse oder Sprünge zu bemerken sind; auch konnte in der Ebene des Fußbodens der Turmstube eine merkliche Neigung gegen Osten durch Nivellement nicht festgestellt werden.

Schließlich ließe sich noch an eine Verschiebung des ganzen Bauwerkes durch tektonische Kräfte denken, die im nördlichen Vorlande der bayerischen Alpen eine wichtige Rolle spielen und sich noch in jüngster Zeit durch eine Höhenstörung bei Laufen an der Salzach¹⁾ sowie durch Gipfelpaltungen am Watzmann und Hochkalter augenfällig bemerkbar gemacht haben.

Sollten durch derartige Ursachen Lageänderungen einzelner Dreieckspunkte eingetreten sein, so müßten sich aus den im Laufe des letzten Jahrhunderts daselbst wiederholt ausgeführten Winkelmessungen Richtungsänderungen gegen die unverändert gebliebenen Nachbarpunkte nachweisen lassen, aus welchen die Größe der Koordinatenänderungen der verschobenen Punkte hergeleitet werden könnte.

Für den Nordturm der Frauenkirche in München sowie für die Hauptdreieckspunkte Aenger, Peissenberg, Watzmann und Rettenstein, auf welchen zu verschiedenen Zeiten des vergangenen Jahrhunderts wiederholt genaue Winkelmessungen zwischen benachbarten Dreieckspunkten vorgenommen wurden, sind derartige Änderungen mit einiger Sicherheit nicht nachzuweisen, wie die zu diesem Zweck ausgeführten Berechnungen ergeben haben.

Das gleiche negative Ergebnis haben die mit besonderer Gründlichkeit geführten Untersuchungen für den Hauptdreieckspunkt München geliefert. Die ältesten für diesen Punkt hier in Betracht kommenden Winkelmessungen sind von Bonne und seinen Offizieren im Jahre 1801 in der Turmstube des Nordturmes der Frauenkirche ausgeführt worden. Ihre Ergebnisse

¹⁾ Vgl. M. Schmidt, Ergänzungsmessungen zum Bayer. Präzisionsnivellement. München 1908, Heft 1, S. 40.

finden sich in voller Ausführlichkeit in den durch das K. Topographische Bureau des K. Bayer. Generalstabes aufbewahrten Abschriften der Originalwinkelbücher, sodann in dem die Winkelmessungen enthaltenden Abschnitt des Landesvermessungswerkes S. 168, sowie auch in einem Bericht Bonnes an den Direktor des Depôt general de la Guerre in Paris, welcher im „Kritischen Wegweiser im Gebiet der Landkartenkunde“ V. Bd., Berlin 1833, S. 224 veröffentlicht ist.

Von den 1801/05 bei diesen Winkelmessungen benützten und den HDNP München kranzförmig umgebenden Zielpunkten sind sechs unverändert erhalten geblieben und bei den neueren Winkelmessungen in den Jahren 1855 und 1904 wieder verwendet worden, so daß die alten und neuen Winkelwerte unmittelbar vergleichbar sind.

Berechnet man nun die für die drei Beobachtungsreihen aus den Jahren 1801/05, 1855/57 und 1904 sich ergebenden wahrscheinlichsten Koordinaten- und Richtungsänderungen dx , dy und m , so erhält man hiefür die Werte

Zeitraum	dx cm	dy cm	m''
1801/1855	$- 14,1 \pm 7,6$	$+ 18,9 \pm 10,3$	$\pm 0,85$
1801/1904	$- 11,4 \pm 10,9$	$- 0,2 \pm 15,0$	$\pm 0,87$

während sich für die mittleren Koordinatenfehler der die südbayerische Dreieckskette bildenden Hauptnetzpunkte aus den Restfehlern der Netzeinpassung die Werte ergeben

$$m_x = \pm 16 \text{ cm} \quad \text{und} \quad m_y = \pm 38 \text{ cm}.$$

Eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes München gegen die ihm benachbarten Hauptnetzpunkte läßt sich hieraus somit nicht mit Bestimmtheit folgern.

Zum Nachweis der Identität der Scheitelpunkte, auf welche die auf dem nördlichen Turm der Frauenkirche zu verschiedenen Zeiten gemessenen Winkel bezogen wurden, mag noch bemerkt werden, daß die Messungen Bonnes in der unmittelbar unter der Kuppel gelegenen, mit acht doppelten Fensteröffnungen versehenen Turmstube in verschiedenen Standorten

ausgeführt und auf die geometrische Mitte dieses die Form eines regelmäßigen Achtecks besitzenden Raumes reduziert sind.

Wie bereits erwähnt, weicht die vertikale Achse dieses Raumes gegenwärtig nur um wenige Zentimeter von der Projektion des oberen Endes der Helmsäule des Turmes ab, auf deren Mitte alle späteren Winkelmessungen bezogen worden sind. Daß diese gute Übereinstimmung bereits seit Jahrzehnten bestanden hat und Verschiebungen im Zimmerwerk der Turmkuppel in der letzten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts nicht eingetreten sind, läßt sich aus den im Jahre 1904 ausgeführten Zentrierungsmessungen mit großer Sicherheit schließen.

Bei den im Jahre 1855 durch den Trigonometrierer der K. B. Katasterkommission Jakob Rathmayer auf dem nördlichen Frauenturm ausgeführten Winkelmessungen war der aus einer Metallkugel von 1 m Durchmesser bestehende Turmknopf abgehoben und der Theodolit zentrisch über der Helmsäule in 97 m Höhe über der Bodenfläche am Fuß des Turmes aufgestellt.

Da diese zentrische Aufstellung kostspielige Gerüstbauten erfordert und nicht ohne Gefahr ist, wurde bei den Messungen im Jahre 1904 der exzentrischen Aufstellung in den Fensterischen der unter der Kuppel gelegenen Turmstube von 9,5 m lichter Weite der Vorzug gegeben. Hier wurden nach Herausnahme der eisernen Fensterstöcke in drei nach Osten, Süden und Westen gelegenen 1,0 m weiten und 1,5 m tiefen Fensterischen Beobachtungspfeiler von 1,20 m Höhe aufgemauert und auf deren Oberfläche sowie in den darüber gewölbten Fensterbögen die Stationspunkte durch eingelassene Messingbolzen markiert.

Zur Bestimmung der Lage dieser Beobachtungspunkte gegen die Turmspitze ist die Helmsstangenmitte unter der Kugel von zwei auf dem Turmpfeiler des neuen Katasterbureaugebäudes an der Alexandrastraße und auf dem Umgang des Turmes der St. Peterskirche gewählten Theodolitstandorten aus auf den Fußboden der Turmstube heruntergelotet und der Durchschnitt der beiden Lotebenen in einem starken Durchzug-

balken der Turmstubendecke mit einer eisernen Schraube festgelegt worden.

Die Einmessung dieses Punktes auf die in den Fensterischen markierten Theodolitstandorte erfolgte mittelst eines innerhalb der Turmstube abgesteckten Liniennetzes, das so angelegt war, daß die linearen Abstände des Lotpunktes von den drei Pfeilerpunkten aus einfachen Linienverbindungen scharf berechnet werden konnten.

Die wahrscheinlichsten Werte der Koordinaten der drei Pfeilerpunkte sind durch Rückwärtseinschneiden mit überschüssigen Richtungen aus 10 Dreieckspunkten III. Ordnung ermittelt, die mit wenigen Ausnahmen im Anschluß an die nächstliegenden Haupt- und Sekundärnetzpunkte bei den in den Jahren 1855/57 und 1876/79 im Stadtbezirk von München ausgeführten Katastertriangulierungen festgelegt wurden. Nur drei dieser Ausgangspunkte sind erst in neuerer Zeit in das bestehende Netz eingeschaltet worden. Als Zielpunkte dienten folgende Türme. Auf Pfeiler I (Südpfeiler): Heilige Geistkirche, St. Peterskirche, Auer Kirche, Kreuzkirche; auf Pfeiler II (Westpfeiler): Kreuzkirche, St. Matthäuskirche, Justizpalast, St. Bennokirche; auf Pfeiler III (Ostpfeiler): St. Ludwigskirche, Bogenhauser Kirche, St. Annakirche, Haidhauser Kirche, St. Peterskirche, St. Matthäuskirche. Die zur Ermittlung der Pfeilerkoordinaten benützten Ausgangswerte, die sämtlich den Triangulierungsakten des K. Katasterbureaus entnommen sind, entsprechen somit jener örtlichen Lage der Dreieckspunkte, welche diese zur oben angegebenen Zeit der Ausführung der Winkelmessungen besaßen.

Hat die örtliche Lage dieser Zielpunkte in den letzten Jahrzehnten keine Änderung erfahren, so müssen auch die im Jahre 1904 auf den drei Pfeilern ausgeführten Winkelmessungen die Abstände der Pfeilerpunkte von der früher als Koordinatennullpunkt angenommenen Helmsäulenmitte unverändert ergeben und die mit den im Jahre 1904 auf den Fensterpfeilern gemessenen Winkeln abgeleiteten Koordinaten desselben Punktes dürfen sich nur wenig von Null unterscheiden.

Die Ausgleichung ergab die Koordinatenwerte der drei Pfeilerpunkte

$$\begin{aligned} x_1 &= -5,73 \pm 0,01 \text{ m} & x_2 &= +1,03 \pm 0,005 \text{ m} \\ y_1 &= +0,92 \pm 0,02 \text{ m} & y_2 &= +5,89 \pm 0,004 \text{ m} \\ & & x_3 &= -0,75 \pm 0,0004 \text{ m} \\ & & y_3 &= -5,96 \pm 0,0004 \text{ m.} \end{aligned}$$

Aus den in diesen Punkten vorgenommenen Winkelmessungen folgen für die nach dem Lotpunkt der Helmsäulenmitte gerichteten Strahlen die Direktionswinkel

$$\varphi_1 = 99^\circ 7' 18'' \quad \varphi_2 = 189^\circ 55' 9'' \quad \varphi_3 = 7^\circ 10' 20'',$$

während die in der Turmstube ausgeführten Liniennetzmessungen die Längen dieser Strahlen ergaben

$$s_1 = 5,840 \text{ m} \quad s_2 = 5,980 \text{ m} \quad s_3 = 6,021 \text{ m.}$$

Mit diesen Zahlenwerten finden sich die wahrscheinlichsten Koordinatenwerte der Helmsäulenmitte

$$x_0 = +0,013 \text{ m} \quad y_0 = +0,003 \text{ m.}$$

Es können somit größere Lageänderungen oder örtliche Verschiebungen des Hauptdreieckspunktes München gegen benachbarte, dem Stadtbezirk angehörende Dreieckspunkte ebenso wenig nachgewiesen werden, wie gegen die in bedeutenderen Entfernungen gelegenen Hauptnetzpunkte.

Die bei der Einpassung der südbayerischen Dreieckskette in das Netz der Landestriangulierung hervortretende Verschiebung des Koordinatennullpunktes kann somit nicht durch eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes München, sondern nur durch die Fehler der älteren Winkelmessungen und die bei größeren Dreiecksnetzen vorkommenden, sogenannten Netzverschiebungsfehler ihre Erklärung finden, welche nicht selten durch den bei partiellen Netzausgleichungen unvermeidlichen Anschlußzwang hervorgerufen werden.

Die Ausführung und Reduktion der Winkelmessungen auf dem Turm der Frauenkirche besorgte Katastergeometer Netzsch. die Koordinatenberechnung und Ausgleichung Assistent Dr. Näbauer unter meiner Leitung und Mitwirkung.

Netzanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette.

Nach B. L. V., S. 34 beträgt die unter Verwendung von Bessels Erddimensionen auf die Meeresfläche projizierte Länge der altbayerischen Grundlinie zwischen ihren nordöstlich von München bei Oberföhring und Aufkirchen gelegenen und mit mächtigen Steinpyramiden überbauten Endpunkten nach der unter der Oberleitung des Oberst Bonne im Jahre 1801 ausgeführten einmaligen Messung 21653,96 m.

Die trigonometrische Verbindung dieser unmittelbar gemessenen Linie mit der Hauptnetzseite München (*M*)-Aufkirchen (*Au*) ist im Jahre 1870 durch die K. B. Katasterkommission neu ausgeführt worden und hat nach B. L. V., S. 349 den Logarithmus Sinus der Seite *MAu* in bayerischen Ruten zu 3.989 6259 ergeben.

Fügt man diesem Wert zur Überführung in Metermaß gemäß einer K. Verordnung vom 28. Februar 1809, durch welche das Verhältnis der bayerischen Rute zur legalen Meterlänge bei 13° R auf $k = 1293.8 : 443.296$ festgesetzt ist, den Verwandlungslogarithmus $Lg k = 0.465 1733.3^1$), sowie das dem Krümmungshalbmesser der Projektionskugel $R = 2.188 786$ Ruten entsprechende Additament 14,4 Einheiten der 7. Logarithmenstelle hinzu, so ergibt sich der bei der sphärischen Seiten- und Koordinatenberechnung der südbayerischen Dreieckskette als Ausgangswert benützte Logarithmus der Bogenlänge der Seite München—Aufkirchen $Lg. MAu = 4.454 8006.7$.

Die in dem Verwandlungslogarithmus enthaltene und auch bei der Abgleichung des Basisapparates benützte Länge des legalen Meters $1 \text{ m} = 443.296 \text{ Par. Lin.}$ bedingt zur Zurückführung der Maßeinheit auf die internationale Meterlänge nach Helmert: „Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite“, 1. Heft, Berlin 1893, S. 230 eine Vergrößerung der Seitenlogarithmen von 57,7 Einheiten der 7. Logarithmenstelle,

¹⁾ Vgl. die zum dienstlichen Gebrauch vom K. B. Katasterbureau bearbeitete Umwandlungstabelle von bayerischen Ruten in Meter.

welche dem Verwandlungslogarithmus hinzugefügt, für diesen den Wert ergibt

$$\text{Lg } k' = 0.465\ 1791.0.$$

Um den gleichen Betrag von $57.7 \cdot 10^{-7}$ sind infolgedessen auch sämtliche aus Lg. $MAu = 4.454\ 8006.7$ berechneten Dreiecksseiten und Koordinaten der südbayerischen Dreieckskette zu vergrößern, um dieselben auf die internationale Meterlänge zurückzuführen.

Daß bei der Abgleichung der bei der Messung der altbayerischen Grundlinie an der Goldach von Bonne benützten Basisstangen das legale Meter tatsächlich die Maßeinheit bildete, geht aus einem ausführlichen Bericht Bonnes über die unter seiner Leitung ausgeführte Triangulierung von Bayern hervor, den er an seinen Brigadegeneral Sanson in Paris am 11. Februar 1803 aus München erstattet hat.

Dieser Bericht, welcher sich heute noch in den Archiven des französischen Kriegsministeriums befindet und mir in einer wörtlichen Abschrift vorliegt, ist später mit einigen Kürzungen im „Kritischen Wegweiser im Gebiete der Landkartenkunde Bd. V, Berlin 1833, bei Simon Schropp & Co.“, unter dem Titel „Documens relatifs à l'histoire de la Triangulation de Bavière, exécutée par les Ingénieurs-geographes français“ veröffentlicht worden.

Der Abschnitt 3 dieses Berichtes enthält die Beschreibung der Hilfsmittel, welche zur Messung der Basis an der Goldach bei München angewendet wurden. Hier führt Bonne zunächst an, daß sich alle seine Messungen auf ein mètre provisoire de laiton stützen, das er vom Maß- und Gewichts-bureau in Paris erhalten habe und die Nr. 67, den Namen Lenoir und in der Mitte einen ovalen Stempel mit der Aufschrift „modèle“ trage. Über die bei der Maßabgleichung der Basisstangen verwendete Längeneinheit sagt dann Bonne a. a. O., S. 174 wörtlich: „Le mètre provisoire de laiton étant à la température de 10^0 (8^0 R) a été rendu égal à 443.44 lignes de la toise du Perou, celle-ci étant à $16^{\circ}25$ (13^0 R). Le mètre définitif de

platine, fixé à la température de la glace fondante et représentant le mètre mathématique égal à la dix-millionième partie du quart du méridien, est égal à 443.296 lignes de la même toise, d'où il suit, que le mètre provisoire vaut 1,000325 du mètre définitif."

Da Bonne nach diesem Messingstab unter Berücksichtigung des erwähnten Verhältnisses die Längen der zur Basismessung verwendeten Meßstangen wirklich abgeglichen hat, so dürfte über die Herleitung der bei der altbayerischen Grundlinie benützten Maßeinheit und über die Notwendigkeit ihrer Zurückführung auf die internationale Meterlänge durch Hinzufügen der logarithmischen Verbesserung von rund 58 Einheiten der 7. Logarithmenstelle kein Zweifel bestehen.

Der von Bonne benützte Meterstab von Lenoir Nr. 67 konnte leider bis jetzt weder in München noch in Paris aufgefunden werden.

Österreichischer und württembergischer Anschluss.

Der Anschluß der südbayerischen Dreieckskette an das österreichische Netz bei Salzburg wird durch die beiden Seiten Wendelstein (*We*) — Hochgern (*Hg*) und Hochgern (*Hg*) — Asten (*Ast*) vermittelt. Die Längen derselben sind nach der Neuberechnung vom Jahre 1910 reduziert auf internationales Maß

Lg. *WeHg* = 4.582 2178.3 + 57.7 = 4.582 2336.0 (bayer.)
und

Lg. *HgAst* = 4.619 6288.4 + 57.7 = 4.619 6346.1 (bayer.).

Der im Jahre 1904 durch das K. K. Militärgeographische Institut in Wien handschriftlich mitgeteilte Wert des Seitenlogarithmus *HgAst* ist ebenfalls in internationalem Maß

Lg. *HgAst* = 4.619 6344.6 (österr.).

Die Anschlußdifferenz Lg. bayer. — Lg. österr. beträgt somit in Einheiten der 7. Logarithmenstelle

$$A_1 = \text{Lg}_b - \text{Lg}_\sigma = + 1.5 \times 10^{-7}.$$

Da der österreichische Wert der Seitenlänge Wendelstein—Hochgern nicht mitgeteilt war, mußte derselbe mit den im Jahre 1904 in Rettenstein (*Re*) und Wendelstein (*We*) von Österreich und in *Hg* von Bayern beobachteten und auf 180° abgeglichenen Dreieckswinkeln aus der mitgeteilten Seitenlänge *Re—Hg* berechnet werden. Die Rechnungsergebnisse sind

Eckpunkt	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
<i>Hg</i>	$62^{\circ} 29' 45''32$	4.666 5650.9
<i>Re</i>	$46^{\circ} 55' 16''54$	<u>4.582 2224.2</u>
<i>We</i>	$70^{\circ} 34' 58''14$	4.693 2205.6

Der Anschlußwiderspruch (bayer.—österr.) beträgt somit für die Seite Wendelstein—Hochgern

$$A_2 = \text{Lg}_b - \text{Lg}_o = + 11.8 \times 10^{-7}$$

oder im Mittel

$$A_m = \frac{A_1 + A_2}{2} = + 6.65 \times 10^{-7},$$

das ist 1,5 mm pro km = 1 : 650 000.

Nach meiner ersten Mitteilung über die südbayerische Dreieckskette in den Sitzungsberichten vom 3. Februar 1906, S. 144/145 ist der auf internationales Maß reduzierte Logarithmus der Seite Aenger—Roggenburg (*Th*) durch Vermittelung der von Hammer 1892 bearbeiteten württembergischen Dreieckskette aus den Seiten Donon—Straßburg und Ballon—Donon (Rhein. Netz, S. 127) doppelt berechnet worden und zwar aus *Do—Str*

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793 8339.0$$

und aus *Ba—Do*

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793 8336.6.$$

Die Neuberechnung der südbayerischen Dreieckskette hat in $\triangle 1$ (Tab. I) für die Seite Aenger—Roggenburg den auf internationales Maß reduzierten Wert gegeben

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793 8268.9 + 57.7 = 4.793 8326.6 \text{ (bayer.)}.$$

Vergleicht man hiemit den Mittelwert der beiden oben angegebenen, auf die Basis von Oberhergheim bezogenen Seitenlogarithmen

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793 \ 8337.8 \text{ (Mittel),}$$

so erhält man die logarithmische Anschlußdifferenz Lg. bayer. — Lg. württ.

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_w = -11.2 \times 10^{-7},$$

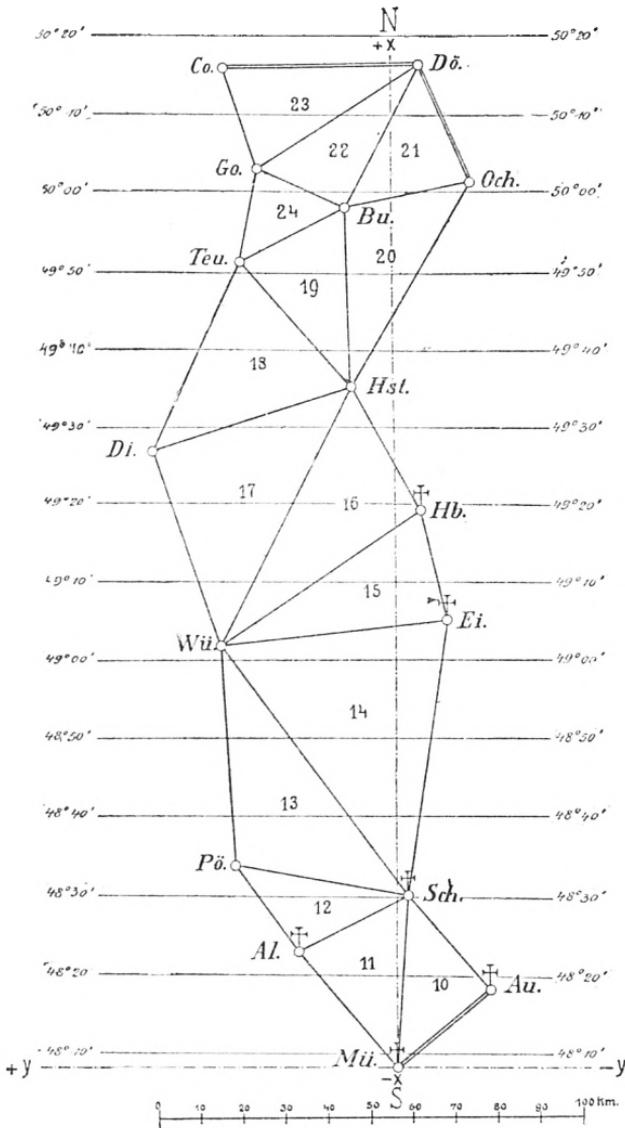
das ist 2,6 mm pro km = 1 : 385 000.

Die Meridiankette von München—Aufkirchen bis Coburg—Döbra.

Die mit der Messung der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg ursprünglich verfolgte Absicht ging dahin, eine zuverlässige Probe für die nur einmalige Messung der altbayerischen Grundlinie zu erhalten. Diese Absicht ist bei der Neuberechnung der südbayerischen Dreieckskette im Auge behalten und dahin erweitert worden, daß durch eine dem Hauptdreiecksnetz der Landesvermessung entnommene Kette guter Dreiecke nicht allein eine Verbindung zwischen der altbayerischen und fränkischen Grundlinie, sondern auch eine solche mit den an der Nordgrenze des Landes liegenden Dreiecksseiten Döbra—Ochsenkopf und Coburg—Döbra des sächsischen bzw. thüringischen Hauptdreiecksnetzes hergestellt werden sollte.

Diese im Verlauf des Meridians von München gewählte, aus 15 Dreiecken bestehende „Fränkische Kette“ hat an ihrem südlichen Ende mit der südbayerischen Dreieckskette die beiden Dreiecke Altomünster (*Al*) — München (*Mü*) — Schweitenkirchen (*Sch*) und Aufkirchen (*Au*) — München (*Mü*) — Schweitenkirchen (*Sch*) gemeinsam und steht durch die Seite Dillenberg (*Di*) — Hohenstein (*Hst*) mit dem Basisnetz der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg in Verbindung. An ihrem nördlichen Ende schließt sie sich in der Seite Döbra (*Dö*) — Ochsenkopf (*Och*) an das trigonometrische Netz des Königreichs Sachsen und in der Seite Döbra (*Dö*) — Coburg (*Co*) an das thüringische Dreiecksnetz der K. Preußischen Landesaufnahme an. Die Längen dieser

Fränkische Dreieckskette.



beiden Anschlußseiten sind aus der von A. Nagel bearbeiteten „Veröffentlichung des K. Sächsischen Finanzministeriums über das sächsische Hauptdreiecksnetz“ und aus „Hauptdreiecke VII Teil“ der K. Preußischen Landestriangulation bekannt.

Die in Tabelle IV zusammengestellten Winkel und Seitenlogarithmen der fränkischen Kette sind den in §§ 52 bis 57 des IV. Abschnitts der B. L. V. enthaltenen Ergebnissen der Netzausgleichung der bayerischen Haupttriangulierung entnommen, nur sind hier die Seitenlängen in Bogen- und Metermaß übergeführt. Der Logarithmus der Seite München — Aufkirchen ist unverändert geblieben.

Einer sorgfältigen Nachprüfung ist die Zuverlässigkeit der im Jahre 1807 ausgeführten Messung der 13796,56 m langen fränkischen Grundlinie bei Nürnberg unterzogen worden, die mit einem aus 5 Eisenstangen von je 4 m Länge bestehenden, von Reichenbach in München angefertigten Basisapparate unter der Leitung des Astronomen Professor Schiegg ausgeführt ist.

Zur Abgleichung der mit schneidenförmigen Enden versehenen fünf Meßstangen hatte ein von Lenoir in Paris angefertigter eiserner Meterstab mit dem Zeichen $A \frac{3}{2}$ gedient, dessen Länge nach der von Bouvard unterfertigten Beglaubigung bei zehnmaliger Vergleichung mit dem eisernen Meterprototyp der Pariser Sternwarte nur eine Abweichung von einem Milliontel der ganzen Länge vom richtigen Maße ergab. Der vorgenannte Meterstab ist gegenwärtig im Deutschen Museum in München in der Abteilung „Geodäsie“ unter Inv.-Nr. 1463 aufbewahrt und wurde auf meine Veranlassung im Mai 1910 durch die Kaiserliche Normal-Eichungskommission in Berlin-Charlottenburg mit dem internationalen Meter bei 14°C verglichen. Dabei ist unter Benützung des seinerzeit von Borda gefundenen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 11.56 \mu$ für 1°C ermittelt worden, daß seine Länge nur um 0.5μ größer als das internationale Meter ist und mit diesem daher innerhalb der auf $\pm 3 \mu$ zu schätzenden Messungsgenauigkeit übereinstimmt.

Tabelle IV.

Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Seiten der fränkischen Dreieckskette.

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgegliche- ne Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
10	Mü.	45° 29' 38"09	4.464 7222.8
	Sch.	44 11 32.08	4.454 8006.7
	Au.	90 18 51.93	4.611 5204.7
		180° 00' 2"10	
11	Mü.	43° 36' 51"91	4.462 2190.3
	Al.	76 36 22.96	4.611 5204.7
	Sch.	59 46 47.72	4.560 0387.8
		180° 00' 2"59	
12	Al.	99° 38' 59"99	4.615 7800.3
	Pö.	43 48 25.26	4.462 2190.3
	Sch.	36 32 36.55	4.396 7999.3
		180° 00' 1"80	
13	Pö.	103° 39' 9"81	4.862 0290.3
	Wü.	33 26 57.79	4.615 7800.3
	Sch.	42 53 57.57	4.707 4358.3
		180° 00' 5"17	
14	Sch.	44° 08' 32"86	4.717 9736.3
	Wü.	59 50 31.77	4.811 9273.3
	Ei.	76 01 3.68	4.862 0290.3
		180° 00' 8"31	

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
15	Ei.	83° 53' 43.36	4.747 1357.3
	Wü.	27 42 31.66	4.417 0335.3
	Hb.	68 23 48.41	4.717 9736.3
		180° 00' 3.43	
16	Wü.	28° 58' 10.24	4.531 3274.3
	Hst.	52 45 28.02	4.747 1357.3
	Hb.	98 16 26.49	4.841 6356.3
		180° 00' 4.75	
17	Wü.	44° 41' 44.48	4.688 8687.3
	Di.	88 57 37.14	4.841 6356.3
	Hst.	46 20 44.58	4.701 1524.3
		180° 00' 6.20	
18	Hst.	68° 05' 55.53	4.699 5158.3
	Di.	47 01 51.19	4.596 3922.3
	Teu.	64 52 17.80	4.688 8687.3
		180° 00' 4.52	
19	Hst.	38° 25' 1.59	4.437 7235.3
	Teu.	78 01 17.34	4.634 8059.3
	Bu.	63 33 43.74	4.596 3922.3
		180° 00' 2.67	
20	Hst.	30° 19' 49.15	4.465 9553.3
	Bu.	101 30 30.34	4.753 8112.3
	Och.	48 09 43.63	4.634 8059.3
		180° 00' 3.12	

Dreieck-Nr.	Eckpunkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
21	Bu.	51° 24' 37.69	4.476 9565.3
	Dö.	49 38 25.69	4.465 9053.3
	Och.	78 56 58.80	4.575 8260.3
		180° 00' 2.18	
22	Bu.	91° 20' 44.00	4.647 1106.3
	Go.	58 02 13.99	4.575 8260.3
	Dö.	30 37 4.16	4.354 2093.3
		180° 00' 2.15	
23	Go.	78° 39' 55.11	4.666 4488.3
	Co.	69 41 4.09	4.647 1106.3
	Dö.	31 39 3.53	4.374 9475.3
		180° 00' 2.73	
24	Teu.	52° 50' 10.74	4.354 2093.3
	Go.	74 59 26.26	4.437 7235.3
	Bu.	52 10 24.24	4.350 3512.3
		180° 00' 1.24	

Begründete Bedenken erregte dagegen die in B. L. V., S. 41 bis 45 beschriebene Abgleichung der Meßstangen und die Ermittlung ihrer Ausdehnung durch die Wärme, weil hiebei die Temperaturexension und Formänderung des benützten Mauerkomparators keine Berücksichtigung gefunden haben. Die mit diesem Komparator für ein Temperaturintervall von 7,3 bis 18,3° R ermittelte Ausdehnung der Meßstangen für 1 m und 1° R beträgt 0,007168 P. L. = 0,01617 mm oder 0,01293 mm für 1° C. Dieser auch bei der Temperaturreduktion der Grundlinienmessung verwendete Wert ist wesentlich größer, als die sonst für die Ausdehnung des Schmiedeeisens gebräuchliche Annahme von 0,01375 mm für 1° R oder 0,011 mm für 1° C.

Da die Meßstangen seit ihrer ersten Verwendung im Jahre 1807 unverändert belassen und durch die K. Katasterkommission sorgfältig aufbewahrt worden sind, war es möglich, ihre Temperaturexstension neuerdings zu bestimmen. Im Januar 1910 ist diese Bestimmung auf dem Viermeterkomparator des geodätischen Instituts der Technischen Hochschule für das Temperaturintervall von 0° bis 21° mit Hilfe zweier Glaskeile durchgeführt worden und hat für die fünf Stangen für 1° C die völlig normalen Werte ergeben:

I	II	III	IV	V	Mittel
$\alpha = 11.4$	10.9	11.3	10.9	11.1	11.12 μ .

Bei diesen Messungen blieb die Temperatur des Komparators unverändert und betrug mit geringen Schwankungen 21° C, während die Temperatur der Eisenstangen durch Einlegen derselben in einen mit schmelzendem Schnee gefüllten Holzkasten von der Zimmertemperatur von 21° auf 0° vermindert und nach dem Herausnehmen durch längeres Lagern im warmen Zimmer wieder auf 21° erhöht wurde. Die Vergleichung der Stangen bei 0° ist selbstverständlich zwischen zwei Vergleichungen bei 21° vorgenommen worden, deren Mittelwert zur Ableitung der Ausdehnungskoeffizienten benützt wurde.

Die Abweichung des neu ermittelten Wertes $\alpha = 11.12 \mu$ für 1° C oder $= 13.90 \mu$ für 1° R gegen den alten Wert $\alpha = 12.93 \mu$ für 1° C bzw. 16.17μ für 1° R erklärt sich dadurch, daß bei der früheren Koeffizientenbestimmung die Ausdehnung und Formänderung des damals benützten Mauerkomparators keine Berücksichtigung gefunden haben.

Um diese Fehlerquelle näher zu untersuchen, ist unter Einführung des neuen Koeffizienten aus den B. L. V., S. 43 angegebenen Beobachtungswerten die Ausdehnung des Mauerkomparators rechnerisch bestimmt worden. Sie fand sich mit negativem Vorzeichen, was darauf hindeutet, daß bei steigender Wärme die Komparatorlänge bzw. die lichte Weite der Mauernische, an deren beiderseitigen Vorderkanten die Komparatorenden befestigt waren, geringer geworden ist. Eine Erschei-

nung, deren Auftreten durch die Wärmeausdehnung des die Nische seitlich begrenzenden Mauerwerkes bedingt erscheint.

Nach Angabe B. L. V., S. 44 wurde die Länge der Meßstangen mehrmals bei fast konstanter Temperatur von im Mittel $11,4^{\circ}$ R mit dem Normalmeter von Lenoir abgeglichen und hiebei unter Annahme einer Ausdehnung von $16,17 \mu$ für 1 m und 1° R die Lagenlänge ermittelt

$$L_0 = 20,000\ 0482 \text{ m bei } 0^{\circ}$$

$$L_{13} = 20,004\ 2522 \text{ m bei } 13^{\circ} \text{ R.}$$

Ersetzt man den dabei verwendeten zu großen Ausdehnungskoeffizient durch den neu bestimmten Wert von 13,90 für 1° R, indem man zunächst die vorstehenden beiden Werte der Lagenlänge mit dem Koeffizient 16,17 auf die mittlere Vergleichstemperatur $11,4^{\circ}$ R zurückführt, so erhält man die Lagenlänge bei $11,4^{\circ}$ R übereinstimmend zu

$$L_{11,4} = 20,003\ 7348$$

und hieraus mit dem neuen Koeffizienten 13,90 die Lagenlänge bei 0°

$$L'_0 = 20,000\ 5657 \text{ m.}$$

Der Unterschied gegen den Wert der B. L. V. beträgt $517,5 \mu$, das sind $25,9 \mu$ pro Meter oder 112,4 Einheiten der 7 Logarithmenstelle, um welche der Logarithmus der fränkischen Grundlinie zu vergrößern ist, wenn die neue Lagenlänge zu Grunde gelegt wird.

Zugleich mit den Ausdehnungskoeffizienten sind auch die Längen der fünf Meßstangen auf dem Viermeterkomparator des geodätischen Instituts neu bestimmt worden und zwar durch Abgleichen mit vier eisernen Meterstäben des Instituts, welche schneidenförmige Enden besitzen und die Bezeichnung

$$C, D, \frac{5}{00} 1, \frac{5}{00} 2$$

tragen.

Die Abstände der Mitten der Endschnitten dieser im Dezember 1900 durch die Kaiserliche Normal-Eichungskommission geprüften Stäbe besitzen die Werte

$$\text{Stab } C = 1 \text{ m} + 0,01 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } D = 1 \text{ m} - 0,02 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } \frac{5}{00} 1 = 1 \text{ m} - 0,03 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } \frac{5}{00} 2 = 1 \text{ m} - 0,07 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm.}$$

Bei der Vergleichung mit den 5 Meßstängen des Basisapparates wurden diese 4 Stäbe auf dem Viermeterkomparator hintereinander gereiht und der Unterschied ihrer Gesamtlänge gegen die einzelnen Meßstängen mit zwei Glaskeilen bestimmt und zwar einmal bei 0° und zweimal bei 21° C Stangentemperatur.

Die auf 0° reduzierten Lagenlängen sind

$$20,000\ 418 \text{ m aus der Vergleichung bei } 0^{\circ}$$

$$20,000\ 426 \text{ m " " " " } 21^{\circ}$$

$$20,000\ 391 \text{ m " " " " } 21^{\circ}$$

$$\underline{20,000\ 412 \text{ m im Mittel bei } 0^{\circ}.$$

Die von dem Fehler des Ausdehnungskoeffizienten befreite Lagenlänge hat nach der Vergleichung vom Jahre 1807 den Wert 20,000482 m. Der Unterschied der beiden letzten Werte beträgt für die einzelne Meßstangenlänge von 4 m nur 14μ und liegt innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Vergleichung, da die Unsicherheit der Gesamtlänge der vier hintereinander gereihten Meterstäbe auf $10\sqrt{4} = 20 \mu$ zu schätzen ist.

Als endgültiger Wert der Lagenlänge kann das Mittel aus der älteren und neueren Bestimmung = 20,000447 m genommen werden.

Beachtenswert ist noch, daß die beiden in einem Zeitintervall von über 100 Jahren unter Verwendung der gleichen Maßeinheit ausgeführten Bestimmungen der Lagenlänge eine geringe Verkürzung der Meßstängen von 3.5μ für ein Meter erkennen lassen, die allerdings so gering ist, daß über ihre Reellität Zweifel bestehen können.

Es ist nun noch der Einfluß des verändert gefundenen Wertes des Ausdehnungskoeffizienten der Meßstängen auf die Berechnung der Grundlinienlänge in Betracht zu ziehen.

Die Folge der Anwendung eines zu großen Temperaturkoeffizienten ist offenbar die, daß die Stangenlängen bei den an den Thermometern abgelesenen Messungstemperaturen zu groß erhalten wurden. Dieser Vergrößerung entspricht für die Länge l , die mittlere Stangentemperatur t_m und den Unterschied $(\alpha - \alpha')$ des unrichtigen und richtigen Ausdehnungskoeffizienten die Verbesserung

$$v = -l \cdot t_m (\alpha - \alpha').$$

Um die mittlere Stangentemperatur bei der Grundlinienmessung zu finden, ist aus den damals geführten Tagebüchern die Zahl der annähernd gleiche Temperaturen zeigenden Stangenlagen festgestellt und mit Einführung dieser Zahlen als Gewichtskoeffizienten das allgemeine Temperaturmittel $t_m = 13,9^\circ \text{R}$ berechnet worden.

Läßt man ferner den mit dem neu ermittelten Ausdehnungskoeffizienten berechneten Wert der Lagenlänge als richtig gelten, so ergibt sich ein weiterer Fehler der 1807 ausgeführten Basisberechnung durch die Verwendung der B. L. V., S. 45 angeführten Reduktionstafel, aus welcher nur die der damaligen Vergleichstemperatur $t_0 = 11,4^\circ \text{R}$ entsprechenden Stangenlängen richtig zu entnehmen sind. Die Fehler der für alle anderen Temperaturen in der Tabelle angegebenen Stangenlängen sind den Temperaturdifferenzen $t - t_0$ proportional. Man erhält somit durch Beifügen des Faktors $(t - t_0)$ die aus dem Zusammenwirken beider Fehler folgende Gesamtverbesserung der gemessenen Länge l

$$v = -l(t - t_0)(\alpha - \alpha').$$

Setzt man in dieser Gleichung

$l = 1 \text{ m}$, $t = t_m = 13,9$, $t_0 = 11,4$, $\alpha = 16,17$, $\alpha' = 13,90 \mu$,
so wird

$$v = -2,5 \times 2,27 = -5,7 \mu \text{ pro Meter}$$

oder $= -24,74$ Einheiten der 7. Logarithmenstelle der gemessenen Länge l ,

das ist $-5,7 \text{ mm pro km}$ oder $= 1 : 175\,000$.

Die mit Rücksicht auf die vorerwähnten beiden Fehler verbesserten Logarithmen der aus der fränkischen Grundlinie hergeleiteten Dreiecksseiten ergeben sich somit in der einfachsten Weise durch Hinzufügen der Verbesserung

$$- 24.7 \times 10^{-7}.$$

Für die Anschlußseite *Dö—Och* der fränkischen Kette an das Dreiecksnetz des Königreichs Sachsen hat man somit nach Tabelle IV

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Och = 4.476\ 9565.3 - 24.7 = 4.476\ 9540.6 \text{ (bayer.)}.$$

Der für diese Seite in der Veröffentlichung Nagels, S. 659 angegebene Wert bedarf noch einer Zurückführung auf den vom sächsischen Dreieckspunkt Ochsenkopf 22,26 m entfernten bayerischen Punkt gleichen Namens, welche mit den in Tafel V des Nagelschen Werkes angegebenen Zentrierungselementen leicht und sicher ausgeführt werden kann. Man erhält nach Durchführung dieser Rechnung den Wert

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Och = 4.476\ 9552.2 \text{ (sächs.)}.$$

Nach Helmert, Längengradmessung Heft I, S. 239 ist zur Umwandlung in internationales Maß noch ein Zuschlag von $+ 50.4 \times 10^{-7}$ erforderlich und man erhält hierauf, für die Seite *Dö—Och* die logarithmische Anschlußdifferenz

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_s = - 62.0 \times 10^{-7}.$$

Für die zweite Anschlußseite Coburg—Döbra ist

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Co = 4.666\ 4488.3 - 24.7 = 4.666\ 4463.6 \text{ (bayer.)}.$$

In K. Preußische Landestriangulation, Hauptdreiecke VII. Tl. S. 71 findet sich für die mit der bayerischen Dreiecksseite vollkommen identische preußische Seite Coburg—Döbra

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Co = 4.666\ 4464.3 + 54.9 = 4.666\ 4519.2 \text{ (preuß.)}.$$

wenn die in Helmert, Längengradmessung Heft I, S. 240 hergeleitete Verbesserung für internationales Maß von $+ 54.9$ hinzugefügt wird.

Man erhält somit für die Seite Coburg—Döbra die logarithmische Anschlußdifferenz

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_p = - 55.6 \times 10^{-7},$$

also im Mittel für beide Anschlußseiten

$$-\frac{62.0 + 55.6}{2} = - 58.8 \times 10^{-7}.$$

Der Anschlußwiderspruch zwischen der altbayerischen und fränkischen Grundlinie kommt in der Netzausgleichung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes in Polygon XII zum Ausdruck durch die Seitengleichung *I* (B. L.V, S. 393)

$$1 = \frac{\sin WH \cdot \sin EHW \cdot \sin DEW \dots}{\sin AS \cdot \sin WEH \cdot \sin WeDE \dots} = \frac{Z}{N},$$

in welcher mit den Sinuswerten der beobachteten und auf der Station ausgeglichenen Dreieckswinkeln

$$\text{Lg } Z - \text{Lg } N = + 30.04 \times 10^{-7}$$

wird.

Bringt man am Log. der Seite *WH*, der aus der fränkischen Grundlinie abgeleitet ist, die Verbesserung -24.7×10^{-7} und am Log. der aus der oberbayerischen Grundlinie berechneten Seite *AS* die für diese geltende Verbesserung $+ 57.7 \times 10^{-7}$ an, so erhält man den neuen Widerspruch

$$\text{Lg } Z' - \text{Lg } N' = - 54.9 \cdot 10^{-7},$$

welcher, wenn die altbayerische Grundlinienmessung als fehlerfrei angenommen wird, der Ungenauigkeit der Messung der fränkischen Grundlinie und den Fehlern der Winkelmessung der fränkischen Dreieckskette zuzuschreiben ist, wobei der mittlere Fehler der Winkelmessung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes nach Ferreros Bericht über die Triangulationen in den Erdmessungsverhandlungen vom Jahre 1898, Bd. II, S. 31 zu ± 1.778 angenommen wurde.

Mit diesem Winkelfehler kann man auch den Längenübertragungsfehler zwischen der fränkischen und südbayerischen Kette gemeinsamen Anschlußseite Altomünster—Schweiten-

kirchen und der dem Basisnetz der fränkischen Grundlinie angehörenden Seite Dillenberg—Hohenstein berechnen und erhält als logarithmischen Längenübertragungsfehler $\pm 103 \times 10^{-7}$.

Für den Teil der Kette von dieser Seite bis zum sächsisch-thüringischen Anschluß findet sich der entsprechende Fehler zu

$$\pm 85.8 \cdot 10^{-7}.$$

Um sichere Anhaltspunkte bezüglich der Genauigkeit der Längenmessung mit dem Reichenbachschen Basisapparat zu gewinnen, hat der ehemalige Assistent des geodätischen Instituts der Technischen Hochschule in München, Dr. Otto Decher, im Winterhalbjahr 1880/81 mit diesem Apparat die rund 160 m betragende Länge einer im Hofraum der Technischen Hochschule in ihren Endpunkten mit zwei 6 m tief gegründeten massiven Steinfeilern von 1 m Mittelstärke versicherten Linie 10 mal, bei verschiedenen zwischen -4° und $+16^{\circ}$ R liegenden Temperaturen gemessen.

Die Ergebnisse dieser Messung sind jetzt mit dem neu ermittelten Ausdehnungskoeffizienten der Eisenstangen 11.12μ für 1 m und 1° C neu berechnet worden und haben den mittleren unregelmäßigen Fehler einer einmaligen Messung zu 1 : 180 000 oder ± 24.1 Einheiten der 7. Logarithmenstelle ergeben.

Das starke Überwiegen des Längenübertragungsfehlers über den Längenmessungsfehler ist der geringen Genauigkeit der Winkelmessung, infolge deren Dreiecksschlußfehler bis zu 5'' vorkommen, zuzuschreiben. Es sollten daher, bevor eine weitere Verwertung der fränkischen Grundlinienmessung stattfinden kann, in ähnlicher Weise, wie das bei der südbayerischen Dreieckskette geschehen ist, die Dreieckswinkel der fränkischen Kette mit größerer Genauigkeit neu gemessen werden.