Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Die Halbierung eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols.

Von Hans Piloty in München.

Mit 7 Abbildungen.

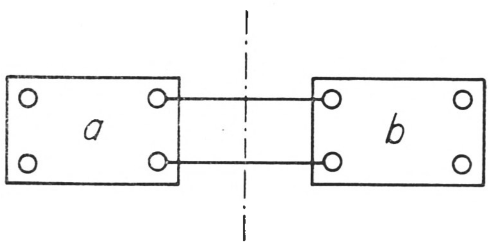
Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Inhalt.

1. Die Aufgabe.

1.1 Übersicht.

Unter „Halbierung" eines symmetrischen Vierpols sei die Aufgabe verstanden, einen Vierpol, den „halbierenden Vierpol", zu finden, der mit seinem Spiegelbild nach Abb. 1 in Kette geschaltet einen symmetrischen, zu dem vorgegebenen symmetrischen Vierpol äquivalenten Vierpol ergibt. Damit die Aufgabe



a = halbierender Vierpol. b = Spiegelbild zu a hinsichtlich der strichpunktierten Geraden.

Abb. 1. Zur Definition der Halbierung.

in völliger Allgemeinheit nicht nur für spezielle Schaltungskonfigurationen wie etwa Partialbruch- oder Kettenschaltungen behandelt wird, soll sowohl der ursprüngliche als auch der halbierende Vierpol durch seine Kettenmatrix repräsentiert werden, so daß die Aufgabe genau formuliert darin besteht, die Kettenmatrix des halbierenden aus derjenigen des gegebenen Vierpols zu finden, und zwar explizit, ohne Verwendung eines rekurrenten Verfahrens. Es ist dann gleichgültig, durch welche Schaltung man sich die Kettenmatrizen realisiert denkt. Äquivalente Vierpole, d. h. solche mit gleicher Kettenmatrix, werden also als nicht wesentlich verschieden betrachtet. Diese Aufgabe wird in diesem Bericht für Reaktanz-Vierpole erschöpfend gelöst. Es wird sich jedoch zeigen, daß es sowohl halbierbare als auch nicht halbierbare symmetrische Reaktanz-Vierpole gibt. Daher müssen zuerst notwendige und hinreichende Kriterien für die Lösbarkeit der Aufgabe aufgestellt werden. Dies geschieht in den Abschnitten 2 und 3. Das Ergebnis sind die beiden in den Absätzen 2.7 und 2.8 ausgesprochenen Sätze, deren erster („Halbierbarkeitssatz") die notwendigen und hinreichenden Bedingungen formuliert, unter denen die Matrix eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols halbierbar ist, und deren zweiter („Eindeutigkeitssatz") die Frage nach der Zahl der Lösungen beantwortet. Gleichzeitig wird das gesuchte Halbierungsverfahren aufgefunden. Es ist in Abs. 2.9 beschrieben.

Der anschließende Abschnitt 4 befaßt sich mit ergänzenden Fragen, die mit unserem Problem aufs engste zusammenhängen. Zunächst wird durch Satz 3 in Abs. 4.1 die Frage beantwortet, wie der Halbierungssatz lautet, wenn man den zu halbierenden symmetrischen Vierpol statt durch seine Kettenmatrix durch seine Brücken-Reaktanzen kennzeichnet, was ebensogut geschehen kann, ohne daß deshalb der Vierpol die wirkliche Gestalt einer Brücke haben müßte. Hierdurch öffnet sich der Zugang zu einem mit der Halbierungsaufgabe eng verwandten Problem, nämlich dem Problem, die Kettenmatrix eines Reaktanz-Vierpols mit gegebenem primärem Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand aufzustellen. Der Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben wird geschildert und die beiden dem Halbierbarkeits- und dem Eindeutigkeitssatz entsprechenden Sätze werden ausgesprochen (Satz 4 und Satz 5 in Abs. 4.2). Anschließend wird der Grad der halbierenden Matrix ermittelt. Dies bedeutet die Antwort auf die Frage, welche Mindestzahl von Schaltelementen erforderlich ist, entweder um die Hälfte eines gegebenen symmetrischen Reaktanz-Vierpols oder um einen Reaktanz-Vierpol aufzubauen, dessen primärer Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand gegeben ist. Die sich ergebende Regel ist in Satz 6 Abs. 4.3 ausgesprochen. Schließlich folgen in Abs. 4.4 noch einige Bemerkungen über die physikalische Bedeutung der in Abs. 2 angegebenen mathematischen Lösung, sowie zwei hierher gehörige Sätze über Reaktanz-Vierpole (Satz 7 und 8).

Die vorgetragenen Ergebnisse sind meines Wissens neu.

1.2 Mathematische Formulierung der Halbierungsaufgabe.

Wegen des bekannten Satzes der elementaren Vierpoltheorie, daß die Kettenmatrix einer Kettenschaltung aus zwei Gliedern durch Multiplikation der Kettenmatrizen der beiden Glieder erhalten wird, und wegen des ebenso bekannten Satzes, daß die Kettenmatrix des Spiegelbildes durch Vertauschen der Elemente der Hauptdiagonale erhalten wird, lautet die mathematische Formulierung unserer Aufgabe so:

$$\| m \| \cdot \| m' \| = \| M \| \tag{1}$$

Hierin bedeuten

$$\| m \| = \begin{Vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{Vmatrix} \frac{1}{g} \tag{2}$$

die gesuchte Matrix des halbierenden Vierpols,

$$\| m' \| = \begin{Vmatrix} g_2 & u_1 \\ u_2 & g_1 \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{g} \tag{3}$$

diejenige seines Spiegelbilds und

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_1 \end{Vmatrix} \frac{1}{G} \tag{4}$$

die gegebene Matrix des ursprünglichen, symmetrischen Vierpols. Alle Matrizen seien in reduzierter und normierterPolynomform geschrieben, d. h. die in den Ausdrücken (2), (3) und (4) rechts vorkommenden Buchstaben bedeuten alle Polynome in $\lambda = i\,\omega$ (Polynomform), die innerhalb der Matrizenstriche stehenden Zählerpolynome haben zu viert, abgesehen von Konstanten, keinen gemeinsamen Teiler (reduzierte Form) und der Beiwert der jeweils höchsten Potenz der Nennerpolynome g und G ist gleich $+1$ gesetzt, was gegebenenfalls durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit einer geeigneten Konstanten stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit erreicht werden kann (normierte Form).[1]

[1] Die Buchstabenwahl deutet an, daß die mit g bzw. G (mit und ohne Index) bezeichneten Polynome gerade (ungerade), die mit u bzw. U bezeichneten ungerade (gerade) Polynome sind.

Durch die Forderung nach reduzierter und normierter Schreibweise wird erreicht, daß äquivalente Vierpole in allen ihren Polynomen übereinstimmen. Da die Determinante einer Kettenmatrix immer identisch gleich 1 ist, gelten die Gleichungen

$$g_1 \cdot g_2 - u_1 \cdot u_2 = g^2 \tag{5}$$

und

$$G_1{}^2 - U_1 \cdot U_2 = G^2 \tag{6a}$$

oder

$$(G_1 + G) \cdot (G_1 - G) = U_1 \cdot U_2 \tag{6b}$$

Unsere Aufgabe besteht also jetzt darin, die fünf Polynome g_1, g_2, u_1, u_2 und g explizit aufzustellen, wobei die vier Polynome G_1, U_1, U_2 und G gegeben sind.

2. Notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit und Lösungsansatz.

2.1 Die Bestimmungsgleichungen.

Setzt man in Gl. (1) die Matrizen aus Gl. (2), (3) und (4) ein und führt die Multiplikation aus, so ergibt sich

$$\begin{Vmatrix} g_1 g_2 + u_1 u_2 & 2\, g_1 u_1 \\ 2\, g_2 u_2 & g_1 g_2 + u_1 u_2 \end{Vmatrix} \frac{1}{g^2} = \begin{Vmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_1 \end{Vmatrix} \frac{1}{G} . \tag{7}$$

Das heißt, daß die an gleicher Stelle stehenden Matrizenelemente – Quotienten aus je zwei Polynomen – links und rechts übereinstimmen müssen, heißt aber nicht, daß die Zähler- und Nennerpolynome einzeln übereinstimmen müssen. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die in Gl. (7) rechts stehende Matrix reduziert geschrieben ist, lautet die allgemeinste, (Gl. 7) befriedigende Darstellung:

$$\begin{aligned} g_1 g_2 + u_1 u_2 &= p_0 G_1 \\ g^2 = g_1 g_2 - u_1 u_2 &= p_0\, G \\ 2\, g_1 u_1 &= p_0 U_1 \\ 2\, g_2 u_2 &= p_0 U_2 \end{aligned} \tag{8a}$$

wobei die zweite dieser Gleichungen Gl. (5) berücksichtigt und p_0 ein Polynom ist, das wegen dieser Gleichung das Produkt

$p_0 G$ zu einem Quadrat machen muß. Überdies muß es normiert sein (Höchstkoeffizient $= 1$), weil G normiert ist und g normiert werden soll. Addition und Subtraktion der ersten beiden Gl. (8a) liefert den neuen Gleichungssatz:

$$\begin{aligned} 2\,g_1 g_2 &= p_0 (G_1 + G) \\ 2\,u_1 u_2 &= p_0 (G_1 - G) \\ 2\,g_1 u_1 &= p_0 U_1 \\ 2\,g_2 u_2 &= p_0 U_2 \end{aligned} \tag{8b}$$

Eine dieser vier Gleichungen läßt sich aus den drei anderen ableiten, so daß es sinngemäßer erscheint, an ihrer Stelle zu schreiben

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{u_2} &= \frac{U_1}{G_1 - G} = \frac{G_1 + G}{U_2} \\ \frac{u_1}{g_2} &= \frac{G_1 - G}{U_2} = \frac{U_1}{G_1 + G} \\ 2\,g_1 g_2 &= p_0 (G_1 + G) \end{aligned} \tag{8c}$$

Die Gleichungssätze (8a), (8b), (8c) besagen alle drei genau dasselbe. Jeder von ihnen kann, wie man leicht nachrechnet, aus einem der beiden anderen abgeleitet werden.

2.2 Physikalische Deutung der Bestimmungsgleichungen.

Die ersten beiden der Gl. (8c) haben eine einfache physikalische Bedeutung. Sie haben nämlich den bekannten Satz von Bartlett [1] zum Inhalt. In der ersten Gleichung (8c) steht nämlich links die primäre Leerlauf-Reaktanz z_{11}, in der zweiten die primäre Kurzschluß-Reaktanz $1/y_{11}$ des halbierenden Vierpols; rechts steht in der ersten Gleichung die Kreuzreaktanz Z_b, in der zweiten die Längsreaktanz Z_a derjenigen symmetrischen Brückenschaltung, welche die gegebene Matrix zur Kettenmatrix hat. Es ist also – und das sagt der Satz von Bartlett aus –, vorausgesetzt, daß die Halbierung überhaupt möglich ist:

$$z_{11} = Z_b \text{ und } 1/y_{11} = Z_a.$$

2.3 Neue Formulierung der Aufgabe

Unsere Aufgabe besteht nunmehr darin, vier zu einem realisierbaren Reaktanz-Vierpol gehörige Zählerpolynome, nämlich g_1, g_2, u_1 und u_2 so zu bestimmen, daß die Gl. (8c) [oder (8a) oder (8b)] erfüllt sind, wobei G_1, G, U_1 und U_2 gegebene Polynome sind und p_0 ein reelles, normiertes, noch näher zu bestimmendes Polynom ist, das $p_0 G$ zu einem Quadrat macht.

2.4 Die Brücken-Reaktanzen in Form gekürzter. Brüche.

Die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (8c) legen es nahe, zunächst unerwünschte gemeinsame Teiler in deren Zähler und Nenner zu beseitigen. Kürzt man in den Brüchen $U_1/(G_1 - G)$ bzw. $(G_1 + G)/U_2$ durch den (normierten) größten gemeinsamen Teiler p_a bzw. q_a von Zähler und Nenner, so verbleibt in beiden Fällen derselbe Bruch: const $\cdot\, p_b/q_b$. Die Polynome p_a und q_a sind teilerfremd, denn andernfalls hätten die vier Polynome U_1, U_2, $(G_1 + G)$ und $(G_1 - G)$ einen Teiler gemeinsam, also auch die Polynome U_1, U_2, G_1 und G, was der Reduziertheit der gegebenen Matrix widersprechen würde. Auf diese Weise erhält man für die Polynome U_1, U_2, $(G_1 + G)$ und $(G_1 - G)$ mit vier Konstanten[1] $2c_1$, $2c_2$, $2c_3$ und $2c_4$ die Ausdrücke[2]

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) + G(\lambda) &= 2c_1\, q_a(\lambda)\, p_b(\lambda) \\ G_1(\lambda) - G(\lambda) &= 2c_2\, p_a(\lambda)\, q_b(\lambda) \\ U_1(\lambda) &= 2c_3\, p_a(\lambda)\, p_b(\lambda) \\ U_2(\lambda) &= 2c_4\, q_a(\lambda)\, q_b(\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

In diesen Ausdrücken ist:

$$\begin{aligned} p_b &= \text{größter gemeinsamer Teiler von } G_1 + G \text{ und } U_1 \\ p_a &= \text{größter gemeinsamer Teiler von } G_1 - G \text{ und } U_1 \\ q_a &= \text{größter gemeinsamer Teiler von } G_1 + G \text{ und } U_2 \\ q_b &= \text{größter gemeinsamer Teiler von } G_1 - G \text{ und } U_2. \end{aligned} \tag{10}$$

[1] Die Einführung des Faktors 2 vereinfacht die späteren Formeln.

[2] In den Formeln (9) ist die unabhängige Variable λ der Polynome angedeutet, um klar zu machen, welche Buchstaben Polynome bedeuten und welche Konstante.

Die vier Konstanten sind wegen der Determinantenbeziehung (6b) durch die Gleichung

$$c_1 c_2 = c_3 c_4 \tag{11}$$

verknüpft. Schließlich haben die Konstanten c_1 bis c_4 alle dasselbe Vorzeichen.

Damit ergeben sich die beiden Brücken-Reaktanzen in gekürzter Form zu

$$Z_a = \frac{G_1 - G}{U_2} = \frac{U_1}{G_1 + G} = c_a \frac{p_a}{q_a} \tag{12}$$

$$Z_b = \frac{G_1 + G}{U_2} = \frac{U_1}{G_1 - G} = c_b \frac{p_b}{q_b} \tag{13}$$

$$\text{mit } c_a = \frac{c_2}{c_4} = \frac{c_3}{c_1} \text{ und } c_b = \frac{c_1}{c_4} = \frac{c_3}{c_2} \tag{14}$$

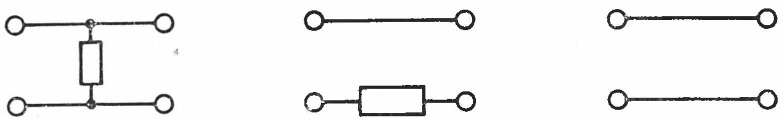
Sind also, wie angenommen, die Polynome G_1, U_1, U_2 und G der reduzierten und normierten Darstellung der gegebenen Kettenmatrix bekannt, so lassen sich mit den Gl. (12) und (13) die Brücken-Reaktanzen in gekürzter Form mittels normierter Polynome gewinnen. Die vier Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 sind die halben Höchstkoeffizienten der vier Polynome $(G_1 + G)$, $(G_1 - G)$, U_1 und U_2, aus ihnen folgen die Konstanten c_a und c_b mittels der Gl. (14), während die vier normierten Polynome p_a, p_b, q_a und q_b durch Bilden der größten gemeinsamen Teiler nach der Regel (10) gewonnen werden. Bemerkenswert ist, daß die Bildung der größten gemeinsamen Teiler nicht etwa die Kenntnis der Wurzeln der betreffenden Polynome voraussetzt, vielmehr nach dem Euklidschen Algorithmus (vgl. z. B. O. Perron, Lehrbuch der Algebra, S. 183) auf elementare Weise geschehen kann. Wenn die gekürzte Darstellung ohnehin schon aus der Eigenschaftskonstruktion bekannt ist,[1] erübrigt sich natürlich diese Rechnung. Hier soll aber von der Kettenmatrix ausgegangen werden.

---

[1] Beispielsweise können die gekürzten Brücken-Reaktanzen unmittelbar gewonnen werden, wenn der Ausgangspunkt die Vorschrift der Betriebsdämpfung wahrt.

Das geschilderte Verfahren bleibt auch noch in (trivialen) Grenzfällen richtig, in denen die Brücken-Reaktanzen ausarten, nämlich in den in Abb. 2 dargestellten Fällen.

$$Z = c\,\frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} \qquad\qquad \frac{1}{Z} = c\cdot\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}$$



$$\|M\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} f & c\cdot h \\ 0 & f \end{Vmatrix}\frac{1}{f} \qquad \begin{Vmatrix} f & 0 \\ c\cdot h & f \end{Vmatrix}\frac{1}{f}$$

$$Z_a = 0 \qquad Z_a = \frac{c}{2}\cdot\frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} \qquad Z_a = 0$$

$$Z_b = \infty \qquad Z_b = \infty \qquad Z_b = \frac{2}{c}\,\frac{f(\lambda)}{h(\lambda)}$$

$f(\lambda)$ und $h(\lambda)$ bedeuten teilerfremde, normierte Polynome.

Abb. 2. Schaltungen, Kettenmatrizen und Brücken-Reaktanzen ausgearteter symmetrischer Vierpole

Man muß nun, wie in der Algebra üblich, von Null verschiedene Konstante als Polynome vom Grad 0 und die Konstante 0 als Polynom ohne Grad ansehen, das durch jedes andere Polynom teilbar ist, in den Konstanten-Quotienten Gl. (14) jeweils den Ausdruck 0/0 vermeiden und dem Symbol 1/0 den Wert ∞ zulegen.

2.5 Lösungsansatz.

Nunmehr nehmen wir die Lösung der in 2.3 formulierten Aufgabe wieder auf. An die Stelle der Gl. (8c) treten jetzt die einfacheren:

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{u_2} &= c_b\,\frac{p_b}{q_b} \\ \frac{u_1}{g_2} &= c_a\,\frac{p_a}{q_a} \qquad\qquad (15) \\ g_1 g_2 &= c_1 p_0 q_a p_b \end{aligned}$$

In den beiden ersten dieser Gleichungen stehen rechts mit einer Konstanten multiplizierte gekürzte Brüche aus normierten Polynomen. Ihre allgemeinste Lösung ist daher mit zwei neuen Polynomen $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als normiert angenommen werden können:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= a_1 \cdot p_b(\lambda)\, p_1(\lambda) & u_1(\lambda) &= b_1 \cdot p_a(\lambda)\, p_2(\lambda) \\ u_2(\lambda) &= b_2 \cdot q_b(\lambda)\, p_1(\lambda) & g_2(\lambda) &= a_2 \cdot q_a(\lambda)\, p_2(\lambda) \end{aligned} \tag{16}$$

Die Konstanten a_1, a_2, b_1 und b_2 erfüllen die Gleichungen:

$$a_1/b_2 = c_b \qquad b_1/a_2 = c_a \tag{17}$$

Wenn nun auch noch die dritte Gleichung (15) erfüllt sein soll, so muß gelten:

$$p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) = p_0(\lambda) \tag{18}$$

$$a_1 a_2 = c_1. \tag{19}$$

Sind umgekehrt die Gl. (16) bis (19) erfüllt, so sind es auch die Gl. (15), und unsere Aufgabe ist gelöst, wenn die so gewonnene Matrix $\| m \|$ realisierbar ist. Dies ist nach Piloty [2] der Fall, wenn mindestens 3 Quotienten aus je 2 in einer Zeile oder Spalte stehenden Polynomen Reaktanzen sind (Reaktanzbedingung), wenn die Determinantenregel Gl. (5) erfüllt ist und wenn die Elemente der Hauptdiagonale gerade, diejenigen der Nebendiagonale ungerade Funktionen von λ sind.

2.6 Erste notwendige Bedingung für die Lösbarkeit.

Wir können daraus sofort notwendige Bedingungen für die Halbierbarkeit der vorgelegten Kettenmatrix ableiten. Die vier Konstanten a_1, a_2, b_1 und b_2 aus Gl. (16) müssen einerlei Vorzeichen haben. Mithin muß c_1 nach Gl. (19) positiv sein. Da die vier Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 einerlei Vorzeichen haben [vgl. Gl. (9) und (13)], heißt das, daß sie alle vier positiv sein müssen und damit auch die Koeffizienten der gegebenen Zählerpolynome G_1, U_1 und U_2. (Das Nennerpolynom G ist normiert.) Von zwei symmetrischen, sich durch einseitiges Umpolen unterscheidenden Vierpolen ist daher höchstens einer halbierbar. Dies Ergebnis läßt sich übrigens auch schon aus Gl. (7) unmittelbar ablesen. Die Koeffizienten der dort links vorkommenden gesuchten Polynome g_1, g_2, u_1 und u_2 müssen einerlei Koeffizienten-Vorzeichen haben, was ersichtlich nur möglich ist, wenn die rechts vorkommenden gegebenen Polynome G_1, U_1 und U_2 positive Koeffizienten haben.

2.7 Zweite notwendige Bedingung für die Lösbarkeit. Halbierbarkeitssatz.

Eine zweite notwendige Bedingung für die Halbierbarkeit erhalten wir durch nähere Betrachtung der drei (normierten) Polynome p_0, p_1 und p_2. Es ist leicht zu sehen, daß die Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ teilerfremd sein müssen und nur einfache Wurzeln haben dürfen. Hätten sie nämlich einen Teiler gemeinsam, so wäre die Matrix $\| m \|$ nicht reduziert, was sie doch sein soll. Hätte $p_1(\lambda)$ oder $p_2(\lambda)$ eine mehrfache Wurzel, so wäre die Reaktanz-Bedingung verletzt. Daraus folgt, daß auch das Produkt $p_0 = p_1 p_2$ nur einfache Wurzeln haben darf. Andererseits muß es das Produkt $p_0 G$ zu einem Quadrat machen. Mithin ist $p_0(\lambda)$ das eindeutig bestimmte normierte Polynom, welches alle Nullstellen ungerader Ordnung von $G(\lambda)$ besitzt, jede jedoch nur einfach. Da nun $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ wegen der Reaktanzbedingung nur aus Faktoren der Form λ und $(\lambda^2 + \alpha^2)$ aufgebaut sein können, ergibt sich als zweite notwendige Bedingung der Halbierbarkeit: das Nennerpolynom G darf Nullstellen ungerader Ordnung – der gegebene Vierpol also Sperrstellen ungerader Ordnung – nur auf der imaginären λ-Achse (reelle Frequenzen) besitzen.

Im Abschnitt 3 wird bewiesen werden, daß die beiden bisher aufgestellten notwendigen Halbierbarkeitsbedingungen auch ausreichen. Wir haben daher den

Satz 1 (Halbierbarkeitssatz).

„Ein symmetrischer Reaktanz-Vierpol mit der in reduzierter und normierter Polynomform geschriebenen Kettenmatrix

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_1 \end{Vmatrix} \frac{1}{G}$$

ist dann und nur dann halbierbar, wenn die Koeffizienten der Zählerpolynome positiv sind und das Nennerpolynom Null-

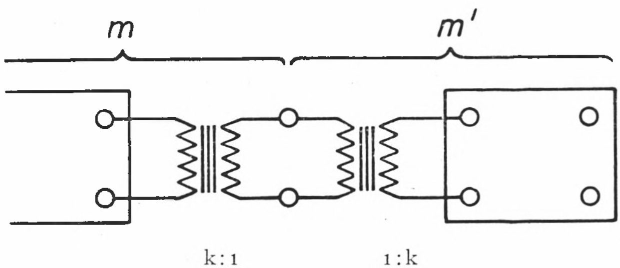
stellen ungerader Ordnung höchstens auf der imaginären λ-Achse besitzt."

2.8 Nähere Bestimmung der Konstanten und Polynome des Lösungsansatzes. Eindeutigkeitssatz.

Um die allgemeine Lösung des Halbierungs-Problems aufzustellen, betrachten wir zunächst die Konstanten der Gl. (16), welche den Bedingungen (17) und (19) genügen müssen. Statt der letzteren ist es übersichtlicher, unter Einführung einer willkürlichen reellen, positiven oder negativen Zahl k zu schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 &= k\sqrt{c_1} & b_1 &= \frac{1}{k}\sqrt{c_1}\cdot c_a \\ b_2 &= k\sqrt{c_1}\cdot\frac{1}{c_b} & a_2 &= \frac{1}{k}\sqrt{c_1} \end{aligned} \tag{20}$$

was offenbar dasselbe bedeutet. Daß die Zahl k willkürlich bleibt, bedeutet nur, daß nach Abb. 3 an das rechte Ende der linken Hälfte ein idealer Übertrager von beliebiger Übersetzung angeschaltet werden darf.



Die Übertrager sind ideale Übertrager.

Abb. 3. Bedeutung der willkürlichen Konstanten k.

Weiterhin betrachten wir die beiden normierten Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$. Sie stellen eine Faktorenzerlegung des eindeutig bestimmten normierten Polynoms $p_0(\lambda)$ dar. Diese muß so geschehen, daß die Reaktanzbedingung erfüllt wird und daß die Elemente der Hauptdiagonale der Kettenmatrix gerade, die der Nebendiagonale ungerade rationale Funktionen der Frequenz werden. Zwei der vier möglichen Quotienten, nämlich g_1/u_2 und

u_1/g_2, sind bereits als Reaktanzen festgestellt. Sie stimmen mit den Brücken-Reaktanzen überein. Nun muß auch noch ein dritter Quotient, z. B.

$$\frac{u_1(\lambda)}{g_1(\lambda)} = \text{const} \cdot \frac{p_a(\lambda)\, p_2(\lambda)}{p_b(\lambda)\, p_1(\lambda)} \tag{21}$$

eine Reaktanz werden. Wenn dies überhaupt möglich ist, so ist es jedenfalls nur auf eine einzige Weise möglich. Denn wenn man von einer richtigen Verteilung der Linearfaktoren von $p_0(\lambda)$ auf $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ ausgeht, so bedeutet jede Veränderung dieser Verteilung eine Störung der wichtigen Aufeinanderfolge von Polen und Nullstellen der rationalen Funktion u_1/g_1. Daß die richtige Verteilung immer möglich ist, wird im Abschnitt 3 bewiesen. Rechnerisch ist sie leicht durchzuführen. Man braucht nur $p_0(\lambda)$ in seine Linearfaktoren zu zerlegen und diese so auf $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ zu verteilen, daß der etwa in $p_0(\lambda)$ enthaltene Faktor λ entweder dem Polynom $p_1(\lambda)$ oder dem Polynom $p_2(\lambda)$ so zugewiesen wird, daß die Quotienten g_1/g und g_2/g gerade, die Quotienten u_1/g und u_2/g ungerade Funktionen werden und daß Pole und Nullstellen in Gl. (21) abwechseln. Das Gesagte liefert den

Satz 2 (Eindeutigkeitssatz).

„*Die Halbierung eines den Voraussetzungen des Halbierungssatzes genügenden symmetrischen Reaktanz-Vierpols ist nur auf eine einzige Weise möglich bis auf die Willkür der Konstanten k* [*Gl.* (20)], *d. h. bis auf Hinzufügen eines idealen Übertragers beliebiger positiver oder negativer Übersetzung am rechten Ende der linken Hälfte und eines Übertragers reziproker Übersetzung am linken Ende der rechten Hälfte.*“

2.9 Zusammenfassende Darstellung der Lösung.

Damit aber haben wir die vollständige Lösung unseres Problems bereits in Händen. Sie lautet so: Gegeben ist die den beiden Voraussetzungen des Halbierbarkeitssatzes genügende Kettenmatrix

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} G_1(\lambda) & U_1(\lambda) \\ U_2(\lambda) & G_1(\lambda) \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{G(\lambda)} \tag{1}$$

des zu halbierenden Vierpols in reduzierter und normierter Quotientendarstellung (kein gemeinsamer Teiler in den drei Zählerpolynomen G_1, U_1 und U_2, Höchstkoeffizient des Nenner-Polynoms G ist 1). Man ermittle zuerst nach den Vorschriften von Abs. 2.4 die beiden Brücken-Reaktanzen in der Form eines mit einer Konstanten multiplizierten Quotienten aus zwei normierten, teilerfremden Polynomen. Das Ergebnis sei

$$Z_a = c_a \cdot \frac{p_a(\lambda)}{q_a(\lambda)} \tag{2a}$$

$$Z_b = c_b \cdot \frac{p_b(\lambda)}{q_b(\lambda)}. \tag{2b}$$

Ferner bestimme man das normierte Polynom $p_0(\lambda)$, das alle Nullstellen ungerader Ordnung von $G(\lambda)$ enthält, aber jede nur einfach, so daß $p_0(\lambda) \cdot G(\lambda)$ ein Quadrat ist. Schließlich stelle man noch den (positiven) Höchstkoeffizienten $2c_1$ des Polynoms $G_1(\lambda) + G(\lambda)$ fest. Dann ergeben sich die Polynome der Kettenmatrix $\| m \|$ der linken Hälfte in normierter und reduzierter Polynomdarstellung

$$\| m \| = \begin{Vmatrix} g_1(\lambda) & u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) & g_2(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{g(\lambda)} \tag{3}$$

zu:

$$g_1(\lambda) = k\sqrt{c_1}\, p_b(\lambda)\, p_1(\lambda) \tag{4a}$$

$$u_1(\lambda) = \frac{\sqrt{c_1}}{k}\, c_a\, p_a(\lambda)\, p_2(\lambda) \tag{4b}$$

$$u_2(\lambda) = \frac{k\sqrt{c_1}}{c_b}\, q_b(\lambda)\, p_1(\lambda) \tag{4c}$$

$$g_2(\lambda) = \frac{\sqrt{c_1}}{k}\, q_a(\lambda)\, p_2(\lambda) \tag{4d}$$

$$g^2(\lambda) = p_0(\lambda)\, G(\lambda). \tag{4e}$$

Hierin ist noch k eine willkürliche reelle, positive oder negative Konstante und $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ sind zwei normierte Polynome, für die

$$p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) = p_0(\lambda)$$

gilt und die, was immer und zwar auf nur eine Weise möglich ist, so gewählt werden müssen, daß $u_2(\lambda)/g_2(\lambda)$ oder $g_1(\lambda)/u_1(\lambda)$ eine Reaktanz wird.

3. Beweis, daß die Voraussetzungen des Halbierbarkeitssatzes ausreichen.

3.1 Aufzählung des noch zu Beweisenden.

Bisher ist nur gezeigt worden, daß es, wenn überhaupt, mit der im Eindeutigkeitssatz ausgesprochenen trivialen Einschränkung nur eine Lösung geben kann, und zwar die in Abs. 2.9 näher beschriebene. Nun muß noch bewiesen werden, daß diese Lösung unter den Voraussetzungen des Halbierbarkeitssatzes immer existiert, oder mit anderen Worten, daß diese Voraussetzungen ausreichen. Außerdem müssen wir uns noch davon überzeugen, daß die Lösung auch unseren formalen Darstellungsforderungen genügt, d. h. in reduzierter und normierter Polynomform geschrieben ist.

3.2 Die Lösung ist reduziert und normiert geschrieben.

Das letztere ist sofort einzusehen. Normiert ist die Darstellung, weil $G(\lambda)$ nach Voraussetzung und $p_0(\lambda)$ nach unserer Konstruktionsvorschrift normiert ist. Also ist es nach Vorschrift **(4e)** auch das Nennerpolynom $g(\lambda)$ der halbierenden Matrix $\| m \|$. Reduziert ist die Darstellung, weil die vier Zählerpolynome der Vorschrift **(4)** keinen Teiler gemeinsam haben können. Weil nämlich $p_1(\lambda)$ nach unserer Vorschrift der größte gemeinsame Teiler von $g_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ ist, analog $p_2(\lambda)$ der größte gemeinsame Teiler der Polynome $u_1(\lambda)$ und $g_2(\lambda)$, müßte ein allen vier Polynomen gemeinsamer Teiler auch gemeinsamer Teiler der Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ sein, die aber doch nach unserer Konstruktionsvorschrift teilerfremd sind.

3.3 Ein bekannter Satz.

Die Realisierbarkeit der halbierenden Matrix nach Vorschrift **(3)** und **(4)** prüfen wir am besten an Hand des folgenden in **(3)** bewiesenen Satzes:

„Eine zweireihige quadratische Matrix $\begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{A}_2 \end{Vmatrix}$, deren Elemente Funktionen der Variablen $\lambda = i\,\omega$ sind, ist dann und nur dann die Kettenmatrix eines Reaktanz-Vierpols, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die vier Elemente der Matrix sind reelle rationale Funktionen, und zwar die der Hauptdiagonale gerade, die der Nebendiagonale ungerade.
2. Die Determinante der Matrix ist identisch 1.
3. Mindestens drei der vier Quotienten $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}_2$ sind Reaktanzen. Damit ist es auch der vierte Quotient. Zugelassen als Reaktanz ist auch der Wert (identisch) Null. Tritt aber eine solche verschwindende Reaktanz auf, so müssen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei (wegen Bedingung 2. zueinander reziproke) reelle Konstante sein."

3.4 Die vier Elemente der halbierenden Matrix sind reelle rationale Funktionen. Die Determinante ist 1

Daß die vier Elemente der Matrix $\| m \|$ reelle rationale Funktionen von λ sind, geht unmittelbar aus der Bedeutung der Regel **(4)** hervor.

Die Determinante der Matrix ist 1, weil wir diese Bedingung von vornherein der Bestimmung der gesuchten Polynome zugrunde gelegt haben. Überdies rechnen wir leicht nach:

$$\frac{g_1 g_2 - u_1 u_2}{g^2} = \frac{c_1 p_b q_a p_0 - \frac{c_1 c_a}{c_b} p_a q_b p_0}{p_0 G} =$$

$$= \frac{c_1 p_b q_a - c_2 p_a q_b}{G} = \frac{(G_1 + G) - (G_1 - G)}{2G} = 1$$

Der zweite Ausdruck folgt durch Einsetzen der Ausdrücke **(4)**, der dritte aus Gl. (14), der vierte aus den beiden ersten der Gleichungen (9).

3.5 Die Reaktanzbedingung des Satzes aus 3.3 ist in den ausgearteten Fällen erfüllt.

Was nun die übrigbleibenden Bedingungen des Satzes von Abs. 3.3 betrifft, so betrachten wir zunächst die ausgearteten Fälle u_1 oder u_2 oder beide identisch Null. Hier muß bewiesen werden, daß die beiden Elemente der Hauptdiagnonale der

Matrix $\| m \|$ zwei zueinander reziproke reelle Konstante sind und daß ein o nicht enthaltender Quotient aus Zählerpolynomen einer Zeile oder Spalte eine Reaktanz ist, womit dann auch die Erfüllung der Forderung nach Geradheit bzw. Ungeradheit der in der Haupt- bzw. der Nebendiagonale der Kettenmatrix stehenden Funktionen mitbewiesen sein wird.

3.51 $u_1(\lambda) \equiv 0$

Es möge etwa $u_1(\lambda) \equiv 0$ herauskommen. Das ist nach Regel **(4b)** nur möglich, wenn $c_a = 0$, d. h. $Z_a(\lambda) \equiv 0$. Die gegebene Matrix $\| M \|$ kann dann nur lauten:

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} p_b(\lambda) & 0 \\ \frac{2}{c_b} q_b(\lambda) & p_b(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{p_b(\lambda)}$$

$$\left(\text{Querleitwert } \frac{2}{c_b} \cdot \frac{q_b(\lambda)}{p_b(\lambda)} \right)$$

Wo $Z_b(\lambda) = c_b \cdot \frac{p_b(\lambda)}{q_b(\lambda)}$ als beliebige Reaktanz angenommen sei. Mithin ist in die Ausdrücke **(4)** einzusetzen: $c_1 = 1$; $p_a(\lambda) = q_a(\lambda) = 1$; $c_a = 0$. Ferner hat der Nenner $G(\lambda) = p_b(\lambda)$ nur einfache Nullstellen, so daß $p_0(\lambda) = p_b(\lambda)$ zu setzen ist. Lassen wir die Produktzerlegung von $p_0(\lambda)$ einstweilen noch offen, so ergibt sich also:

$$g_1(\lambda) = k\, p_b(\lambda)\, p_1(\lambda) \qquad u_1(\lambda) \equiv 0$$

$$u_2(\lambda) = \frac{k}{c_b} q_b(\lambda)\, p_1(\lambda) \qquad g_2(\lambda) = \frac{1}{k} p_2(\lambda)$$

$$g(\lambda) = p_b(\lambda)$$

Die richtige Zerlegung von $p_0(\lambda)$ ist hier offenbar $p_1(\lambda) = 1$, $p_2(\lambda) = p_b(\lambda)$, so daß die gesuchte Matrix lautet:

$$\| m \| = \begin{Vmatrix} k\, p_b(\lambda) & 0 \\ \frac{k}{c_b} q_b(\lambda) & \frac{1}{k} p_b(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{p_b(\lambda)}$$

$$\left(\text{Halber Querleitwert } \frac{k}{c_b} \cdot \frac{q_b(\lambda)}{p_b(\lambda)} \text{ mit Übertrager.} \right)$$

In der Tat sind also die Elemente der Hauptdiagonale k und $1/k$ zwei zueinander reziproke reelle Konstante und die beiden o nicht enthaltenden Quotienten aus Zählerpolynomen Reaktanzen.

3.52 $u_2(\lambda) \equiv 0$

Analog erledigt sich der Fall $u_2(\lambda) \equiv 0$. Hier ist $1/Z_b(\lambda) \equiv 0$, die gesuchte Matrix lautet notwendig mit $Z_a(\lambda) = c_a \dfrac{p_a(\lambda)}{q_a(\lambda)}$ = beliebige Reaktanz:

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} q_a(\lambda) & 2c_a p_a(\lambda) \\ 0 & q_a(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{q_a(\lambda)}$$

$$\left(\text{Längswiderstand } 2c_a \frac{p_a(\lambda)}{q_a(\lambda)}\right)$$

Es ist $c_1 = 1$; $p_b(\lambda) = q_b(\lambda) = 1$; $1/c_b = 0$; $p_0(\lambda) = q_a(\lambda)$ und die Formeln **(4)** ergeben:

$$g_1(\lambda) = k p_1(\lambda) \qquad u_1(\lambda) = \frac{c_a}{k} p_a(\lambda) p_2(\lambda)$$

$$u_2(\lambda) \equiv 0 \qquad g_2(\lambda) = \frac{1}{k} q_a(\lambda) p_2(\lambda)$$

$$g(\lambda) = q_a(\lambda).$$

Die richtige Zerlegung von $p_0(\lambda)$ lautet: $p_1(\lambda) = q_a(\lambda)$; $p_2(\lambda) = 1$; die gesuchte Matrix ist:

$$\| m \| = \begin{Vmatrix} k\, q_a(\lambda) & \dfrac{c_a}{k} p_a(\lambda) \\ 0 & \dfrac{1}{k} q_a(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{q_a(\lambda)}$$

$$\left(\text{Halber Längswiderstand } \frac{c_a}{k} \cdot \frac{p_a(\lambda)}{q_a(\lambda)} \text{ mit Übertrager}\right)$$

und die Elemente der Hauptdiagonale sind wiederum k und $1/k$, die beiden o nicht enthaltenden Quotienten sind Reaktanzen.

3.53 $u_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda) \equiv 0$

Schließlich haben wir noch den doppelt ausgearteten Fall $u_1(\lambda) \equiv 0$; $u_2(\lambda) \equiv 0$. Jetzt gilt $Z_a(\lambda) \equiv 0$; $1/Z_b(\lambda) \equiv 0$. Die gegebene Matrix kann nur lauten

$$\| M \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

(durchgeschaltete Drähte)

In unseren Formeln ist $c_1 = 1$; $c_a = 1/c_b = 0$; $p_a(\lambda) = q_a(\lambda) = p_b(\lambda) = q_b(\lambda) = p_0(\lambda) = 1$ zu setzen, so daß die gesuchte Matrix lautet:

$$\| m \| = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{Vmatrix} .$$

(Übertrager)

Auch hier sind die Elemente der Hauptdiagonale k und $1/k$ zwei zueinander reziproke Konstante.[1]

3.6 Die Reaktanzbedingung des Satzes aus 3.3 ist in den nicht ausgearteten Fällen erfüllt.

Nunmehr darf vorausgesetzt werden, daß keines der Polynome $u_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ und somit auch keine Brücken-Reaktanz identisch verschwindet oder unendlich wird. Es muß bewiesen werden, daß sich das Polynom $p_0(\lambda)$ immer so in die beiden Faktoren $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ zerlegen läßt, daß erstens die nach den Formeln **(4)** Abs. 2.9 gebildeten Elemente $g_1(\lambda) / g(\lambda)$ und $g_2(\lambda) / g(\lambda)$ der Hauptdiagonale der Kettenmatrix gerade, diejenigen $u_1(\lambda) / g(\lambda)$ und $u_2(\lambda) / g(\lambda)$ der Nebendiagonale ungerade Funktionen sind und daß zweitens der Quotient aus zwei in einer Zeile der Kettenmatrix stehenden Zählerpolynomen, etwa der Quotient $u_1(\lambda) / g_1(\lambda)$ eine Reaktanz ist. Das letztere genügt, um zu beweisen, daß mindestens drei solche Quotienten Reaktanzen sind. Denn zwei Quotienten, nämlich $g_1(\lambda) / u_2(\lambda)$

[1] Natürlich sind diese ausgearteten Halbierungsaufgaben trivial. Es bedarf keiner ausführlichen Theorie, um zu zeigen, wie symmetrische Vierpole, die nur aus einem Querleitwert bzw. nur aus einem Längswiderstand bzw. nur aus zwei durchgeschalteten Drähten bestehen, halbiert werden können. Zweck der Betrachtung der ausgearteten Fälle ist lediglich, darzutun, daß auch sie von den allgemeinen Regeln erfaßt werden.

und $u_1(\lambda) / g_2(\lambda)$ sind bereits unmittelbar durch unsere Konstruktion als Reaktanzen (die Brücken-Reaktanzen des gegebenen Vierpols) erwiesen. Damit wären dann aber alle Voraussetzungen des Satzes aus Abs. 3.3 als zutreffend nachgewiesen und damit die Aufgabe dieses Abschnittes erledigt.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1.

„Ist der Teiler λ in beiden Polynomen $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ enthalten, oder in keinem von ihnen, so ist er in dem Polynom $p_0(\lambda)$ enthalten. Ist der Teiler λ dagegen nur in einem der Polynome $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ enthalten, so ist dies das Polynom $p_a(\lambda)$ und λ ist in dem Polynom $p_0(\lambda)$ nicht enthalten.

Im ersteren Falle läßt sich der Faktor λ stets eindeutig einem der beiden Polynome $p_1(\lambda)$ oder $p_2(\lambda)$ so zuweisen, daß die Elemente $g_1(\lambda) / g(\lambda)$ und $g_2(\lambda) / g(\lambda)$ der Hauptdiagonale der Kettenmatrix gerade, die Elemente $u_1(\lambda) / g(\lambda)$ und $u_2(\lambda)/g(\lambda)$ der Nebendiagonale ungerade Funktionen von λ werden. Im letzteren Falle trifft dies von selbst zu."

Hilfssatz 2.

„Folgt in der Reihenfolge der (auf der imaginären λ-Achse liegenden) Nullstellen der beiden Polynome $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ eine Nullstelle des einen Polynoms auf eine des anderen, so soll dies eine „richtige Folge" heißen. Folgen dagegen zwei Nullstellen eines und desselben Polynoms aufeinander, eine „falsche Folge". Zusammenfallende Nullstellen von $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ werden außer Betracht gelassen. Außerdem zählt, falls von den Polynomen $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ bei $\lambda = 0$ entweder beide oder keines eine Nullstelle haben, als auf $\lambda = 0$ richtig bzw. falsch folgende Nullstelle eine solche von p_b (p_a) bzw. p_a (p_b), falls der Quotient $u_1(\lambda) / g_1(\lambda)$ bei $\lambda = 0$ eine Nullstelle (einen Pol) besitzt, wiederum unter Nichtberücksichtigung etwaiger (außerhalb $\lambda = 0$) zusammenfallender Nullstellen von $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$.

Dann gilt:

Zwischen der Stelle $\lambda = 0$ und der ersten auf der imaginären Achse liegenden, nicht beiden Polynomen gemeinsamen Nullstelle von $p_a(\lambda)$ oder von $p_b(\lambda)$ bzw. zwischen zwei aufeinander *folgenden, nicht beiden Polynomen gemeinsamen und von Null verschiedenen Nullstellen von* $p_a(\lambda)$ *und* $p_b(\lambda)$ *liegt gar keine oder eine gerade Anzahl von Nullstellen von* $p_0(\lambda)$, *wenn die betrachteten Stellen richtig folgen, dagegen eine ungerade Anzahl, wenn sie falsch folgen. An den von Null verschiedenen Intervallgrenzen ist* $p_0 \neq 0$."

Nehmen wir die beiden Hilfssätze zunächst als richtig an, so ergibt sich folgendes Verfahren für die richtige Zerlegung des Polynoms $p_0(\lambda)$ in seine Faktoren $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$. Wir denken uns $p_0(\lambda)$ in Elementarfaktoren der Form λ und $(\lambda^2 + a_\nu^2)$ $(\nu = 1; 2; \ldots)$ zerlegt, von denen jeder nur einmal vorkommt. Hinsichtlich des Teilers λ können die beiden Polynome $p_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$ (welche aus einfachen Elementarfaktoren der gleichen Art aufgebaut sind wie $p_0(\lambda)$) folgendes Verhalten zeigen:

α) p_a ist durch λ teilbar, p_b nicht.

β) p_a und p_b sind beide durch λ teilbar.

γ) p_a und p_b sind beide durch λ nicht teilbar.

Die vierte Möglichkeit, daß p_b durch λ teilbar ist, p_a dagegen nicht, ist nach Hilfssatz 1 ausgeschlossen. Wir betrachten der Reihe nach diese drei Fälle.

α) p_a ist durch λ teilbar, p_b nicht.

Nach Hilfssatz 1 enthält das Polynom $p_0(\lambda)$ den Faktor λ nicht, also enthalten ihn auch die Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ nicht. Nach Formel (4) Abs. 2.9 ist $u_1(\lambda)$ durch λ einfach teilbar, $g_1(\lambda)$ nicht. u_1/g_1 bekommt also bei $\lambda = 0$ eine Nullstelle. Die beiden Quotienten g_1/g und g_2/g sind nach Hilfssatz 1, letzter Satz, gerade, die Quotienten u_1/g und u_2/g ungerade Funktionen. Die auf der positiven imaginären λ-Achse folgende erste, nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsame Nullstelle $i\alpha_1$[1] dieser

[1] Es kann sein, daß es eine solche Nullstelle $i\alpha_1$ gar nicht gibt, wenn nämlich p_a und p_b außer der nur zu p_a gehörigen Nullstelle bei $\lambda = 0$ alle anderen Nullstellen gemeinsam haben. Dann ist aber

$$\frac{u_1(\lambda)}{g_1(\lambda)} = \frac{c_a}{k^2}\,\lambda\,\frac{p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)} \tag{22}$$

und man kann offenbar alle Elementarfaktoren von $p_0(\lambda)$ ohne weiteres so auf $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ verteilen, daß dieser Ausdruck eine Reaktanz ist, mag ihre Anzahl gerade oder ungerade sein.

beiden Polynome sei eine von p_a. Dies bedeutet im Sinne von Hilfssatz 2 eine falsche Folge, so daß nach diesem Satz $p_0\ (i\alpha_1) \neq 0$ und zwischen $\lambda = 0$ und $i\alpha_1$ eine ungerade Zahl von Nullstellen von $p_0\ (\lambda)$ liegt. Die entsprechenden Elementarteiler von p_0 lassen sich so auf p_1 und p_2 verteilen, daß die richtige Aufeinanderfolge von Nullstellen und Polen des Quotienten u_1/g_1 zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\alpha_1$ gewährleistet ist. Bei $\lambda = 0$ liegt nämlich eine Nullstelle, dann folgt ein Pol, der von einer Nullstelle von $p_1\ (\lambda)$ erzeugt wird, dann eine Nullstelle, die von einer Nullstelle von $p_2(\lambda)$ erzeugt wird usw. Zuletzt kommt wieder ein Pol (von p_1 erzeugt) und schließlich bei $\lambda = i\alpha_1$ voraussetzungsgemäß eine Nullstelle, die von der dort liegenden Nullstelle von $p_a(\lambda)$ erzeugt wird. ($p_0(\lambda)$, also auch $p_1(\lambda)$ und $p_2\ (\lambda)$ haben dort keine Nullstelle.)

Folgt auf $\lambda = 0$ auf der positiven imaginären λ-Achse als erste, nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsame Nullstelle, dagegen eine solche $i\alpha_1$ von p_b, so erhält u_1/g_1 bei $\lambda = i\alpha_1$ einen Pol, die Folge ist im Sinne von Hilfssatz 2 richtig, $p_0\ (i\alpha_1) = 0$ und zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\alpha_1$ liegt eine gerade Zahl (einschließlich 0) von Nullstellen von $p_0(\lambda)$. Ähnlich wie oben sieht man leicht, daß sich die Elementarteiler von p_0 wiederum so auf p_1 und p_2 verteilen lassen, daß zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\alpha_1$ Nullstellen und Pole von u_1/g_1 abwechselnd aufeinander folgen.

In ganz entsprechender Weise schließt man mittels des Hilfssatzes 2 weiter. Folgt die nächste, nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsame Nullstelle $i\alpha_2$ richtig, so folgt auf eine Nullstelle (einen Pol) von p_a/p_b ein Pol (eine Nullstelle). Eine gerade Zahl von Nullstellen von $p_0\ (\lambda)$ liegt zwischen $\lambda = i\alpha_1$ und $\lambda = i\alpha_2$ und die richtige Abwechslung von Nullstellen und Polen von u_1/g_1 läßt sich genau wie oben herstellen. Folgt dagegen die nächste Nullstelle $i\alpha_2$ falsch, so folgt auf eine Nullstelle (einen Pol) von p_a/p_b wiederum eine Nullstelle (ein Pol), eine ungerade Zahl von Nullstellen von p_0 liegt dazwischen und es läßt sich auch hier die richtige Abwechslung von Nullstellen und Polen von u_1/g_1 herstellen.

So kann man fortfahren bis zur letzten, nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsamen Nullstelle von p_a und p_b. Liegen oberhalb noch weitere Nullstellen von $p_0\ (\lambda)$, so lassen sich die entsprechenden Elementarfaktoren ersichtlich richtig, d. h. abwechselnd auf p_1 und p_2, verteilen, gleichgültig, ob ihre Anzahl gerade oder ungerade ist. Bei $\lambda = \infty$ schließt sich endlich von selbst wegen des Gradunterschiedes von Zähler und Nenner Pol oder Nullstelle richtig an. Etwaige gemeinsame Teiler von p_a und p_b sind offenbar ohne Einfluß. Sie kürzen sich nach Formel (4) Abs. 2.9 im Quotienten u_1/g_1 heraus.

Schließlich ist noch festzustellen, daß der konstante Faktor des so aufgebauten Quotienten u_1/g_1 positiv ist, womit alle Eigenschaften einer Reaktanz hergestellt sind, so daß zusammen mit der bereits festgestellten Tatsache, daß die Elemente der Kettenmatrix in richtiger Weise gerade bzw. ungerade Funktionen sind, alles Notwendige bewiesen ist.[1]

β und γ) p_a und p_b sind beide durch λ teilbar (nicht teilbar).

Diese Fälle unterscheiden sich von Fall α nur hinsichtlich der ersten Folge zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\alpha_1$.[2] Nach Hilfssatz 1 ist jetzt $p_0(\lambda)$ durch λ teilbar, so daß dieser Faktor entweder dem Polynom $p_1(\lambda)$ oder dem Polynom $p_2(\lambda)$ zugewiesen werden muß. Weiterhin entscheidet nach diesem Satz darüber, welchem dieser Polynome der Faktor λ zugewiesen werden muß, eindeutig die Forderung, daß die Elemente der Hauptdiagonale gerade, die der Nebendiagonale ungerade Funktionen werden sollen. Damit ist auch eindeutig das Verhalten von u_1/g_1 bei $\lambda = 0$ festgelegt. Diese Funktion erhält dort entweder eine einfache Nullstelle oder einen einfachen Pol.[3] Folgt die erste, nicht beiden

[1] Es ist leicht zu zeigen, daß in dem bisher betrachteten Fall die gesuchte Schaltung (linke Hälfte) bezüglich der Sperrstelle $\lambda = 0$ im Sinne meiner Arbeit [2] regulär ist. Die noch zu betrachtenden Fälle entsprechen den vier singulären Fällen.

[2] Auch hier ist es möglich, daß es eine solche Stelle $i\alpha_1$ gar nicht gibt, wenn nämlich p_a und p_b identisch sind. Aber auch in diesem Falle kann der Ausdruck

$$\frac{u_1(\lambda)}{g_1(\lambda)} = \frac{c_a}{k^2} \cdot \frac{p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)} \tag{23}$$

ohne weiteres durch richtige, abwechselnde Verteilung der Elementarfaktoren von p_0 auf p_1 und p_2 zu einer Reaktanz gemacht werden.

[3] Diese beiden Möglichkeiten zusammen mit den beiden durch β und γ unterschiedenen Fällen entsprechen, wie leicht zu sehen, wie aber nicht

Polynomen gemeinsame Nullstelle $i\alpha_1$ von p_a oder p_b im Sinne von Hilfssatz 2 falsch, d. h. folgt auf die Nullstelle (den Pol) von u_1/g_1 bei $\lambda = 0$ wiederum eine Nullstelle (ein Pol) bei $\lambda = i\alpha_1$, so sorgt die ungerade Zahl einfacher Nullstellen von p_0, die dann zwischen 0 und $i\alpha_1$ liegt, dafür, daß die entsprechenden Teilfaktoren so auf p_1 und p_2 verteilt werden können, daß in u_1/g_1 Pole und Nullstellen richtig abwechseln.

Folgt dagegen die Stelle $i\alpha_1$ im Sinne von Hilfssatz 1 richtig, so hat u_1/g_1 bei $\lambda = 0$ eine Nullstelle und bei $\lambda = i\alpha_1$ einen Pol oder umgekehrt. Hier sorgt die gerade Zahl der zwischenliegenden Nullstellen von p_0, daß wiederum die richtige Abwechslung der Pole und Nullstellen in u_1/g_1 hergestellt werden kann. Weiterhin verläuft der Beweis genau wie in Fall α.

3.7 Beweis des in 3.6 benützten Hilfssatzes 1.

Es bleiben nun die beiden Hilfssätze zu beweisen, die man auch, wenn man will, nur als genauere mathematische Formulierung der Reaktanzbedingung des Satzes aus Abs. 3.3 ansehen kann. Ich beginne mit dem Hilfssatz 1. Aus den beiden ersten der Gleichungen (9) ergibt sich durch Subtraktion:

$$G(\lambda) = c_1 q_a(\lambda)\, p_b(\lambda) - c_2 p_a(\lambda)\, q_b(\lambda) \tag{24}$$

Diese Gleichung setzt uns instand, aus dem Verhalten der Polynome p_a, p_b, q_a und q_b bei $\lambda = 0$ auf das Verhalten des Polynoms G und damit auch auf das des Polynoms p_0 zu schließen. Von den Polynomen p_a und q_a, p_b und q_b, die paarweise teilerfremd sind, ist immer das eine durch λ einfach teilbar und ungerade, das andere durch λ nicht teilbar und gerade.

Sind daher beide Polynome p_a und p_b durch λ teilbar oder nicht teilbar, so steht in Gl. (24) rechts ein ungerades Polynom und $G(\lambda)$ ist durch eine ungerade Potenz von λ teilbar, $p_0(\lambda)$ mithin genau durch λ, so daß λ entweder dem Polynom $p_1(\lambda)$ oder dem Polynom $p_2(\lambda)$ als Faktor zugewiesen werden muß. Das Polynom $g(\lambda)$, dessen Quadrat durch $p_0(\lambda)\, G(\lambda)$ gegeben ist, ist ebenfalls durch eine Potenz von λ teilbar, aber durch eine

näher ausgeführt werden soll, den vier singulären Fällen hinsichtlich der Sperrstelle $\lambda = 0$ im Sinne meiner Arbeit [2].

ungerade oder gerade, ersteres, wenn $G(\lambda)$ durch λ, λ^5, λ^9 ... allg. λ^{4n-3}, letzteres, wenn $G(\lambda)$ durch λ^3, λ^7, λ^{11} ... allg. λ^{4n-1} teilbar ist. $g(\lambda)$ kann also ein gerades oder ein ungerades Polynom sein. Je nachdem, ob das eine oder andere der Fall ist, und je nachdem ob p_a und p_b oder q_a und q_b den Teiler λ gemein haben, und deshalb ungerade Polynome sind, muß und kann durch richtige Zuweisung des Faktors λ an p_1 oder p_2 erreicht werden, daß g_1/g und g_2/g gerade, u_1/g und u_2/g ungerade Funktionen werden. Im einzelnen ergeben sich so die vier in der Tafel 1 dargestellten Möglichkeiten. Immer wird, wenn nach

Durch λ teilbar sind	Das Polynom g (λ) ist gerade	Das Polynom g (λ) ist ungerade
p_a und p_b	p_1	p_2
q_a und q_b	p_2	p_1

Tafel 1

Der Faktor λ ist entweder dem Polynom p_1 oder dem Polynom p_2 zuzuweisen entsprech. der Tabelle.

dieser Anweisung verfahren wird, erreicht, daß die Quotienten g_1/g und g_2/g gerade, die Quotienten u_1/g und u_2/g ungerade Funktionen sind. Der in $p_0(\lambda)$ enthaltene Teiler λ wird entweder dem Polynom $p_1(\lambda)$ oder dem Polynom $p_2(\lambda)$ nach Maßgabe der Tafel als Faktor zugewiesen.

Haben beispielsweise die Polynome p_a und p_b den Teiler λ gemein, so sind sie beide ungerade, die Polynome q_a und q_b gerade. Ist g ungerade, so muß, um das Obige zu erreichen, der Faktor λ dem Polynom p_2 zugewiesen werden. Denn dann werden nach den Formeln **(4)** von Abs. 2.9 die Polynome g_1 und g_2 ungerade, die Polynome u_1 und u_2 gerade, mithin die Quotienten g_1/g und g_2/g gerade, die Quotienten u_1/g und u_2/g ungerade Funktionen. Das sind aber die Behauptungen des Hilfssatzes 1 für den dort zuerst betrachteten Fall.

Hat nur eines der Polynome p_a und p_b entsprechend dem anderen Fall den Teiler λ, so behauptet Hilfssatz 1 zunächst, daß das durch λ teilbare Polynom notwendig das Polynom p_a ist und daß das Polynom p_0 nicht durch λ teilbar ist. Beides ergibt sich aus einer Betrachtung der Gl. (24). Wäre nämlich p_b durch λ teilbar, p_a dagegen nicht, so wäre q_a durch λ teilbar, q_b nicht (wegen der Reaktanzeigenschaften der gekürzten Brüche p_a/q_a und p_b/q_b). Der erste Summand der rechten Seite von Gl. (24) wäre durch λ^2 teilbar, der zweite auch nicht durch λ. Der erstere – ein Polynom – besäße kein konstantes Glied, der letztere besäße ein solches, und zwar infolge der ersten Voraussetzung des Halbierbarkeitssatzes eines mit negativem Vorzeichen, so daß auch $G(\lambda)$ ein konstantes Glied mit negativem Zeichen hätte. Da aber infolge der zweiten Voraussetzung des Halbierbarkeitssatzes $G(\lambda)$ Nullstellen außerhalb der imaginären Achse nur von gerader Ordnung hat, wäre auch der Höchstkoeffizient von $G(\lambda)$ negativ, was man leicht erkennt, wenn man sich $G(\lambda)$ in reelle Faktoren von möglichst niedrigem Grad zerlegt denkt und beachtet, daß diese die Form λ, $\lambda^2+\alpha_\nu^2$, $(\lambda^2+2\beta_\nu\lambda+\gamma_\nu^2)^2$ und $(\lambda^2-\delta_\nu^2)^2$ haben. Der Höchstkoeffizient von $G(\lambda)$ ist aber nach Voraussetzung gleich $+1$, also sicher nicht negativ, so daß unsere Annahme unmöglich ist.

Daß $p_0(\lambda)$ nicht durch λ teilbar ist, folgt einfach daraus, daß, wenn p_a und q_b durch λ teilbar sind, p_b und q_a dagegen nicht, $G(\lambda)$ ein gerades Polynom und überdies durch λ überhaupt nicht teilbar ist, weil der erste Summand der rechten Seite von Gl. (24) durch λ nicht teilbar ist, der zweite dagegen durch λ^2.

Aus der Tatsache, daß $G(\lambda)$ in unserem jetzt betrachteten Fall durch λ überhaupt nicht teilbar ist, ergibt sich auch die letzte Behauptung des Hilfssatzes 1, daß in diesem Fall die Elemente der Haupt- bzw. Nebendiagonale der Kettenmatrix von selbst, d. h. ohne Hinzufügen von Teilern von $p_0(\lambda)$ gerade bzw. ungerade Funktionen sind. Denn $g(\lambda)=\sqrt{p_0(\lambda)\,G(\lambda)}$ ist durch λ nicht teilbar, also, da es gerade oder ungerade sein muß, sicher ein gerades Polynom. Die Polynome p_a und q_b sind aber ungerade, die Polynome p_b und q_a gerade Polynome und damit nach Regel **(4)** in Abs. 2.9 unter Berücksichtigung des Umstandes, daß hier mit p_0 auch p_1 und p_2 durch λ nicht teilbar sind, die Polynome u_1 und u_2 ungerade, die Polynome g_1 und g_2 gerade, womit zusammen mit der schon festgestellten Tatsache, daß g ein gerades Polynom ist, die Behauptung bewiesen ist.

3.8 Beweis des in 3.6 benützten Hilfssatzes 2.

Der nunmehr zu beweisende Hilfssatz 2 betrachtet Nullstellen der beiden Polynome p_a und p_b, die nicht beiden Polynomen gemeinsam sind. Wenn auf der imaginären Achse unter Außerachtlassung etwa zwischenliegender, beiden Polynomen gemeinsamer Nullstellen auf eine Nullstelle des einen Polynoms eine Nullstelle des anderen bzw. desselben Polynoms folgt, so nennt er das eine richtige bzw. eine falsche Folge und behauptet, daß zwischen je zwei in diesem Sinne richtig bzw. falsch folgenden Nullstellen gar keine oder eine gerade Zahl bzw. eine ungerade Zahl von Nullstellen des Polynoms p_0 liegt. Der Beweis dieser Behauptungen wird im folgenden (Abs. 3.81 und 3.82) erbracht. Auf die weitergehenden Behauptungen des Hilfssatzes 2 bezüglich des Intervalls der imaginären Achse zwischen $\lambda = 0$ und der ersten Nullstelle eines der beiden Polynome p_a oder p_b komme ich weiter unten (Abs. 3.83) zurück.

3.81 Richtige Nullstellenfolge.

Bei der richtigen Folge kommt im Sinne wachsender $\omega = \lambda/i$ auf eine Nullstelle $i\,\alpha$ von $p_a(\lambda)$ eine solche $i\,\beta$ von $p_b(\lambda)$ oder umgekehrt; gegebenenfalls liegen noch r gemeinsame Nullstellen dazwischen. Möge die erste Nullstelle etwa die von p_a sein. Wir betrachten die beiden reellen Funktionen einer reellen Variablen ω

$$\begin{aligned} x_1(\omega) &= \frac{1}{i}\,\frac{p_a(i\,\omega)}{q_a(i\,\alpha)} \\ x_2(\omega) &= \frac{1}{i}\,\frac{p_b(i\,\omega)}{q_b(i\,\beta)} \end{aligned} \qquad (25)$$

Ihr grundsätzlicher Verlauf ist in Abb. 4 (mit $r = 2$ zwischen α und β liegenden gemeinsamen Nullstellen von p_a und p_b) gezeichnet.

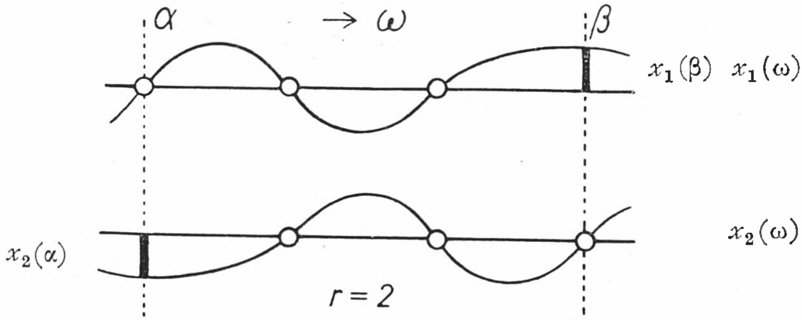


Abb. 4. Grundsätzlicher Verlauf der Funktionen $x_1(\omega)$ und $x_2(\omega)$ nach Gl. (25)

$x_1(\omega)$ hat für $\omega = \alpha$, $x_2(\omega)$ für $\omega = \beta$ eine einfache Nullstelle mit positivem Differentialquotienten. Ersteres ist nach der Bedeutung der in Gl. (25) vorkommenden Polynome selbstverständlich, letzteres folgt aus der wohlbekannten Tatsache, daß für jede Reaktanz $X(\lambda)$ die reelle Funktion $\frac{1}{i} X(i\omega)$ monoton ansteigt und daraus, daß p_a/q_a und p_b/q_b Reaktanzen sind. Nun sieht man leicht, daß $x_1(\beta)$ und $x_2(\alpha)$ von Null verschieden sind und verschiedene Vorzeichen haben, gleichgültig ob r eine gerade oder ungerade Zahl ist, so daß

$$\frac{x_2(\alpha)}{x_1(\beta)} < 0 \tag{26}$$

Andererseits folgt aus Gl. (24) und Gl. (25):

$$\frac{G(i\alpha)}{G(i\beta)} = -\frac{c_1}{c_2} \frac{q_a(i\alpha)\, p_b(i\alpha)}{p_a(i\beta)\, q_b(i\beta)} = -\frac{c_1}{c_2} \frac{x_2(\alpha)}{x_1(\beta)} \tag{27}$$

und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß c_1 und c_2 gleiches (positives) Vorzeichen haben

$$\frac{G(i\alpha)}{G(i\beta)} > 0 \tag{28}$$

Aus einem bekannten Satz der Algebra folgt aus dieser Ungleichung,[1] daß $G(\lambda)$ zwischen $\lambda = i\alpha$ und $\lambda = i\beta$ entweder gar keine oder eine gerade Zahl von Nullstellen (unter Berücksichtigung der Vielfachheit) besitzt. Damit ist aber auch das Polynom $p_0(\lambda)$, das alle Nullstellen ungerader Ordnung von $G(\lambda)$ als einfache Nullstellen in sich vereinigt, an den Intervallgrenzen $i\alpha$ und $i\beta$ von Null verschieden und hat im Intervallinneren gar keine oder eine gerade Zahl (einfacher) Nullstellen. Denn $G(\lambda)$ kann in diesem Intervall nach dem oben Bewiesenen höchstens eine gerade Zahl von Nullstellen ungerader Ordnung haben. Damit ist aber die Behauptung des Hilfssatzes 2 bezüglich der richtigen Folge für den Fall, daß die erste Nullstelle der Folge

[1] $G(\lambda)$ nimmt für imaginäre λ reelle bzw. imaginäre Werte an, wenn es ein gerades bzw. ungerades Polynom ist. Im letzteren Fall kann man die Vorzeichen von $\frac{1}{i} G(i\omega)$ betrachten, um reelle Werte zu erhalten.

eine von $p_a(\lambda)$ ist, vollständig bewiesen. Wenn die erste Nullstelle der Folge eine von $p_b(\lambda)$ ist, verläuft der Beweis nur unwesentlich abgeändert.

3.82 Falsche Nullstellenfolge.

Um nun unsere Behauptungen auch für den Fall der falschen Folge zu beweisen, nehmen wir zunächst an, daß auf eine Nullstelle $i\alpha$ von p_a wiederum eine solche $i\beta$ von p_a folgt, gegebenenfalls mit r gemeinsamen Nullstellen von p_a und p_b dazwischen. Wir betrachten die beiden reellen, von Null verschiedenen und endlichen Zahlen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_b(i\alpha)}{p_b(i\beta)} \\ x_2 &= \frac{q_a(i\alpha)}{q_a(i\beta)} \end{aligned} \tag{29}$$

und stellen fest, daß x_1 und x_2 verschiedenes Vorzeichen haben. Die Nullstellen von q_a liegen nämlich (vgl. Abb. 5), weil p_a/q_a

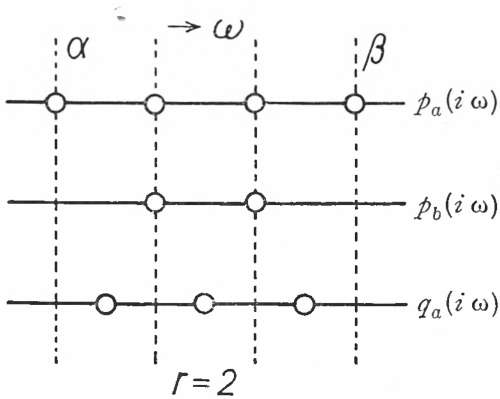


Abb. 5. Beispiel für die Lage der Nullstellen der in Gl. (29) vorkommenden Polynome.

eine Reaktanz ist, zwischen denen von p_a, und dies hat zur Folge, daß p_b zwischen α und β gerade (ungerade) mal Zeichen wechselt, q_a ungerade (gerade) mal, wenn r gerade (ungerade) ist. Daraus folgt aber die Behauptung bezüglich der Vorzeichen von x_1 und x_2. Nun ist hier wegen Gl. (24)

$$\frac{G(i\alpha)}{G(i\beta)} = \frac{q_a(i\alpha)p_b(i\alpha)}{q_a(i\beta)p_b(i\beta)} = x_1 x_2 < 0 \tag{30}$$

woraus mittels des bereits erwähnten Satzes aus der Algebra folgt, daß $G(\lambda)$ zwischen $\lambda = i\alpha$ und $\lambda = i\beta$ eine ungerade Zahl (unter Berücksichtigung der Vielfachheit) von Nullstellen besitzt. Deshalb hat auch $p_0(\lambda)$ eine ungerade Zahl (einfacher) Nullstellen zwischen $\lambda = i\alpha$ und $\lambda = i\beta$. Außerdem ist wegen Gl. (24) $G(i\alpha)$ und $G(i\beta)$ von Null verschieden und damit auch $p_0(i\alpha)$ und $p_0(i\beta)$, womit alles bewiesen ist. Natürlich verläuft auch hier der Beweis fast genau so, wenn nicht, wie bisher angenommen, zwei Nullstellen von p_a aufeinander folgen, sondern zwei solche von p_b.

3.83 Besonderheit im ersten Intervall von $\lambda = 0$ an.

Es müssen nun noch die weiteren Behauptungen des Hilfssatzes 2 bezüglich des Intervalls der imaginären Achse zwischen $\lambda = 0$ und der ersten, nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsamen Nullstelle $i\alpha$ eines dieser Polynome bewiesen werden. Auch hier beruht der Beweis im wesentlichen darauf, daß die Vorzeichen des Wertes des Polynoms $G(i\omega)$ an den Rändern des Intervalls verglichen werden. Da jetzt voraussetzungsgemäß entweder p_a und p_b, oder aber q_a und q_b den Teiler λ besitzen, ist $G(\lambda)$ ein ungerades Polynom, nimmt also auf der imaginären Achse imaginäre Werte an. Wählen wir eine beliebige positive Zahl ε so klein, daß zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\varepsilon$ $G(\lambda)$ sicherlich keine Nullstelle besitzt, so ist:

$$\frac{1}{i} G(i\varepsilon) > 0 \tag{31a}$$

wenn $G(\lambda)$ den Teiler λ^{4n-3} ($n = 1; 2; \ldots$), also $g(\lambda)$ den Teiler λ^{2n-1} enthält, mithin ein ungerades Polynom ist.

$$\frac{1}{i} G(i\varepsilon) < 0 \tag{31b}$$

wenn $G(\lambda)$ den Teiler λ^{4n-1} ($n = 1; 2; \ldots$), also $g(\lambda)$ den Teiler λ^{2n} enthält, mithin ein gerades Polynom ist.

Dies ergibt sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß $G(\lambda)$ ein normiertes Polynom ist (Höchstkoeffizient $= +1$) und außerhalb der imaginären Achse nur Nullstellen gerader Ordnung hat, so daß auch der Niedrigstkoeffizient positiv ist. Ferner enthält p_0 den Teiler λ, so daß $g(\lambda) = \sqrt{p_0(\lambda)\, G(\lambda)}$ die angegebenen Potenzen von λ als Teiler enthält.

Die reelle Zahl $\frac{1}{i}\, G(i\,\alpha)$ ist wegen Gl. (24) von Null verschieden, wenn $i\,\alpha$ die erste von Null verschiedene und nicht beiden Polynomen p_a und p_b gemeinsame Nullstelle bedeutet. Für ihr Vorzeichen ist von Belang, ob $i\,\alpha$ eine Nullstelle von p_a oder p_b ist, ferner ob die beiden Polynome p_a und p_b durch λ teilbar sind, oder die beiden Polynome q_a und q_b. Diese beiden Angaben bestimmen das gesuchte Vorzeichen eindeutig, wie leicht zu erkennen ist, wenn man berücksichtigt, daß die Quotienten p_a/q_a und p_b/q_b reduziert (keine gemeinsamen Teiler in Zähler und Nenner) und normiert (Höchstkoeffizienten $= 1$, damit alle Koeffizienten positiv) geschriebene Reaktanzen sind (Pole und Nullstellen trennen sich auf der imaginären Achse). Jedes der vier in diesen Quotienten vorkommenden Polynome ist bei $\lambda = 0$ positiv, wenn es gerade ist, und gleich Null mit positiv imaginärem Anstieg bei Fortschreiten auf der positiven imaginären Achse, wenn es ungerade ist. Die Reaktanzeigenschaft der beiden Quotienten bestimmt zusammen mit der Zahl r der den Polynomen p_a und p_b gemeinsamen, zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\,\alpha$ liegenden einfachen Nullstellen die Zahl der Zeichenwechsel zwischen diesen Werten und damit ähnlich wie früher das Vorzeichen von $\frac{1}{i}\, G(i\,\alpha)$.

Im einzelnen ergibt sich unter Benützung von Gl. (24):

Falls $i\,\alpha$ eine Nullstelle von p_a:

$$\frac{1}{i}\, G\,(i\alpha) = \frac{c_1}{i}\, p_b(i\,\alpha)\, q_a(i\,\alpha) \tag{32a}$$

o, wenn p_a und p_b durch λ teilbar

o, wenn q_a und q_b durch λ teilbar

Falls $i\,\alpha$ eine Nullstelle von p_b:

$$\frac{1}{i}\,G(i\,\alpha) = -\frac{c_2}{i}\,p_a(i\,\alpha)\,q_b(i\,\alpha) \tag{32b}$$

o, wenn p_a und p_b durch λ teilbar
o, wenn q_a und q_b durch λ teilbar

Die Regeln (32a) und (32b) sind in Abb. 6 durch schematische Angabe des Werteverlaufs der Polynome erläutert. (In der Abb. 6 ist angenommen, daß zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\,\alpha$, $r = 2$ gemeinsame Nullstellen liegen.) Selbstverständlich folgen aber die Regeln (32) aus rein algebraischen Betrachtungen ohne Benötigung einer Abbildung.

Diese soll nur die Regeln erläutern.

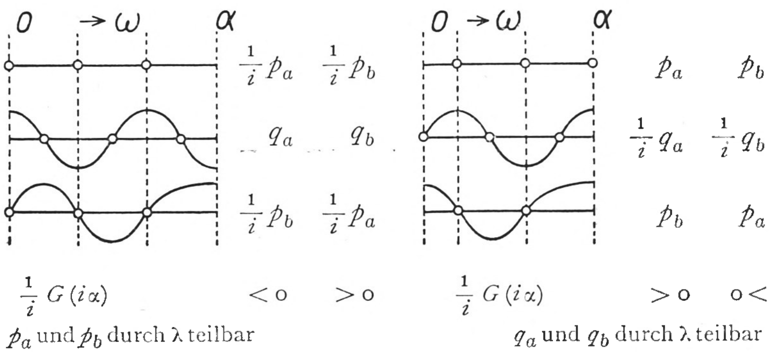


Abb. 6. Erläuterung ($r = 2$) zu den Regeln (32).

Nun kann die Behauptung des Hilfssatzes 2 leicht mittels der Vorzeichenregeln (31) und (32) bewiesen werden. Zunächst ist mit $G(i\,\alpha)$ auch $p_0(i\,\alpha)$ von Null verschieden. Hat ferner etwa u_1/g_1 unter Anwendung des Hilfssatzes 1 bei $\lambda = 0$ eine Nullstelle bekommen, ist also der Teiler λ von $p_0(\lambda)$ dem Polynom $p_2(\lambda)$ zugewiesen worden, so ist wegen Hilfssatz 1,

wenn p_a und p_b durch λ teilbar ist, g ein ungerades Polynom,
wenn q_a und q_b durch λ teilbar ist, g ein gerades Polynom.

In beiden Fällen haben $\frac{1}{i}\,G(i\,\varepsilon)$ und $\frac{1}{i}\,G(i\,\alpha)$ dasselbe bzw. verschiedenes Vorzeichen, wenn die erste nicht beiden Polynomen gemeinsame Nullstelle $i\,\alpha$ eine Nullstelle von p_b bzw. p_a ist. Da die Aufeinanderfolge bei $\lambda = 0$ Nullstelle von u_1/g_1, bei $\lambda = i\,\alpha$

Nullstelle von p_b bzw. p_a nach der in Hilfssatz 2 gegebenen Erklärung „richtige“ bzw. „falsche“ Folge heißt und da aus gleichen bzw. verschiedenen Vorzeichen von $\frac{1}{i}\,G(i\,\varepsilon)$ und von $\frac{1}{i}\,G(i\,\alpha)$ eine gerade bzw. ungerade Zahl von Nullstellen von $G(\lambda)$ und damit auch von $p_0(\lambda)$ zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = i\,\alpha$ gefolgert werden kann,[1] ist die erste Hälfte unserer Behauptungen von Hilfssatz 2 damit bewiesen. Die andere Hälfte ergibt sich sofort und analog, wenn man davon ausgeht, daß u_1/g_1 bei $\lambda = 0$ einen Pol bekommen hat. Hier haben $\frac{1}{i}\,G(i\,\varepsilon)$ und $\frac{1}{i}\,G(i\,\alpha)$ dasselbe bzw. verschiedenes Vorzeichen, wenn $i\,\alpha$ eine Nullstelle von p_a bzw. p_b ist. Sonst bleibt der Beweis fast wörtlich derselbe.

4. Ergänzende Betrachtungen zur allgemeinen Theorie.

4.1 Der Halbierbarkeitssatz ausgesprochen für die Brücken-Reaktanzen.

Im Abs. 2.7 war ein Satz (Satz 1, der „Halbierbarkeitssatz“) aufgestellt worden, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angab, wann die Kettenmatrix eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols im Sinne dieser Arbeit halbierbar ist. Nun kann man die Eigenschaften eines solchen ebensogut wie durch die Kettenmatrix auch durch die Brücken-Reaktanzen charakterisieren. Deshalb soll nun untersucht werden, wie man es den Brücken-Reaktanzen eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols ansehen kann, ob sie zu einem halbierbaren Vierpol gehören oder nicht. Das Ergebnis sei gleich vorweggenommen. Es lautet:

Satz 3 (Halbierbarkeitssatz, 2. Fassung).

„*Ein symmetrischer Reaktanz-Vierpol mit den beiden Brücken-Reaktanzen Z_a (Längs-Reaktanz) und Z_b (Kreuz-Reaktanz) ist dann und nur dann halbierbar, wenn die (bei $\lambda = 0$ notwendig analytische) rationale Funktion*

$$X(\lambda) = \frac{Z_b(\lambda) - Z_a(\lambda)}{Z_b(\lambda) + Z_a(\lambda)}$$

folgende Eigenschaften hat:

[1] ε läßt man bei dieser Betrachtung nach Null streben.

1. *Funktionswert oder niedrigste, nicht verschwindende Ableitung bei $\lambda = 0$ ist positiv.*
2. *Etwaige Nullstellen außerhalb der imaginären λ-Achse sind von gerader Ordnung.*"

Anmerkungen.

1. Die Formulierung ist so gewählt, daß auch die ausgearteten Fälle erfaßt werden. So ist z. B. ein symmetrischer Reaktanz-Vierpol mit $Z_a \equiv 0$, Z_b beliebig, oder einer mit $Z_b \equiv \infty$, Z_a beliebig, halbierbar, weil dort $X(0) = +1$, einer mit $Z_b \equiv 0$, Z_a beliebig, oder einer mit $Z_a \equiv \infty$, Z_b beliebig, dagegen nicht, weil dort $X(0) = -1$.

2. Die erste Bedingung des Satzes wird stets von einem von 2 Vierpolen erfüllt, die sich nur durch einseitiges Umpolen unterscheiden. Dies bedeutet nämlich Vertauschen von Z_a mit Z_b und somit Vorzeichenumkehr von X, so daß, wenn das betrachtete Vorzeichen ursprünglich negativ sein sollte, es hierdurch positiv gemacht werden kann.

3. Die Erfüllung der ersten Bedingung prüft man am einfachsten nach, wenn man $X(\lambda)$ in Form eines Quotienten von zwei Polynomen anschreibt und deren beide Niedrigstkoeffizienten durcheinander dividiert. Das Vorzeichen dieses Quotienten ist das gesuchte, denn letzterer ist das Anfangsglied der Taylorschen Reihe für $X(\lambda)$ bei $\lambda = 0$. Dies führt auf folgende Regel: Man schreibe mit positiven Konstanten c_a und c_b und mit normierten, paarweise teilerfremden Polynomen $p_a(\lambda)$, $q_a(\lambda)$ und $p_b(\lambda)$, $q_b(\lambda)$

$$Z_a(\lambda) = c_a \frac{p_a(\lambda)}{q_a(\lambda)}; \qquad Z_b(\lambda) = c_b \frac{p_b(\lambda)}{q_b(\lambda)}$$

Dann ist die erste Bedingung erfüllt bzw. verletzt, wenn das Polynom

$$c_b p_b(\lambda)\, q_a(\lambda) - c_a p_a(\lambda)\, q_b(\lambda) = c\, G(\lambda) \quad (c \gtreqless 0)$$

einen positiven bzw. negativen Niedrigstkoeffizienten hat.

Der Beweis hat nur zu zeigen, daß die Bedingungen der zweiten Fassung mit denjenigen der ersten Fassung inhaltlich übereinstimmen. Wir gehen zu diesem Zweck wieder von unserer

Normaldarstellung der Brücken-Reaktanzen durch paarweise teilerfremde, normierte Polynome aus:

$$Z_a = c_a \frac{p_a}{q_a} \qquad Z_b = c_b \frac{p_b}{q_b}$$

und bilden die Funktion $X(\lambda)$ zu:

$$X(\lambda) = \frac{c_b p_b(\lambda)\, q_a(\lambda) - c_a p_a(\lambda)\, q_b(\lambda)}{c_b p_b(\lambda)\, q_a(\lambda) + c_a p_a(\lambda)\, q_b(\lambda)} \tag{33}$$

Wie ein Vergleich von Zähler und Nenner in Gl. (33) mit den Ausdrücken der beiden ersten Gl. (9) unter Berücksichtigung der aus den Gl. (14) folgenden Beziehung $c_b/c_a = c_1/c_2$ lehrt, gilt:

$$X(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{G_1(\lambda)} \tag{33a}$$

wobei die Zähler und Nenner von Gl. (33) und Gl. (33a) sich nur durch einen reellen, positiven oder negativen Zahlenfaktor unterscheiden, der so gewählt werden muß, daß der Zähler von Gl. (33a), nämlich das Polynom $G(\lambda)$, den Höchstkoeffizienten $+1$ erhält.

Aus Gl. (33a) ist nun zu ersehen, daß die außerhalb der imaginären Achse liegenden Nullstellen des Polynoms $G(\lambda)$ und der rationalen Funktion $X(\lambda)$ nach Lage und Ordnung identisch sind. Denn $G_1(\lambda)$ hat dort keine Nullstellen, so daß sich entsprechende Faktoren im Quotienten nicht kürzen lassen. Damit ist aber nachgewiesen, daß die zweiten Bedingungen der beiden Fassungen unseres Satzes übereinstimmen.

Wenn die zweite Bedingung eingehalten ist, so hat, wie wir früher (in Abs. 3.7) gesehen haben, auch der Niedrigstkoeffizient von $G(\lambda)$ positives Vorzeichen. Mithin entscheiden die unter sich übereinstimmenden Vorzeichen der Koeffizienten des Polynoms $G_1(\lambda)$, darunter dasjenige des Niedrigstkoeffizienten, umkehrbar eindeutig über das Vorzeichen des Funktionswertes $X(0)$ oder, falls dieser Null sein sollte, der niedrigsten, bei $\lambda = 0$ nicht verschwindenden Ableitung. Damit ist aber bewiesen, daß auch die ersten Bedingungen beider Formulierungen des Halbierbarkeitssatzes inhaltlich übereinstimmen.

4.2 Existenz eines Reaktanz-Vierpols mit vorgeschriebenem primärem (oder sekundärem) Kurzschluß- und Leerlauf-Widerstand.

Mit Rücksicht darauf, daß die Brücken-Reaktanzen Z_a und Z_b des gegebenen symmetrischen Vierpols identisch sind mit dem primären Kurzschluß- bzw. Leerlaufwiderstand der linken Hälfte — oder mit dem sekundären Kurzschluß- bzw. Leerlaufwiderstand der rechten Hälfte — läßt sich folgender Satz aussprechen:

Satz 4.

„*Zwei Reaktanzen $Z_b(\lambda)$ und $Z_a(\lambda)$ sind dann und nur dann Leerlauf- bzw. Kurzschlußwiderstand einer Seite eines Reaktanz-Vierpols, wenn die (bei $\lambda = 0$ notwendig analytische) rationale Funktion*

$$X(\lambda) = \frac{Z_b(\lambda) - Z_a(\lambda)}{Z_b(\lambda) + Z_a(\lambda)}$$

folgende Eigenschaften hat:

1. Bei $\lambda = 0$ ist der Funktionswert oder, falls dieser Null ist, der Wert der niedrigsten nicht verschwindenden Ableitung positiv.

2. Etwaige Nullstellen außerhalb der imaginären λ-Achse sind von gerader Ordnung.“

Entsprechen nämlich die beiden Reaktanzen diesen Bedingungen, so lassen sie sich nach Satz 3 als Brücken-Reaktanzen eines halbierbaren, symmetrischen Reaktanz-Vierpols auffassen, dessen linke (oder rechte) Hälfte die verlangten Eigenschaften hat. Ist umgekehrt eine der Bedingungen verletzt, so kann es keinen Reaktanz-Vierpol mit den vorgeschriebenen Eigenschaften geben. Gäbe es ihn nämlich, so würde er mit seinem dann ebenfalls existierenden Spiegelbild in Kette geschaltet einen halbierbaren symmetrischen Reaktanz-Vierpol liefern, was aber nach Satz 3 unmöglich ist. Natürlich kann man den Beweis auch ganz ohne Bezug auf die Halbierung eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols führen.

Der Eindeutigkeitssatz lautet so:

Satz 5.

„Zwei Reaktanz-Vierpole, die im primären (sekundären) Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand übereinstimmen, sind äquivalent bis auf sekundäres (primäres) Zuschalten eines idealen Übertragers mit beliebiger positiver oder negativer Übersetzung.“

Auch die Aufgabe, die Kettenmatrix eines Reaktanz-Vierpols in reduzierter und normierter Polynomform aufzustellen, dessen primärer Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand in zulässiger Weise vorgeschrieben ist, ist durch unsere Betrachtungen gelöst. Hierfür gelten die Formeln **(4)** aus Abs. 2.9, wenn sie folgendermaßen gelesen werden:

Vorgegeben sind Leerlauf- (Z_b) und Kurzschlußwiderstand (Z_a) in der Darstellung der Formeln **(2)** aus Abs. 2.9, so daß die beiden positiven Konstanten c_a und c_b und die vier normierten Polynome p_a, p_b, q_a und q_b bekannt sind. Die reelle (positive oder negative) Konstante k ist willkürlich. Die Konstante c_1 muß so bestimmt werden, daß der Höchstkoeffizient des Polynoms

$$G(\lambda) = c_1 \left[p_b(\lambda)\, q_a(\lambda) - \frac{c_a}{c_b}\, p_a(\lambda)\, q_b(\lambda) \right] \qquad (34)$$

gleich $+1$ wird. (Falls die Aufgabe lösbar ist, erweist sich c_1 als positiv.) Das normierte Polynom $p_0(\lambda)$ hat die alte Bedeutung, d. h. es besitzt alle Nullstellen ungerader Ordnung des Polynoms $G(\lambda)$ als einfache Nullstellen. (Falls die Aufgabe lösbar ist, liegen diese Nullstellen alle auf der imaginären Achse.) $p_0(\lambda)$ wird schließlich (was im Fall der Lösbarkeit immer möglich ist) so in zwei Faktoren $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ zerlegt, daß der Quotient $u_1(\lambda)/g_1(\lambda)$ eine Reaktanz wird.

4.3 Grad der halbierenden Matrix. Mindestzahl der Schaltelemente.

Bekanntlich ist die Mindestzahl von Schaltelementen, mit der sich die Kettenmatrix eines Reaktanz-Vierpols realisieren läßt, bei geeigneter Zählweise[1] gegeben durch den Grad der Ketten-

[1] Doppelspulen mit fester Kopplung zwischen den beiden Wicklungen zählen als je ein Schaltelement, ideale Übertrager als kein Schaltelement.

[2] Ein einfacher Beweis dieses Satzes ist im Anhang angegeben.

matrix, wenn unter diesem der Grad des Zählerpolynoms mit dem höchsten Grad verstanden wird – reduzierte Schreibweise vorausgesetzt.[2] Eine Schaltung, die mit dieser Mindestzahl wirklich auskommt, heißt eine kanonische Realisierung. Wenn wir wissen wollen, welcher Aufwand erforderlich ist, um die Hälfte eines halbierbaren symmetrischen Reaktanz-Vierpols kanonisch zu realisieren, müssen wir daher nach dem Grad der halbierenden Matrix fragen.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Matrix, die durch einfache Multiplikation der beiden halbierenden Matrizen hervorgeht. Wir benützen die reduzierten Ausdrücke Gl. (2) und Gl. (3). Es ergibt sich

$$\begin{Vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{Vmatrix} \frac{1}{g} \cdot \begin{Vmatrix} g_2 & u_1 \\ u_2 & g_1 \end{Vmatrix} \frac{1}{g} = \begin{Vmatrix} g_1 g_2 + u_1 u_2 & 2\, g_1 u_1 \\ 2\, g_2 u_2 & g_1 g_2 + u_1 u_2 \end{Vmatrix} \frac{1}{g^2} \qquad (35)$$

Der gesuchte Grad der beiden halbierenden Matrizen sei m, der Grad der Matrix der rechten Seite sei r. Letzterer ist gegeben durch den höchsten der vier Grade der vier Zählerpolynome, oder, was dasselbe bedeutet, durch den Grad der Summe der vier Zählerpolynome, also durch den Grad des Polynoms

$$g_1 g_2 + u_1 u_2 + g_1 u_1 + g_2 u_2 = (g_1 + u_2)\,(g_2 + u_1)$$

d. h. durch die Summe der Grade der Polynome $(g_1 + u_2)$ und $(g_2 + u_1)$. Die Polynome g_1, g_2, u_1, u_2 können nun nach [2] die folgenden Grade haben

Grad m	$g_1 g_2$	u_1	u_2	g_1	g_2
Grad $m-1$	$u_1 u_2$	$g_1 g_2$	$g_1 g_2$	$u_1 u_2$	$u_1 u_2$
Grad $m-2$		u_2	u_1	g_2	g_1
Fall	0	1	2	3	4

Im Fall 0 haben die Polynome $(g_1 + u_2)$ und $(g_2 + u_1)$ beide den Grad m, in den vier anderen Fällen hat jeweils das eine den Grad m, das andere den Grad $m-1$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} r &= 2\,m && \text{im Fall 0} \\ r &= 2\,m-1 && \text{in den Fällen 1–4} \end{aligned} \qquad (36)$$

Nun ist der rechte Ausdruck von Gl. (35) nach Gl. (7) identisch mit der Kettenmatrix $\| M \|$ des zu halbierenden symmetrischen

Vierpols, aber, wie wir gesehen haben, nicht in reduzierter Schreibweise. Um diese zu erhalten, muß noch Zähler und Nenner durch das Polynom p_0, das alle endlichen Sperrstellen ungerader Ordnung des gegebenen symmetrischen Vierpols zu einfachen Nullstellen hat, dividiert werden. Das Polynom p_0 möge den Grad ν haben. ν ist also die Zahl aller endlichen und verschiedenen Sperrstellen ungerader Ordnung. Dann gilt für den Grad n des symmetrischen Vierpols:

$$\mathrm{n} = r - \nu \tag{37}$$

Also:

$$n = 2\,m - \nu \qquad \text{im Fall o} \tag{38}$$

$$n = 2\,m - \nu - 1 \quad \text{in den Fällen 1–4}$$

Dies Ergebnis läßt sich noch besser formulieren, wenn man statt ν die Zahl s aller verschiedenen Sperrstellen ungerader Ordnung von $\| M \|$ betrachtet unter Einschluß einer etwaigen Sperrstelle bei $\lambda = \infty$. Im Fall o besitzt die Matrix $\| M \|$ keine Sperrstelle bei $\lambda = \infty$, in den Fällen 1–4 eine solche ungerader Ordnung; im Fall o hat nämlich (wegen der Determinantenregel) $g(\lambda)$ den Grad m der Matrix, der Nenner von $\| M \|$ deshalb ebenfalls den Grad seiner Matrix, was bedeutet, daß $\| M \|$ keine Sperrstelle bei $\lambda = \infty$ besitzt. In den Fällen 1–4 dagegen hat $g(\lambda)$ einen Graddefekt d, also den Grad $m-d$. Dann hat aber auch der Nenner der Matrix $\| M \|$ einen Graddefekt, nämlich den Graddefekt $(2\,m-1) - 2\,(m-d) = 2\,d-1$, die Matrix also, wie behauptet, eine Sperrstelle ungerader Ordnung bei $\lambda = \infty$.

Es ergibt sich so:

$$s = \nu \qquad \text{im Fall o} \tag{39}$$

$$s = \nu + 1 \qquad \text{in den Fällen 1–4}$$

und zusammen mit Gl. (38) in allen Fällen:

$$n = 2\,m - s \tag{40}$$

oder umgekehrt:

$$m = \frac{1}{2}\,(n + s) \tag{41}$$

Dies wichtige Ergebnis lautet in Worten:

Satz 6.

„Der Grad m der halbierenden Matrix ist gleich dem arithmetischen Mittel aus dem Grad n der zu halbierenden Matrix und der Zahl s ihrer (voneinander verschiedenen) Sperrstellen ungerader Ordnung.“

Hat man also beispielsweise einen symmetrischen Vierpol mit lauter Sperrstellen gerader Ordnung, so benötigt man – kanonische Realisierung vorausgesetzt – für den halbierenden Vierpol genau halb so viel Schaltelemente wie für den gegebenen symmetrischen Vierpol. Hat man dagegen einen symmetrischen Vierpol mit lauter einfachen Sperrstellen ($s = n$), so benötigt man für den halbierenden Vierpol genau so viel Schaltelemente wie für den gegebenen.

Anmerkung.

Das letztere Ergebnis bedeutet nicht, daß man in diesem Fall $2n$ Schaltelemente benötigt, wenn man die gegebene Matrix mittels ihrer Hälften in geometrisch-symmetrischer Weise realisieren will. Hier kann sich die Zahl der Schaltelemente demgegenüber erniedrigen, wenn nämlich die beiden Hälften innen mit identischen Längs- bzw. Quer-Reaktanzen zusammenstoßen, die dann verschmelzen können. Das obige Ergebnis bezieht sich auf jede Hälfte für sich.

4.4 Physikalische Bedeutung der Lösung.

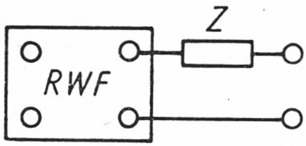
Ein wesentlicher Teil der physikalischen Bedeutung der Lösung unserer Halbierungsaufgabe nach Abs. 2.9 ist bereits erörtert: Der linke Leerlaufwiderstand der linken Hälfte ist identisch mit der Kreuz-Reaktanz Z_b des gegebenen symmetrischen Vierpols, der linke Kurzschlußwiderstand der linken Hälfte mit seiner Längs-Reaktanz Z_a, wobei, wie bisher, Z_a und Z_b die Brückenparameter des gegebenen symmetrischen Vierpols bedeuten, ohne Rücksicht darauf, ob dieser wirklich in Form einer Brücke vorliegt.

Sieht man von der Konstanten c_1 ab, die nur normierende Bedeutung hat – sie macht den Höchstkoeffizienten des Nennerpolynoms $g(\lambda)$ der gesuchten Matrix gleich 1 –, so enthält die Lösung außerdem noch als wesentliche Bestandteile die willkürliche Konstante k und die beiden eindeutig bestimmten normierten Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$. Die Konstante k bedeutet, wie ebenfalls bereits erörtert, daß der linken Hälfte rechts ein idealer Übertrager von beliebiger positiver oder negativer Übersetzung nachgeschaltet werden darf. Es ist demnach nur noch die Bedeutung der beiden Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ zu klären. Diese sind nach unserer Regel die größten gemeinsamen Teiler der Polynompaare g_1 und u_2 bzw. u_1 und g_2 und haben nur einfache Nullstellen auf der imaginären Achse, lassen sich also in einfache Faktoren der Form λ und $(\lambda^2 + \alpha^2)$ zerlegen. Außerdem sind ihre Grade so beschaffen, daß die Polynompaare g_1 und u_2 bzw. u_1 und g_2 höchstens den gemeinsamen Graddefekt 1 besitzen.[1] Aus diesen Feststellungen ergibt sich aber sofort die physikalische Bedeutung der beiden Polynome p_1 und p_2.

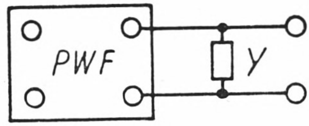
Betrachten wir zunächst das Polynom $p_1(\lambda)$. Nach den in meiner früheren Arbeit [2] angegebenen Regeln bedeutet ein gemeinsamer Teiler λ bzw. $(\lambda^2 + \alpha^2)$ bzw. ein gemeinsamer Graddefekt in den beiden Polynomen g_1 und u_2, daß von der Matrix rechts ein Faktor abgespalten werden kann, der einem Längskondensator, bzw. einem Längsparallelresonanzkreis mit der Resonanz- (Kreis-) Frequenz α, bzw. einer Längsspule, entspricht. Das Polynom p_1 faßt aber gerade diese gemeinsamen Teiler zusammen und entscheidet auch durch seinen Grad darüber, ob ein gemeinsamer Graddefekt vorhanden ist. Es bestimmt somit durch seine Nullstellen $\pm i\alpha_\nu$ und durch seinen Grad die Pole desjenigen Längswiderstandes

[1] Damit ist folgendes gemeint: Sei n der höchste Grad der vier Polynome g_1, g_2, u_1, u_2 und $m \leqq n$ der Grad eines von ihnen. Dann heißt $n - m$ der „Graddefekt“ des betrachteten Polynoms. Der „gemeinsame Graddefekt“ eines Polynompaares ist der kleinere der beiden Graddefekte der beiden Polynome des Paares. Die Ausdrucksweise bezweckt, die Analogie zu den gemeinsamen Teilern hervortreten zu lassen. Die obige Behauptung ergibt sich einfach daraus, daß die Matrix nach der Lösung des Abs. 2.9 realisierbar ist, so daß die vier Quotienten g_1/u_2, u_2/g_2, g_2/u_1 und u_1/g_1 Reaktanzen sind, deren Zähler- und Nennerpolynome den Gradunterschied 1 haben und daß alle mit g bezeichneten Polynome gerade, alle mit u bezeichneten ungerade sind oder umgekehrt.

$z(\lambda)$, den man rechts nach dem Schema von Abb. 7a abspalten kann (aber nicht muß).



a)



b)

RWF = rechtes Reihenweichenfilter. PWF = rechtes Parallelweichenfilter.

Abb. 7. Allgemeiner Reaktanz-Vierpol als Kettenschaltung.
a) aus rechtem Reihenweichenfilter und Längswiderstand.
b) aus rechtem Parallelweichenfilter und Querwiderstand.

Die Partialbruchbeiwerte a_ν des Längswiderstandes in der Partialbruchdarstellung

$$z(\lambda) = a_0/\lambda + \sum_\nu a_\nu \frac{\lambda}{\lambda^2 + \alpha_\nu^2} + a_\infty \lambda \tag{42}$$

berechnet man bekanntlich [2] so, daß sie mit den entsprechenden, d. h. zu den gleichen Polen gehörenden Partialbruchbeiwerten einer der beiden Reaktanzen

$$\begin{aligned} z_{22}(\lambda) &= \frac{g_2(\lambda)}{u_2(\lambda)} \quad \text{(sekundärer Leerlaufwiderstand)} \\ \text{oder } \frac{1}{y_{22}(\lambda)} &= \frac{u_1(\lambda)}{g_1(\lambda)} \quad \text{(sekundärer Kurzschlußwiderstand)} \end{aligned} \tag{43}$$

übereinstimmen, wobei jeweils – bei jedem Partialbruchanteil unabhängig – diejenige der beiden Reaktanzen zu nehmen ist, deren Zähler und Nenner den entsprechenden Teiler λ oder $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ oder den Graddefekt nicht gemeinsam enthält.[1] Schaltungsmäßig entspricht die Längs-Reaktanz nach Gl. (42) einer Reihenschaltung aus einem Kondensator der reziproken Kapazität a_0, aus Parallelresonanzkreisen der Kreisfrequenz α_ν

[1] Diese Regel ist hinreichend, aber nicht notwendig, weil die Partialbruchanteile der beiden Reaktanzen z_{22} und $1/y_{22}$ unter Umständen übereinstimmen, so daß es dann gleichgültig ist, welche genommen wird.

und der reziproken Kapazität a_ν und aus einer Spule der Induktivität a_∞.[1]

Die nach Abspalten der Längs-Reaktanz verbleibende Schaltung hat die Kettenmatrix:

$$\begin{aligned} \| \overline{m} \| &= \begin{Vmatrix} g_1(\lambda) & u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) & g_2(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{g(\lambda)} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -z(\lambda) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \\ &= \begin{Vmatrix} g_1(\lambda) & u_1(\lambda) - z(\lambda)\, g_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) & g_2(\lambda) - z(\lambda)\, u_2(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{g(\lambda)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Die in der rechten Spalte dieser Matrix stehenden Ausdrücke sind Polynome, obwohl natürlich $z(\lambda)$ im allgemeinen eine gebrochene rationale Funktion ist, weil die Polynome $g_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ durch den Nenner $p_1(\lambda)$ der Reaktanz $z(\lambda)$ teilbar sind. Darüber hinaus sind alle vier Zählerpolynome der Matrix (44) ebenso wie das Nennerpolynom $g(\lambda)$ durch $p_1(\lambda)$ teilbar, so daß schließlich alle vier Elemente der Restmatrix durch $p_1(\lambda)$ gekürzt werden können. Auch haben die Zählerpolynome der linken Spalte der Restmatrix keinen gemeinsamen Graddefekt mehr. Von der Restmatrix kann somit rechts kein einer Längs-Reaktanz entsprechender Faktor mehr abgespalten werden. Die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptungen ergibt sich ohne weiteres aus den in der Arbeit [2] bewiesenen Regeln, wenn man alle Abspaltschritte zusammenfaßt, die rechten Längswiderständen entsprechen.

Die physikalische Bedeutung des Polynoms $p_2(\lambda)$ erkennt man ganz analog. Es bestimmt durch seine Nullstellen $\pm i\beta_\nu$ und durch seinen Grad die Pole desjenigen Querleitwerts $y(\lambda)$, den man rechts nach dem Schema von Abb. 7b abspalten kann (aber nicht muß).

Die Partialbruchbeiwerte b_ν des Querleitwertes in der Partialbruchdarstellung:

$$y(\lambda) = b_0/\lambda + \sum_\nu b_\nu \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta_\nu^2} + b_\infty \lambda \tag{45}$$

bestimmt man analog wie oben aus den Partialbruchbeiwerten einer der beiden Reaktanzen

[1] Ist ein a-Wert 0, so fehlt der zugehörige Schaltungsteil.

$$y_{22}(\lambda) = \frac{g_1(\lambda)}{u_1(\lambda)} \quad \text{(sekundärer Kurzschlußleitwert)}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{z_{22}(\lambda)} = \frac{u_2(\lambda)}{g_2(\lambda)} \quad \text{(sekundärer Leerlaufleitwert)}, \tag{46}$$

wobei jedesmal diejenige Reaktanz zu nehmen ist, deren Zähler und Nenner den Teiler λ oder $(\lambda^2 + \beta_\nu^2)$ oder den Graddefekt nicht gemeinsam enthalten. Schaltungsmäßig entspricht der Darstellung (45) eine Parallelschaltung aus einer Spule der reziproken Induktivität b_0, aus Serienresonanzkreisen der Resonanzkreisfrequenz β_ν und der reziproken Induktivität b_ν und aus einem Kondensator der Kapazität b_∞.

Die nach Abspalten der Quer-Reaktanz verbleibende Schaltung hat die Kettenmatrix:

$$\begin{aligned} \| \overline{m} \| &= \begin{Vmatrix} g_1(\lambda) & u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) & g_2(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{g(\lambda)} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -y(\lambda) & 1 \end{Vmatrix} = \\ &= \begin{Vmatrix} g_1(\lambda) - y(\lambda)\, u_1(\lambda) & u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) - y(\lambda)\, g_2(\lambda) & g_2(\lambda) \end{Vmatrix} \frac{1}{g(\lambda)} \end{aligned} \tag{47}$$

Ganz analog zu oben stehen in dieser Matrix lauter Polynome, und zwar durch den Nenner $p_2(\lambda)$ von $y(\lambda)$ teilbare, so daß, weil auch $g(\lambda)$ durch $p_2(\lambda)$ teilbar ist, alle vier Elemente der Kettenmatrix durch $p_2(\lambda)$ gekürzt werden können. Nachdem dies geschehen ist, haben die in der rechten Spalte stehenden Zählerpolynome keinen gemeinsamen Teiler und keinen gemeinsamen Graddefekt mehr, so daß von der Restmatrix rechts kein einem Querleitwert entsprechender Faktor mehr abgespalten werden kann.

Natürlich kann man unsere Schaltung – die linke Hälfte des zu halbierenden symmetrischen Vierpols – nur entweder mit einem Längs- oder mit einem Querwiderstand enden lassen. Im ersteren Falle ist das Polynom $p_1(\lambda)$ maßgebend, im letzteren das Polynom $p_2(\lambda)$.

Weitere Bedeutung gewinnt die Betrachtung der Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ durch den folgenden Satz:

Satz 7.

„Ein rechtes (linkes) Reihen- bzw. Parallel-Weichenfilter ist durch den linken (rechten) Leerlauf- bzw. Kurzschlußwider-

stand und durch die Sperrstellen – einschließlich ihrer Vielfachheit – eindeutig bis auf Äquivalenz und bis auf Rechts- (Links-) Zuschalten eines idealen Übertragers bestimmt."

Ein rechtes (linkes) Reihen- bzw. Parallel-Weichenfilter ist ein Reaktanz-Vierpol, zu dem es keinen äquivalenten gibt, der rechts (links) einen Längs- bzw. Querwiderstand enthält. Aus dieser Definition folgt ergänzend sofort, daß jeder beliebige Reaktanz-Vierpol nach Abb. 7a und 7b durch ein rechtes Reihenweichenfilter mit rechts folgendem Längswiderstand (der auch identisch verschwinden kann) oder auch durch ein rechtes Parallel-Weichenfilter mit rechts folgendem Querleitwert (der auch identisch verschwinden kann) äquivalent dargestellt werden kann. Man erkennt auch, daß der in den Gl. (42) bis (44) bzw. (45) bis (47) geschilderte Prozeß nichts anderes bedeutet als das Herausziehen der in einem allgemeinen Reaktanz-Vierpol steckenden rechten Längs- bzw. Quer-Reaktanz.

Um Satz 7 zu beweisen, betrachten wir etwa ein rechtes Reihenweichenfilter. Seine Kettenmatrix sei in reduzierter Schreibweise:

$$\begin{Vmatrix} g_1/g & u_1/g \\ u_2/g & g_2/g \end{Vmatrix}$$

Die Sperrstellen sind mit der entsprechenden Vielfachheit die Nullstellen des Nennerpolynoms $g(\lambda)$; dazu kommt eine r-fache Sperrstelle bei $\lambda = \infty$, wenn $g(\lambda)$ den Graddefekt r hat. Nach Satz 1 aus der Arbeit [2] haben die Polynome $g_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ keinen gemeinsamen Teiler und keinen gemeinsamen Graddefekt. Der Grad des linken Leerlaufwiderstandes:

$$z_{11}(\lambda) = g_1(\lambda)/u_2(\lambda)$$

stimmt mit dem Grad n der Matrix (höchster der Grade der vier Zählerpolynome), d. h. mit der Zahl n der Sperrstellen überein. Ist nun $z_{11}(\lambda)$ als Reaktanz vom Grade n und ein Sperrstellensatz von n Sperrstellen vorgeschrieben, so sind dadurch die drei Polynome $g_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$ und $g(\lambda)$ bis auf Zahlenfaktoren gegeben, und zwar, wenn man $g(\lambda)$ normiert (Höchstkoeffizient $= 1$), die beiden Polynome $g_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ bis auf einen willkürlichen, reellen, gemeinsamen Zahlenfaktor. Damit ist aber auch der gegenseitige Leerlaufwiderstand:

$$z_{12}(\lambda) = g(\lambda)/u_2(\lambda)$$

bis auf einen reellen Zahlenfaktor gegeben. Ein rechtes Reihenweichenfilter ist aber durch z_{11} und z_{12} eindeutig bis auf Äquivalenz festgelegt[1] und ein Zahlenfaktor in z_{12} bedeutet Rechtsnachschalten eines idealen Übertragers, womit Satz 7 für den Fall des rechten Reihenweichenfilters bewiesen ist. Der Fall des rechten Parallelweichenfilters erledigt sich sinngemäß durch Betrachtung des linken und gegenseitigen Kurzschlußleitwerts $y_{11}(\lambda) = g_2(\lambda)/u_1(\lambda)$ und $-y_{12}(\lambda) = g(\lambda)/u_1(\lambda)$, die beiden Fälle des linken Parallel- oder Reihenweichenfilters durch einfache Vertauschungen.

Wenden wir nun den Satz 7 auf eine Kettenschaltung aus einem rechten Reihen- bzw. Parallelweichenfilter mit einer Längs- bzw. Quer-Reaktanz an, so ergibt sich der

Satz 8.

„Realisiert man die in reduzierter und normierter Polynomform geschriebene Kettenmatrix:

$$\begin{Vmatrix} g_1/g & u_1/g \\ u_2/g & g_2/g \end{Vmatrix}$$

durch die Kettenschaltung aus einem rechten Reihen- bzw. Parallelweichenfilter mit einer rechts angeschalteten Längs- bzw. Quer-Reaktanz, so ist das Weichenfilter durch seinen linken Leerlaufwiderstand $z_{11}(\lambda) = g_1(\lambda)/u_2(\lambda)$ bzw. Kurzschlußleitwert $y_{11}(\lambda) = g_2(\lambda)/u_1(\lambda)$ und durch seine Sperrstellen bis auf Äquivalenz und bis auf Rechtszuschalten eines idealen Übertragers eindeutig bestimmt. Die Sperrstellen des Weichenfilters sind die durch die Nullstellen und den etwaigen Graddefekt des Nennerpolynoms $g(\lambda)$ gegebenen Sperrstellen des ganzen Re-

[1] Der sekundäre Leerlaufwiderstand enthält nur Partialbruchanteile, die mit denen des gegenseitigen und primären Leerlaufwiderstandes fest gekoppelt sind, und ist dadurch mitbestimmt. Andernfalls gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung eine Schaltung, die rechts einen Längswiderstand enthält.

aktanz-Vierpols abzüglich der höchstens einfachen Sperrstellen, welche zur Längs- bzw. Querreaktanz gehören und durch die Nullstellen des größten, gemeinsamen Teilers $p_1(\lambda)$ bzw. $p_2(\lambda)$ der Polynome $g_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ bzw. $g_2(\lambda)$ und $u_1(\lambda)$ und, falls diese Polynome den Graddefekt 1 gemeinsam haben, durch den Punkt $\lambda = \infty$ gegeben sind. Alle Sperrstellen müssen mit Berücksichtigung ihrer Vielfachheit gezählt werden."

Satz 8 lehrt also, daß man einen durch seine Kettenmatrix (oder sonstwie) bis auf Äquivalenz bestimmten Vierpol zwar nicht ganz aus seinem linken Leerlauf- (bzw. Kurzschluß-) Widerstand und aus den Sperrstellen berechnen kann, wohl aber einen wesentlichen Teil, nämlich dasjenige Reihen- (bzw. Parallel-) Weichenfilter, welches durch einen rechts zuzuschaltenden Längs- bzw. Querwiderstand zu dem gesuchten Vierpol ergänzt werden kann, dieses aber nur bis auf einen unbestimmt bleibenden, rechts hinzuzufügenden idealen Übertrager.

Die Lösung unserer Halbierungsaufgabe nach Abs. 2.9 gewinnt nun im Licht dieser Erkenntnisse folgendes Aussehen: Sei der symmetrische, zu halbierende Vierpol durch seine Kettenmatrix, oder – daraus abgeleitet oder unmittelbar – durch seine Brücken-Reaktanzen Z_a und Z_b gegeben. Dann benötigt man zur Konstruktion einer, z. B. der linken Hälfte im allgemeinen beide Brücken-Reaktanzen und die (daraus ableitbaren) Sperrstellen. Den $2r$- oder $(2r-1)$-fachen Sperrstellen des symmetrischen Vierpols entsprechen r-fache Sperrstellen der linken Hälfte. Dann kann man einen Teil der linken Hälfte, nämlich das darin enthaltene rechte Reihen- bzw. Parallelweichenfilter aus der Kreuz-Brückenreaktanz Z_b bzw. aus der Längs-Brückenreaktanz Z_a allein und aus den zugehörigen, nach Satz 8 nicht von der Zusatz-Längs- bzw. Quer-Reaktanz in Anspruch genommenen Sperrstellen berechnen. Die Unbestimmtheit des rechts nachzuschaltenden idealen Übertragers liegt hier in der Natur der Sache. Die Zusatz-Längs- bzw. Quer-Reaktanz muß anderweitig ermittelt werden. Die Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ bestimmen die von der Zusatz-Reaktanz zu liefernden Sperrstellen.

Anhang (zu Abs. 4.3).

Beweis des Satzes: Der Grad der Kettenmatrix ist gleich der Mindestzahl der Schaltelemente.

1. Der Beweis stützt sich auf einen von Cauer [4] bewiesenen Satz, nach welchem die kanonische Widerstands-Partialbruchschaltung (oder Leitwerts-Partialbruchschaltung) mit der Mindestzahl von Schaltelementen auskommt.

Hiernach genügt es zu beweisen, daß die Zahl der Schaltelemente der kanonischen Widerstands-Partialbruchschaltung mit dem Grad der Kettenmatrix übereinstimmt. Unter dem letzteren ist der höchste der Grade der vier Zählerpolynome zu verstehen, wenn die Matrix in reduzierter Polynomform geschrieben wird, d. h. ihre Elemente als Quotienten je zweier Polynome mit gemeinsamem Hauptnenner geschrieben werden.

2. In dieser Schreibweise sind die Zählerpolynome aufgebaut aus Faktoren der Form λ und $(\lambda^2+\alpha_\nu^2)$, wobei jeder Faktor höchstens zweimal vorkommt. Außerdem hat jedes der Polynome mindestens den Grad $n-2$, wenn n der Grad der Matrix ist. Bezeichnet man den Unterschied zwischen dem Grad der Matrix und dem Grad eines beliebigen Zählerpolynoms mit „Graddefekt", so haben die Zählerpolynome demnach die Graddefekte 0, 1 oder 2 [2].

Der Beweis unseres Satzes beruht darauf, daß das Polynom U_2 der Kettenmatrix

$$\begin{Vmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_2 \end{Vmatrix} \frac{1}{G} \tag{1}$$

betrachtet und gezeigt wird, daß jeder in ihm vorkommende Faktor der Form $(\lambda^2+\alpha_\nu^2)$ in der kanonischen Widerstands-Partialbruchschaltung zwei Schaltelemente, jeder Faktor λ und jede Einheit im Graddefekt ein Schaltelement erzeugt, und daß auf diese Weise alle Schaltelemente der kanonischen Widerstands-Partialbruchschaltung entstehen. (Ideale Übertrager zählen nicht, Spulen mit mehreren fest gekoppelten Wicklungen nur einfach.) Ersichtlich ist nämlich die Summe aus der doppelten Anzahl von Faktoren der Form $(\lambda^2+\alpha_\nu^2)$ und aus der einfachen Anzahl (1 oder 2) der Faktoren λ der Grad des Polynoms U_2.

Addiert man noch den Graddefekt, so erhält man nach dessen Definition den Grad der Matrix. Andererseits ist nach dem oben Gesagten die so gebildete Zahl auch gleich der Anzahl der Schaltelemente der kanonischen Widerstands-Partialbruchschaltung, womit der Satz bewiesen wäre.

3. Die kanonische Widerstands-Partialbruchschaltung wird bekanntlich [4] dadurch gewonnen, daß die drei Leerlaufwiderstände in Partialbrüche zerlegt werden und jedem Tripel von zu einem Pol gehörigen Partialbrüchen ein einfacher Schaltungsteil zugeordnet wird. Der Summe der Partialbrüche entspricht die Reihenschaltung der einfachen Schaltungsteile. Die Partialbruchdarstellung der drei Leerlaufwiderstände lautet:

$$
\begin{aligned}
Z_{11}(\lambda) &= A_0/\lambda + \sum_\nu \frac{A_\nu \lambda}{\lambda^2 + \alpha_\nu^2} + A_\infty \lambda \\
Z_{12}(\lambda) &= B_0/\lambda + \sum_\nu \frac{B_\nu \lambda}{\lambda^2 + \alpha_\nu^2} + B_\infty \lambda \qquad (2) \\
Z_{22}(\lambda) &= D_0/\lambda + \sum_\nu \frac{D_\nu \lambda}{\lambda^2 + \alpha_\nu^2} + D_\infty \lambda
\end{aligned}
$$

und es gilt für beliebigen Index:

$$AD - B^2 \geqq 0 \qquad (3)$$

Durch die Polynome der reduziert geschriebenen Kettenmatrix (1) ausgedrückt, lauten die drei Leerlaufwiderstände:

$$
\begin{aligned}
Z_{11}(\lambda) &= G_1(\lambda)/U_2(\lambda) \\
Z_{12}(\lambda) &= G(\lambda)/U_2(\lambda) \qquad (4) \\
Z_{22}(\lambda) &= G_2(\lambda)/U_2(\lambda)
\end{aligned}
$$

Schaltelemente gibt es nach Gl. (2) zu jedem Pol der Leerlaufwiderstände und nur zu diesen. Pole der Leerlaufwiderstände sind nach Gl. (4) entweder Nullstellen oder Graddefekte von U_2. Damit ist aber bereits bewiesen, daß, wenn jeder Faktor $(\lambda \pm i\alpha_\nu)$ und λ (d. h. jede Nullstelle) und jede Einheit Graddefekt zu einem Schaltelement Veranlassung gibt, es weitere Schaltelemente nicht mehr geben kann.

4. Wir betrachten zunächst einen einfachen Faktor $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ bzw. einen einfachen Faktor λ bzw. den Graddefekt 1. Man kann dann mittels der Determinantenregel:

$$G_1 G_2 - U_1 U_2 = G^2 \tag{5}$$

leicht folgern, daß mindestens eines der beiden Polynome G_1 und G_2 durch $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ bzw. λ nicht teilbar ist, bzw. den Graddefekt 0 besitzt. Ist dies bei nur einem der beiden Polynome der Fall, so ist das Polynom G durch $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ bzw. λ teilbar, bzw. besitzt einen Graddefekt. Somit besitzt nach Gl. (4) entweder Z_{11} oder Z_{22} einen entsprechenden Pol, Z_{12} dagegen nicht. Es entstehen bei der Partialbruchzerlegung 2 bzw. 1 bzw. 1 Schaltelemente.

Sind beide Polynome G_1 und G_2 durch $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ bzw. λ nicht teilbar, bzw. haben beide keinen Graddefekt, so gilt dies (Determinantenregel) auch für G. Z_{11}, Z_{12} und Z_{22} haben einen gemeinsamen Pol mit den Residuen A, B und D, und es gilt, wie ich in [2] gezeigt habe, für die Residuen zu diesem Pol: $AD - B^2 = 0$. In der Schaltung entsteht ein sogenannter „festgekoppelter" Teilvierpol mit wiederum 2 bzw. 1 bzw. 1 Schaltelementen.

5. Ist nun U_2 durch $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)^2$ bzw. durch λ^2 teilbar, bzw. besitzt U_2 den Graddefekt 2, so ist G_1 und G_2 genau durch $(\lambda^2 + \alpha_\nu^2)$ bzw. durch λ teilbar, bzw. besitzt genau den Graddefekt 1 und für G gilt dasselbe, nur statt genau mindestens. Wiederum haben Z_{11}, Z_{12} und Z_{22} einen gemeinsamen Pol mit den Residuen A, B und D, aber es gilt, wie ich in [2] gezeigt habe, für die Residuen zu diesem Pol: $AD - B^2 > 0$. In der Schaltung entsteht ein sogenannter „lose gekoppelter" Teilvierpol mit 4 bzw. 2 bzw. 2 Schaltelementen. Damit ist aber der in Ziffer 2 geforderte Beweis erbracht und somit der ganze Satz bewiesen.

Schrifttum.

[1] A. C. Bartlett, Phil. Mag. (7), 4 (1927) S. 902.
[2] H. Piloty, TFT 29 (1940) S. 249–258, 279–290, 320–325.
[3] H. Piloty, TFT 30 (1941) S. 217–223.
[4] W. Cauer, Sitzungsber. Pr. Ak. Wiss. Ph. Math. 1931.