Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1939. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Linear-ordnungssinguläre Punkte ebener und räumlicher Bogen.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von Herrn H. Tietze in der Sitzung vom 7. Oktober 1939

1. Fragestellung und Ergebnisse.

1, 1. In einer allgemeinen Theorie geometrischer Ordnungen[1] spielen neben den ordnungshomogenen[2] Teilen des betrachteten Gebildes $\mathfrak{G}$ die (ordnungs-) singulären Punkte von $\mathfrak{G}$, kürzer (Ordnungs-) Singularitäten, eine Rolle. Es ist[3] dabei $\mathfrak{G}$ gleich der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{H}}$ der (in $\mathfrak{G}$ offenen) Summe $\mathfrak{H}$ aller ordnungshomogenen Teile von $\mathfrak{G}$, also $\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{G}$; und $\mathfrak{S} = \mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ ist die Menge aller ordnungssingulären Punkte von $\mathfrak{G}$. Wegen der Offenheit von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ und wegen $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{H}}$ bilden *die ordnungssingulären Punkte von* $\mathfrak{G}$ *eine in* $\mathfrak{G}$ *nirgends dichte, abgeschlossene Menge.*

1, 2. Ist eine bestimmte Klasse $\mathfrak{k}$ von Gebilden $\mathfrak{G}$ vorgegeben und ist für diese $\mathfrak{G}$ eine bestimmte Ordnung festgelegt, so erhebt sich die Frage nach den Ordnungen der auf den $\mathfrak{G}$ wirklich vorkommenden Singularitäten. Diese Frage soll nachstehend für den Fall beantwortet werden, daß als Klasse $\mathfrak{k}$ die der *Bogen*[4] im *(euklidischen) zwei- bzw. dreidimensionalen Raume* R_2 *bzw.* R_3 zugrunde liegt und als *Ordnung die lineare*, bei welcher also die

---

[1] Vgl. Haupt, Geometrische Ordnungen, Jahresber. d. d. Math.-Vereinig. 49 (1939) S. 190 ff.

[2] Das sind solche Teile, deren sämtliche Punkte die nämliche Ordnung besitzen. Dabei versteht man unter der Ordnung eines Punktes das Minimum der Ordnungen seiner Umgebungen.

[3] Vgl. Fußn. 1 a. a. O.

[4] Unter Bogen wird, was für unsere Zwecke hier ausreicht, ein topologisches Streckenbild verstanden.

Geraden bzw. die Ebenen als Ordnungscharakteristiken[5] figurieren. Und zwar wird sich ergeben (vgl. Nr. 2, 1 ff.):

Die linearen Ordnungen der Singularitäten auf ebenen bzw. Raumbogen können alle ganzzahligen Werte $k \geq 3$ bzw. $k \geq 4$ annehmen.

Die Singularitäten endlicher (aber nicht beschränkter[6]) bzw. unendlicher Ordnung sind in vorstehende Aussage einbezogen, sollen aber, weil leicht zu verwirklichen, im folgenden nicht weiter besprochen werden.

1, 3. Für die *ebenen* Bogen werden wir weitergehend Folgendes zeigen. Wie am Schlusse von Nr. 1, 2 erwähnt, liegt die abgeschlossene Menge der Ordnungssingularitäten nirgends dicht auf dem Bogen. Nun ist jeder Bogen beschränkter linearer Ordnung rektifizierbar,[7] so daß z. B. das Lebesguesche Maß von Punktmengen auf dem Bogen definiert ist. Da die (nirgends dichten) Singularitätenmengen abgeschlossen, also meßbar (im Sinne von Lebesgue) sind, so liegt die Frage nahe, ob *die Singularitätenmenge $\mathfrak{S}$ auf dem Bogen beliebig vorgeschriebenes Lebesguesches Maß besitzen kann.*

Diese Frage werden wir in bejahendem Sinne beantworten und dabei sogar die weitergehende Forderung erfüllen, daß *die Singularitätenmenge $\mathfrak{S}$ perfekt* ist und daß *jeder singuläre Punkt die gleiche, beliebig vorgeschriebene Ordnung $k \geq 4$ besitzt wie der ganze Bogen.* (Vgl. Nr. 2, 1, 1 ff.)

1, 4. Das am Schlusse von Nr. 1, 3 angeführte Ergebnis läßt erkennen, daß, unter den dort an die Singularitätenmenge $\mathfrak{S}$ gestellten Forderungen, die Ordnung $k = 3$ nicht auftritt. Dies hat

---

[5] Die lineare Ordnung des Bogens $\mathfrak{B}$ ist die maximale Mächtigkeit (falls vorhanden) des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit den Geraden bzw. Ebenen. Enthält der Bogen Strecken bzw. ebene Bogen, so kann man die Ordnung als maximale Anzahl der Komponenten des Durchschnittes von Bogen und Gerade bzw. Ebene erklären; indes kommt dieser Fall bei unseren Konstruktionen im folgenden nicht in Betracht.

[6] Wenn nämlich die Mächtigkeiten der einzelnen Durchschnitte von Bogen und Gerade bzw. Ebene zwar endlich aber nicht beschränkt sind.

[7] A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930) S. 67 ff.

folgenden Grund: Erstens ist jeder *ebene* Bogen der linearen Ordnung Drei darstellbar[8] als Summe von endlich vielen (genauer von höchstens vier) Bogen zweiter Ordnung. Zweitens sind die Bogen zweiter Ordnung ordnungshomogen (von endlicher Ordnung).[9] Demgemäß liegt ein Punkt dritter Ordnung nie im Innern eines ordnungshomogenen Bogens, ist also singulär; und andrerseits kann er nicht Häufungspunkt von irgendwelchen Singularitäten sein, weil ein Bogen dritter Ordnung ja nur endlich viele Singularitäten besitzt. Beachtet man, daß die Singularitätenmenge $\mathfrak{S}$ in Nr. 1, 3 perfekt, daß also jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ Häufungspunkt sein soll (oder daß sie positives Maß besitzen kann), so sieht man: Jede einem solchen $\mathfrak{S}$ angehörige Singularität muß von mindestens vierter Ordnung sein. Zur Abkürzung bezeichnen wir einen Punkt P des Bogens $\mathfrak{B}$ als (ordnungs-) elementar, falls eine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ existiert, welche Summe zweier, in P zusammenstoßender ordnungshomogener Bogen ist. Alsdann läßt sich, unter Rücksicht auf die Angaben in Nr. 1, 3, sowie auf das soeben Bewiesene, folgendes sagen:

I. *Auf ebenen Bogen ist jeder Punkt, welcher die Ordnung Drei besitzt, (singulär und zugleich) elementar.*

II. *Hingegen gibt es sowohl elementare als nicht-elementare Punkte vierter Ordnung.* (Jeder solche Punkt ist singulär.[10])

III. *Jeder Punkt von mindestens fünfter Ordnung ist nicht-elementar* (und singulär[10]).

Anmerkung. Man kann auch nach solchen Singularitäten einer beliebig vorgegebenen Ordnung $k \geq 4$ fragen, für welche der

---

[8] Vgl. z. B. die Angaben in Haupt, Über die Krümmung ebener Bogen endlicher Ordnung, Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Sozietät zu Erlangen 71 (1939) S. 219 ff., Fußn. 5.

[9] Abgesehen von den Strecken sind die (keine Strecken enthaltenden) Bogen zweiter Ordnung die einzigen linear-ordnungshomogenen ebenen Bogen von endlicher Ordnung. Vgl. Haupt, a) Über die Struktur reeller Kurven, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 164 (1931) S. 50 ff. — b) Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen, I. Mitt., Journ. f. d. r. u. angew. Math. 178 (1937) S. 14 ff.; II. Mitt., ebenda 180 (1939) S. 44 ff.

[10] Da die Bogen zweiter Ordnung die einzigen linear-ordnungshomogenen (nicht-trivialen) von endlicher Ordnung sind (vgl. Fußn. 9), kann ein Punkt von höherer als zweiter, aber endlicher Ordnung nicht im Innern eines ordnungshomogenen Bogens liegen, ist also singulär.

singuläre Punkt P auf dem einen bzw. dem anderen der beiden, in P zusammenstoßenden Teilbogen (elementarer oder) nichtelementarer (End-) Punkt der Ordnung r bzw. t ist; dabei soll r mit $0 \leq r \leq k$ beliebig wählbar sein, ebenso t soweit noch möglich ($r = 0$ bzw. $r = 1$ entspräche dem Fall, daß P Endpunkt eines Bogens ist (Punkt einseitiger Ordnung) bzw. daß der eine Teilbogen eine Strecke ist). Insbesondere kann $t = k - r$ gefordert werden. Die Konstruktion auch solcher Singularitäten dürfte mittels unserer Verfahren gleichfalls gelingen.

1, 5. Ebenfalls für die ebenen Bogen werden wir schließlich die Frage behandeln, ob die Eigenschaft des Bogens, in den singulären Punkten eine *stetige* (und *sogar scharfe*) *bzw. unstetige Tangente*[11] zu besitzen, unabhängig ist von den an die Singularitätenmenge in Nr. 1, 3 gestellten Forderungen. Auch diese Frage wird sich im folgenden (Nr. 2, 1, 1 ff.) in bejahendem Sinne beantworten.

1, 6. Was die *Raumbogen* anlangt, so werden die von uns konstruierten Singularitäten speziell auf sphärischen (d. h. auf der Kugeloberfläche verlaufenden) Bogen liegen, aber ebenfalls nicht-elementar sein, d. h. keine Umgebung eines solchen singulären Punktes auf dem Bogen ist darstellbar als Summe endlich vieler ordnungshomogener Bogen. Nun gilt für Raumbogen vierter (linearer) Ordnung der dem Satze über ebene Bogen dritter Ordnung entsprechende:[12] Jeder (von ebenen Teilbogen freie) Raumbogen vierter Ordnung ist Summe beschränkt vieler Bogen

---

[11] Jeder Bogen endlicher Ordnung besitzt in jedem Punkte eine eindeutig bestimmte vordere und hintere (Halb-) Tangente. Vgl. z. B. die Angaben bei I. Sauter, Zur Theorie der Bogen n-ter Realitätsordnung im projektiven R_n, I. Mitt., Math. Zeitschr. 41 (1936) S. 519. — Der Bogen $\mathfrak{B}$ besitzt im Punkte P eine scharfe Tangente, wenn der Limes aller Sehnen durch zwei sich auf P zusammenziehende Punkte von $\mathfrak{B}$ existiert. Die Existenz der scharfen Tangente ist gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Tangente und dem Fehlen von Spitzen. Vgl. z. B. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, II, Berlin 1938, S. 62.

[12] Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Ann. 108 (1933) S. 126 ff.; vgl. auch O. Delvendahl, Über Kurven beschränkter Ordnung (Neue deutsche Forschungen, Abt. Mathematik), Berlin 1938.

dritter Ordnung. Ferner gilt,[13] jedenfalls für Raumbogen, die auf einer stetig differenzierbaren konvexen Oberfläche liegen: Die einzigen (nicht ebenen) ordnungshomogenen Bogen endlicher Ordnung sind die Bogen dritter Ordnung. Wir haben daher:

I. *Auf jedem Bogen im R_3 ist jeder Punkt der linearen Ordnung Vier (singulär und zugleich) elementar.*

II. *Hingegen gibt es sowohl elementare als nicht-elementare Punkte der Ordnungen Fünf und Sechs.*[14]

III. *Jeder Punkt von mindestens siebenter Ordnung ist nicht elementar (und singulär), jedenfalls dann, wenn er einem, auf einer stetig differenzierbaren konvexen Oberfläche verlaufenden Bogen angehört; unter dieser Annahme ist jeder Punkt von mindestens vierter Ordnung singulär.*[15]

1. *Anmerkung.* Die Aussage I gilt, mutatis mutandis, allgemein für Bogen im R_n mit $n \geq 4$. Aber auch die Aussage II läßt sich vermutlich durch Konstruktion entsprechender Beispiele sicherstellen.[14] Doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden, ebensowenig wie auf die Verallgemeinerung der Aussage III.

2. *Anmerkung.* (Nicht-elementare) Punkte P der *Linear*ordnung 6 bzw. 4 auf *ebenen* Bogen $\mathfrak{B}$ mit in P unstetiger Tangente wurden von uns[16] bzw. von Herrn Marchaud[17] angegeben (dabei ist P speziell Endpunkt von $\mathfrak{B}$, also P von einseitiger Ordnung). Einzelne Punkte von jeder beliebig vorgeschriebenen Linearordnung $k \geq 4$ auf ebenen Bogen wurden unseres Wissens bisher

---

[13] Vgl. Fußnote 9, a. a. O. b).

[14] Bezüglich der Ordnungen elementarer Singularitäten vgl. F. Denk, Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n, Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Soz. zu Erlangen 67 (1935) S. 1 ff.

[15] Jeder nicht-elementare Punkt ist (zufolge seiner Definition) singulär. Ein elementarer Punkt der Ordnung k ist nur dann notwendig singulär, wenn keine ordnungshomogenen Bogen der Ordnung k existieren.

[16] Haupt, Über Kurven endlicher Ordnung, Math. Zeitschr. 19 (1924) Nr. 20. Das dort benutzte Verfahren (vgl. den Hinweis auf Hjelmslev a. a. O. Nr. 20) liefert leicht auch Punkte z. B. von einseitiger 4. Ordnung sowohl mit stetiger als mit unstetiger Tangente. Vgl. auch: Über Kontinua von beschränkter Ordnung, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1931, S. 53.

[17] Vgl. Fußn. 7, a. a. O., S. 95.

nur in einer nicht veröffentlichten, von Herrn J. Gumbrecht angefertigten Prüfungsarbeit konstruiert,[18] in welcher aber die Frage nach der Stetigkeit der Tangente nur gestreift, die nach der Verteilung auf perfekte Mengen (positiven Maßes) nicht berührt wird; gerade das Eingehen auf diese letzteren Fragen macht im Nachfolgenden andersartige Konstruktionen erforderlich (vgl. Nr. 2, 1, 2, 1). Ferner hat Herr Gumbrecht uns seinerzeit die Skizze einer Konstruktion für ebene Bogen mit einer (nicht elementaren) Singularität der zyklischen[19] Ordnung $k = 5$ bzw. $k = 2j + 1$ mitgeteilt; von dieser Konstruktion ist die von uns entwickelte, nachstehend (Nr. 2, 2) angedeutete Konstruktion wesentlich verschieden und führt insbesondere allgemein, d. h. für jedes (auch gerades) $k \geq 5$, zum Ziel.

2. Zur Konstruktion der gesuchten Bogen.

2, 1. Den Konstruktionen bei *ebenen* Bogen sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. Unter einer *Paratingente* q-ter Ordnung an den Bogen $\mathfrak{B}$ im Punkte Q verstehe man[20] jeden Limes einer Folge von Geraden g_ν, wenn mit einer beliebig kleinen Umgebung von Q auf $\mathfrak{B}$ schließlich alle g_ν mindestens q Punkte gemeinsam haben und (gleichzeitig) unendlich viele der g_ν auch genau q Punkte. Mit dieser Bezeichnung gilt, wie leicht zu sehen:

Ist $\mathfrak{B}$ von der Ordnung $k \geq 2$ und ist P ein Punkt der gleichen Ordnung k auf $\mathfrak{B}$, so hat $\mathfrak{B}$ mit jeder Paratingente k-ter Ordnung an $\mathfrak{B}$ in P diesen Punkt P und außerdem höchstens Stützpunkte gemeinsam. Und zwar wird $\mathfrak{B}$ in P von dieser Paratingente geschnitten oder gestützt, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Insbesondere ist für gerades k jede Paratingente k-ter Ordnung Stützgerade an die konvexe Hülle des ganzen Bogens (da unsere Bogen die Paratingente nicht schneiden dürfen und da sie beschränkt sind).

---

[18] Nach dem in Fußn. 16 zitierten Verfahren.

[19] Bei der zyklischen Ordnung liegen die Kreise (einschließlich der Geraden) als Ordnungscharakteristiken zugrunde (nicht die Geraden allein, wie bei der linearen Ordnung). Vermöge stereographischer Projektion entsprechen sich lineare Ordnung bei sphärischen Bogen und zyklische Ordnung bei ebenen.

[20] Nach G. Bouligand. Vgl. z. B. dessen Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.

Falls $\mathfrak{B}$ in P eine scharfe Tangente[11] besitzt, ist diese die einzige Paratingente (jeder Ordnung r mit $2 \leq r \leq k$). Also:

Besitzt der Bogen $\mathfrak{B}$ der Ordnung k im Punkte P der gleichen Ordnung k eine scharfe Tangente $\mathfrak{t}$, *so ist* $\mathfrak{t}$ *Wendetangente in P bzw. Stützgerade der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}$ (mit P als einem Stützpunkt) je nachdem k ungerade oder gerade ist.*

2, 1, 1. *Gerade Ordnung und stetige (scharfe) Tangente.* Aus der Bemerkung in Nr. 2, 1 wird man als Richtlinie für die Konstruktion eines, scharfe Tangente besitzenden Bogens $\mathfrak{B}$ gerader Ordnung $2j$ mit einer perfekten Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten der gleichen Ordnung $2j$ entnehmen: Zweckmäßigerweise wird man von einem (stetig) differenzierbaren Konvexbogen $\mathfrak{K}$ mit einer auf ihm (beliebig vorgegebenen) nirgends dichten, perfekten Menge $\mathfrak{P}$ (auch positiven Maßes) ausgehen, um bei festgehaltener $\mathfrak{P}$ durch geeignete „Einbeulung von $\mathfrak{K}$ nach innen" den gewünschten Bogen $\mathfrak{B}$ herzustellen. Genau nach dieser Vorschrift verläuft eine von uns kürzlich zu etwas anderen Zwecken für den Fall $2j = 4$ angegebene Konstruktion.[21] Und diese liefert auch für beliebiges $j \geq 2$ fast unmittelbar Bogen der gewünschten Art. Man braucht nämlich (vgl. E. B. Nr. 3) nur den (durch „Einbeulung" von $\mathfrak{K}$ entstehenden) Bogen $\mathfrak{N}$, durch welchen der „Lückenbogen" $\mathfrak{L}$ (auf $\mathfrak{K}$) ersetzt werden soll,[22] folgendermaßen zu konstruieren: Man wähle auf $\mathfrak{L} = \widehat{AB}$ die Punkte S_1 und S_{j+1} beliebig, wobei aber S_1 zwischen A und S_{j+1} liegen soll. Durch S_1 ziehe man die Parallele p_1 zur Tangente t_b' an $\mathfrak{K}$ in B', unter $\widehat{A'B'}$ einen passend und hinreichend klein gewählten (vgl. E. B.), den $\widehat{AB}$ in seinem Innern enthaltenden, Teilbogen von $\mathfrak{K}$ verstanden. Es sei M_1 der Schnittpunkt von p_1 mit der Sehne $\overline{AB}$. Auf der Strecke $\overline{M_1 S_1}$ wähle man jetzt einen Punkt M_1' so, daß die Verbindungsgerade von A und M_1' den $\mathfrak{L}$ in S_2 zwischen S_1 und S_{j+1} trifft. Es sei nun schon S_i auf $\mathfrak{L}$ zwischen S_{i-1} und

[21] In der in Fußn. 8 angegebenen Arbeit, auf die wir im folgenden abgekürzt mit „E. B." verweisen. In E. B. ist $\mathfrak{K}$ als Kreisbogen $y = f(x) = \left|\sqrt{1 - x^2}\right|$, $-2^{-1} \leq x \leq 2^{-1}$, gewählt.

[22] Die Menge $\mathfrak{P}$ wird bekanntlich erzeugt durch Herausnahme von abzählbar vielen, offenen Teilbogen aus $\mathfrak{K}$, die als „Lückenbogen" bezeichnet sein mögen.

S_{j+1} konstruiert ($1 \leq i < j$; $S_0 = A$). Die Parallele p_i zu t_b' durch S_i treffe $\overline{AB}$ bzw. $\overline{S_1 S_{j+1}}$ in M_i bzw. S_i'. Auf $\overline{S_i M_i}$ sei M_i' so gewählt, daß die Verbindungsgerade von A mit M_i' den Kreisbogen $\mathfrak{L}$ zwischen S_i und S_{j+1} in S_{i+1} trifft. Durch Induktion gelangt man so zu einem Bogen $\mathfrak{N}' = \widehat{AS_1} + \overline{S_1 M_1'} + \overline{M_1' S_2} + \overline{S_2 M_2'} + \ldots + \overline{M_{j-1}' S_j} + \widehat{S_j B}$, wobei $\widehat{AS_1}$ bzw. $\widehat{S_j B}$ die Kreisbogen mit den Endpunkten A und S_1 bzw. S_j und B bezeichnen. Wird dann $\mathfrak{N}'$ hinsichtlich der bei S_i, M_i' auftretenden Ecken passend abgerundet, so entsteht ein mit scharfer Tangente versehener Bogen $\mathfrak{N}$, welcher A mit B verbindet, in der konvexen Hülle von $\mathfrak{K}$ verläuft und die Ordnung $2j$ (sowie keine Teilstrecken) besitzt. Ersetzt man jeden der abzählbar vielen Lückenbogen entsprechend durch einen derartigen Bogen $\mathfrak{N}$, so liefert die abgeschlossene Hülle der Summe dieser $\mathfrak{N}$ einen mit scharfer Tangente versehenen Bogen der Ordnung $2j$ mit $\mathfrak{P}$ als Menge von Punkten der Ordnung $2j$. (Beweis wie in E. B. Nr. 3 und 4. Übrigens besitzt unser Bogen in den Punkten von $\mathfrak{P}$ keine zweite Ableitung, vgl. E. B.)

2, 1, 1, 1. *Gerade Ordnung und unstetige Tangente.*

Durch geringe Abänderung des in Nr. 2, 1, 1 beschriebenen Verfahrens erhält man auch Bogen $\mathfrak{B}$ der Ordnung $2j$ mit (beliebig) vorgeschriebener (nirgends dichter, perfekter) Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten der Ordnung $2j$ derart, daß $\mathfrak{B}$ *in jedem Punkte eine Tangente besitzt*, daß diese aber in den Punkten von $\mathfrak{P}$ unstetig ist. Man braucht nur (vgl. Nr. 2, 1, 1) die Parallelen zur Tangente t_b' zu ersetzen durch Parallele zu einer geeignet gewählten, festen (d. h. für *alle* Bogen $\mathfrak{L}$ gleichen) Richtung, etwa zur Richtung der y-Achse.

2, 1, 2. *Ungerade Ordnung und unstetige Tangente.*

Ähnlich kann man nun auch *Bogen einer jeden ungeraden Ordnung* $k = 2j + 1$ *mit* einer (auf einem Konvexbogen beliebig) *vorgegebenen*, nirgends dichten *perfekten Menge* $\mathfrak{P}$ (sogar positiven Maßes) *von Punkten k-ter Ordnung* und *mit in* $\mathfrak{P}$ *unstetiger Tangente* erhalten: Ausgehend von $\mathfrak{L} = \widehat{AB}$ (vgl. Nr. 2, 1, 1) ziehe man durch den Mittelpunkt M der Sehne $\overline{AB}$ eine Gerade g von passender fester Richtung (etwa der Richtung der y-Achse).

Der Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{L}$ sei S, ferner sei M' der Mittelpunkt von $\overline{SM}$. Man ersetze nun $\overline{SM'}$ durch einen Streckenzug $\mathfrak{S} = \overline{ST_1} + \overline{T_1T_2} + \ldots + \overline{T_{2j}M'}$ derart, daß $T_1, T_3, \ldots, T_{2j-1}$ bzw. $T_2, T_4, \ldots, T_{2j}$ auf der gleichen Seite von g liegen, wie B bzw. A. Ferner sollen die Richtungen aller Teilstrecken von $\mathfrak{S}$ so wenig abweichen von der Richtung von g, daß der Bogen $\mathfrak{N}' = \widehat{AS} + \mathfrak{S} + \overline{M'B}$ bezüglich eines jeden hinter[23] A liegenden Punktes von $\mathfrak{K}$ die (Relativ-) Ordnung Eins besitzt, hingegen bezüglich eines jeden vor[23] B gelegenen Punktes von $\mathfrak{K}$ höchstens die Relativordnung Drei (vgl. auch E. B.). Rundet man die Ecken von $\mathfrak{N}'$ geeignet und hinreichend wenig ab und führt die Konstruktion für alle abzählbar vielen $\mathfrak{L}$ durch, so ergibt sich das Gewünschte. (Durch passende Wahl der festen Richtung von g kann man übrigens erreichen, daß $\mathfrak{B}$ sich einfach auf die x-Achse projiziert.)

2, 1, 2, 1. *Ungerade Ordnung und stetige (scharfe) Tangente.*

Gemäß den Vorbemerkungen (Nr. 2, 1) kann bei einem Bogen ungerader Ordnung $k = 2j + 1$, mit einer perfekten Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten der Ordnung k und mit scharfer Tangente, die Menge $\mathfrak{P}$ nicht mehr (wie in Nr. 2, 1, 1 ff.) auf einem Konvexbogen liegen.[24] Wir werden daher bei der Konstruktion eines derartigen Bogens nicht mehr $\mathfrak{P}$ als festes Gerüst zugrunde legen, sondern $\mathfrak{P}$ mit dem Bogen zugleich aufbauen. Die Feststellungen in Nr. 2, 1 legen es dabei nahe, den Bogen als kartesisches Bild $\mathfrak{B}$ einer eindeutigen, wachsenden, stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, zu konstruieren, deren Ableitung in den Punkten einer, in $0 \leq x \leq 1$ vorgegebenen, nirgends dichten, perfekten Menge $\mathfrak{P}'$ (ev. von positivem Maße) Nullstellen besitzt. Da die Ausführung der Konstruktion den hier verfügbaren Raum überschreiten würde, soll sie an anderer Stelle gebracht und hier nur angedeutet werden. Es sei Q_0 das Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Entsprechend der Erzeugung von $\mathfrak{P}'$ durch schritt-

---

[23] Ein Punkt Q von $\mathfrak{K}$ liegt (auf $\mathfrak{K}$) hinter A bzw. vor B, wenn Q und B durch A bzw. A und Q durch B getrennt werden auf $\mathfrak{K}$.

[24] Die in Nr. 2, 1, 1 angegebene Konstruktion führt indes noch zum Ziel, wenn es sich nur um die Gewinnung eines einzigen singulären Punktes der gewünschten Art im Endpunkt eines Bogens handelt.

weises Wegnehmen abgeschlossener Intervalle (Lückenintervalle) L_{11}; L_{21}, L_{22}; L_{41}, . . ., L_{44}; . . .; aus $0 \leq x \leq 1$ konstruiert man zuerst ein achsenparalleles, in Q_0 enthaltenes Rechteck R_{11}, dessen x-parallele Seiten sich nach L_{11} projizieren und dessen Höhe h_{11} hinreichend groß (in einem bestimmten Sinne) gewählt wird, so daß also die x-parallelen Seiten von R_{11} hinreichend benachbart sind zu $y = 0$ bzw. $y = 1$. Diejenige Diagonale d_{11} von R_{11}, welche positive Steigung besitzt, ist dann eine erste (grobe) Näherung für den in R_{11} unterzubringenden Teilbogen $\mathfrak{N}_{11}$ des zu konstruierenden Bogens $\mathfrak{B}$; dabei soll $\mathfrak{N}_{11}$ mit d_{11} die Endpunkte gemeinsam haben, in ihnen horizontale Tangente besitzen und im übrigen in hinreichender Nähe von d_{11} monoton verlaufen derart, daß seine maximale Steigung diejenige von d_{11} nur hinreichend wenig übertrifft. Man behalte nun von Q_0 lediglich diejenigen beiden (zufolge der Wahl von R_{11} hinreichend flachen) Rechtecke bei, welche durch $0 \leq x \leq a'$, $0 \leq y \leq b'$ bzw. durch $a'' \leq x \leq 1$, $b'' \leq y \leq 1$ gekennzeichnet sind, unter (a', b') bzw. (a'', b'') den linken unteren bzw. rechten oberen Eckpunkt von R_{11} verstanden. Auf jedes dieser beiden Rechtecke wird sodann das gleiche Verfahren angewandt, wie auf Q_0. Die abgeschlossene Hülle der Summe der so sich ergebenden Bogen $\mathfrak{N}_{11}$; $\mathfrak{N}_{21}$, $\mathfrak{N}_{22}$; . . . liefert den gesuchten Bogen $\mathfrak{B}$. Natürlich sind dabei an die $\mathfrak{N}_{ik}$ noch weitere Forderungen, insbesondere auch hinsichtlich ihrer Ordnung zu stellen, die wir aber übergehen müssen.

2, 2. *Punkte vorgegebener Ordnung auf Raumbogen.* Auch die vollständige Beschreibung der Konstruktion solcher Punkte kann nicht hier und soll deshalb an anderer Stelle gegeben werden. Hier mögen nur folgende Andeutungen Platz finden. Es genügt, einen sphärischen (d. h. auf der Kugeloberfläche gelegenen, nicht ebenen) Bogen der geforderten Art zu konstruieren oder, was das Gleiche, einen ebenen Bogen der zyklischen[19] Ordnung $k \geq 5$ mit einer nichtelementaren Singularität der zyklischen Ordnung k. Als Gerüst legen wir zugrunde einen, entsprechend oft differenzierbaren (ebenen) Bogen $\mathfrak{Z}$ der zyklischen Ordnung Drei, z. B. einen Teil eines Ellipsenquadranten. Die Singularität soll dann in denjenigen Endpunkt E von $\mathfrak{Z}$ gelegt werden, welcher dem größten Schmiegkreis (Krümmungskreis) entspricht (längs $\mathfrak{Z}$

ändert sich ja der Halbmesser des Schmiegkreises monoton[25]). Man kann nun zunächst auf $\mathfrak{Z}$ eine Folge von gegen E konvergierenden Punkten P_ν und Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu$ von P_ν finden derart, daß höchstens je drei dieser $\mathfrak{U}_\nu$ von *einem* Kreise getroffen werden. Innerhalb einer jeden $\mathfrak{U}_\nu$ ersetzt man sodann $\mathfrak{Z}$ durch einen Bogen der zyklischen Ordnung k, welcher nur von Kreisen $\mathfrak{K}$ eines so kleinen Halbmessers in k Punkten getroffen wird, daß $\mathfrak{K}$ fremd ist zu allen übrigen $\mathfrak{U}_\nu$, während Kreise, welche zwei oder drei der $\mathfrak{U}_\nu$ treffen, infolge ihres größeren Halbmessers mit den diesbezüglichen Ersatzbogen insgesamt nicht mehr als k Punkte gemeinsam haben.

---

[25] J. Hjelmslev, Die graphische Geometrie, Förhandl. Ättonde skandinav. Mat. Kongr. Stockholm 1934, S. 10. Vgl. auch H. Haller, Über die K_3-Schmieggebilde der ebenen Bogen von der K_3-Ordnung Drei, Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Sozietät zu Erlangen 69 (1937) S. 215 ff.