Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Die Brücken-Reaktanzen eines symmetrischen Filters mit vorgeschriebenem Betriebsverhalten.

Von Hans Piloty in München.

Mit einer Abbildung.

Vorgelegt am 3. Oktober 1947.

1. Charakteristische Polynome und Brücken-Reaktanzen.

1.1. Bekanntlich[1] läßt sich jedes symmetrische Filter in allen seinen Eigenschaften bis auf Äquivalenz eindeutig durch die Wahl zweier für das Betriebsverhalten charakteristischer reeller Polynome $P(\lambda)$ und $F(\lambda)$ ($\lambda = i\,\omega$), die keinen Teiler mit rein imaginären Wurzeln gemeinsam haben und von denen das eine gerade, das andere ungerade ist, festlegen. Das Folgende wird übersichtlicher, wenn wir gleich zwei zueinander konjugierter Filter betrachten, konjugiert in dem Sinne verstanden, daß der Betriebs-Übertragungsfaktor des einen Filters mit dem Echo-Übertragungsfaktor des anderen Filters bei Betrieb zwischen denselben Widerständen R übereinstimmt.

Unter dem Betriebs-Übertragungsfaktor $H(\lambda)$ ist diejenige analytische Funktion von $\lambda = i\omega$ (ω = Kreisfrequenz) zu verstehen, deren Logarithmus für reelle Frequenzen das Betriebs-Übertragungsmaß $\mathfrak{g}(\omega) = b(\omega) + i a(\omega)$ ($b(\omega)$ = Betriebsdämpfung, $a(\omega)$ = Betriebsphasenmaß) ergibt. Es ist also $e^{\mathfrak{g}(\omega)} = H(i\omega)$. Hierbei ist vorausgesetzt, daß das Filter zwischen zwei gleichen Ohmschen Widerständen R arbeitet. Der Echo-Übertragungsfaktor $T(\lambda)$ ist definiert durch $T(\lambda) = \frac{R + W(\lambda)}{R - W(\lambda)}$, wobei $W(i\omega)$ die zwischen den Eingangsklemmen gemessene Impedanz bedeutet, wenn die Ausgangsklemmen mit dem Ohmschen Widerstand R abgeschlossen sind. Zwei konjugierte Filter haben die Eigenschaft, daß in Frequenzbereichen, in denen das eine gut

[1] Die hier benützte Theorie von Reaktanzvierpolen (hier kurz „Filter" genannt) mit vorgeschriebenem Betriebsverhalten ist unabhängig von Darlington [2] und mir [1] aufgestellt worden.

durchläßt, das andere gut sperrt und umgekehrt. Näheres hierüber findet sich im Aufsatz [1].

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $P(\lambda)$ das gerade und $F(\lambda)$ das ungerade Polynom ist. $F(\lambda)$ darf auch identisch verschwinden. In diesem speziellen Fall ist $P(\lambda)$ als reelles gerades Polynom ohne rein imaginäre Wurzeln anzunehmen. Dann hat man ein reelles Hurwitz-Polynom $E(\lambda)$ mit positiven Koeffizienten mittels der Gleichung

$$E(\lambda)\, E(-\lambda) = P^2(\lambda) - F^2(\lambda) \tag{1}$$

zu bilden und es in seinen geraden Teil E_g und seinen ungeraden Teil E_u zu zerlegen. Beide Schritte geben immer eine und nur eine Lösung.

Die beiden Betriebs-Übertragungsfaktoren H und H' der beiden zu betrachtenden Filter sind dann

$$\text{(2a)} \qquad H(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{P(\lambda)} \quad \text{und} \quad H'(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{F(\lambda)}. \qquad \text{(2b)}$$

Die beiden Echo-Übertragungsfaktoren T und T' sind:

$$\text{(3a)} \quad T(\lambda) = H'(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{F(\lambda)} \text{ und } T'(\lambda) = H(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{P(\lambda)}, \quad \text{(3b)}$$

sodaß also tatsächlich beide Filter zueinander konjugiert sind. Eines der beiden hat nach Gl. (2a) und (2b) einen Betriebs-Übertragungsfaktor mit geradem, das andere mit ungeradem Nenner. Indem man entweder das eine oder das andere Filter eines Paares betrachtet, kann man also Betriebs-Übertragungsfaktoren beider Arten erzeugen, obwohl $P(\lambda)$ als gerades, $F(\lambda)$ als ungerades Polynom angenommen ist. Deshalb steckt hierin, wie oben behauptet, keine Beschränkung der Allgemeinheit.

1.2. Die Vorschrift zur Gewinnung der Kettenmatrizen K und K' beider Filter lautet:

$$\text{(4a)} \; \|K\| = \frac{1}{P} \cdot \begin{Vmatrix} E_g & E_u - F \\ E_u + F & E_g \end{Vmatrix} \quad \|K'\| = \frac{1}{F} \cdot \begin{Vmatrix} E_u & E_g - P \\ E_g + P & E_u \end{Vmatrix}. \; \text{(4b)}$$

Diese Vorschrift ist eindeutig.[1] Da Filter mit übereinstimmender

[1] In den Kettenmatrizen ist der gegenseitige Kurzschlußwiderstand $\frac{E_u - F}{P}$ bzw. $\frac{E_g - P}{F}$ mit dem Widerstand R (R = Stromquellenwiderstand = Ver-

Kettenmatrix äquivalent sind, führt der geschilderte Weg von den beiden Polynomen F und P zu bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Filtern. In [1] ist bewiesen, daß alle symmetrischen Filter sich in der geschilderten Weise durch zwei Polynome charakterisieren lassen und daß umgekehrt zu jeder so konstruierten Kettenmatrix realisierende Schaltungen existieren.

Es sei noch angemerkt, daß die Kettenmatrizen nach Gl. (4a) oder (4b) in reduzierter Form mit P bzw. F als Hauptnenner geschrieben sind. Hätten nämlich im Gegensatz hierzu alle vier Zähler-Polynome denselben Teiler mit dem Nenner gemeinsam, so wäre dieser auch Teiler von E_g und E_u und hätte deshalb nur imaginäre Wurzeln.[1] Außerdem wäre er auch Teiler von F und P. Wir haben aber gemeinsame Teiler von F und P mit rein imaginären Wurzeln ausdrücklich ausgeschlossen.

War $F(\lambda) \equiv 0$ angenommen worden, so führt unsere Konstruktion auf die Kettenmatrix eines Allpasses bzw. einer Allsperre. Erstere besitzt den Betriebs-Übertragungsfaktor $H = E/P$, wo $E(\lambda)$ der in $P(\lambda)$ steckende Hurwitzfaktor mit positiven Koeffizienten, also $P(\lambda) = \pm E(\lambda)\,E(-\lambda)$ ist. (Oberes [unteres] Vorzeichen, wenn das konstante Glied des Polynoms $P(\lambda)$ positiv [negativ]). Letztere besitzt den Echo-Übertragungsfaktor $T = E/P$.

1.3. Eine der vielen möglichen, eine Kettenmatrix (4a) oder (4b) realisierenden Schaltungen ist die Brückenschaltung nach einer der Varianten von Abb. 1. Ihre beiden Reaktanzen Z_a und Z_b sind durch die Kettenmatrizen nach Gl. (4a) bzw. (4b) eindeutig bis auf Äquivalenz bestimmt. Diese Reaktanzen, die „Brücken-Reaktanzen", kann man ebensogut als charakteristische Bestimmungsstücke des symmetrischen Filters auffassen,

---

braucherwiderstand) multipliziert, der gegenseitige Leerlaufleitwert $\frac{E_u + F}{P}$ bzw. $\frac{E_g + P}{F}$ mit R dividiert zu denken. Einfacher ist es, wie im Folgenden angenommen, R zur Widerstandseinheit zu nehmen und alle Gleichungen als Zahlenwertgleichungen aufzufassen. Auch die imaginäre Kreisfrequenz λ mißt man zweckmäßig in einer passenden Einheit ω_1. Die aus der Rechnung sich ergebenden numerischen Werte für Induktivitäten bzw. Kapazitäten sind dann Zahlenwerte zu den Einheiten R/ω_1 und $1/R\omega_1$.

[1] Gerader E_g und ungerader Teil E_u eines Hurwitz-Polynoms E haben nur rein imaginäre Wurzeln.

auch dann, wenn man die vorgeschriebenen Eigenschaften durch ganz andere Schaltungen realisieren will. Wenn man aber eine solche Schaltung realisieren will, so bietet das keine Schwierigkeit,

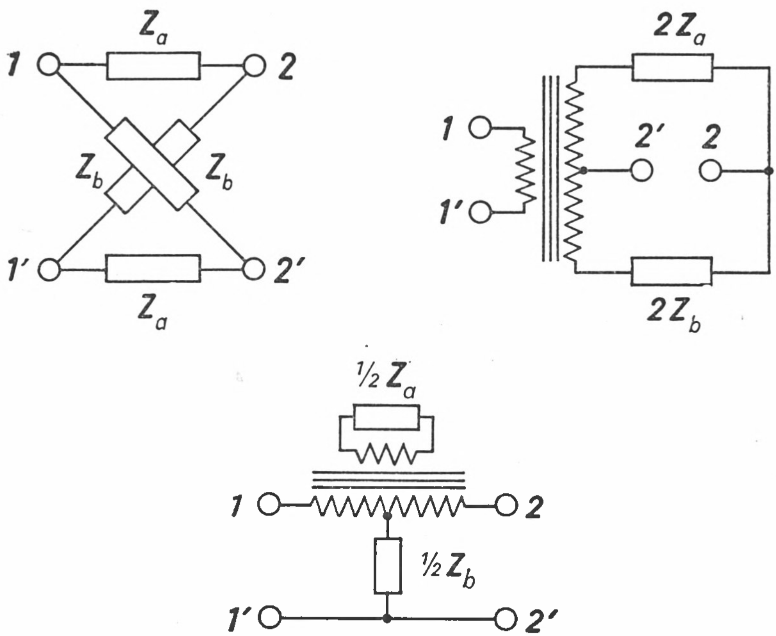

Abb. 1. Brücken-Schaltungen

Z_a = Längs-Reaktanz
Z_b = Kreuzreaktanz

Ideale Differential-Übertrager
Jeder Wicklungsabschnitt hat die gleiche Windungszahl

wenn die Brücken-Reaktanzen als analytische Funktionen $Z_a(\lambda)$ und $Z_b(\lambda)$ vorliegen. Denn es gibt wohlbekannte und einfache Verfahren, zu solchen Funktionen realisierende (zweipolige) Schaltungen zu finden.[1] Die eigentliche Aufgabe dieses Aufsatzes besteht darin, ein möglichst einfaches Verfahren zur Gewinnung der Brücken-Reaktanzen in der Form von gekürzten Brücken aus den Polynomen F und P anzugeben. Das fertige Rezept steht

[1] Vgl. z. B. W. Cauer, „Theorie der linearen Wechselstromschaltungen" Band I, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1941 S. 196 ff. u. S. 199 ff.

in der Hauptsache schon bei Darlington [2], der hier vorgetragene Beweis entstammt im wesentlichen einer brieflichen Mitteilung meines verstorbenen Freundes W. Cauer, jedoch habe ich dem Cauerschen Beweis u. a. durch gleichzeitige Betrachtung zweier konjugierter Filter eine, wie ich glaube, übersichtlichere Form gegeben sowie die physikalische Bedeutung der Vorzeichenfrage genauer behandelt. Auch enthält der Aufsatz ab Absatz 2.3 noch einige weitere für die Anwendung der Theorie nützliche Bemerkungen.

1.4. Bezeichnet man die Längsreaktanz der Brücke mit Z_a, die Kreuzreaktanz mit Z_b, die Leerlaufreaktanz mit Z_{11}, die gegenseitige Leerlaufreaktanz mit Z_{12}, so sind die zu einer reduziert geschriebenen Kettenmatrix[1]

$$\| K \| = \frac{1}{G} \cdot \begin{Vmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_2 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

gehörigen Brückenreaktanzen gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z_a &= Z_{11} - Z_{12} = \frac{G_1 - G}{U_2} = \frac{U_1}{G_1 + G} \\ Z_b &= Z_{11} + Z_{12} = \frac{G_1 + G}{U_2} = \frac{U_1}{G_1 - G} \end{aligned} \tag{6}$$

Wir erhalten also für jede Brückenreaktanz zwei verschiedene Polynomquotienten, von denen der jeweils zweite aus dem ersten vermittels der Determinantenregel der Kettenmatrix

$$G_1^2 - U_1 U_2 = G^2 \tag{7}$$

[1] Die Kettenmatrix ist die zweireihige Matrix der Koeffizienten in den beiden Gleichungen, welche Primärspannung und Primärstrom durch Sekundärspannung und Sekundärstrom ausdrückt:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathfrak{A}_1 (\lambda) U_2 + \mathfrak{B} (\lambda) J_2 \\ J_1 &= \mathfrak{C} (\lambda) U_2 + \mathfrak{A}_2 (\lambda) J_2 \end{aligned}$$

also die Matrix $\begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{A}_2 \end{Vmatrix}$. Ihre Elemente sind rationale Funktionen von λ, können also durch Quotienten aus je zwei Polynomen angeschrieben werden. Bringt man sie auf gemeinsamen Hauptnenner $G(\lambda)$, so heißt die Darstellung reduziert. Diese ist eindeutig, wenn man noch normierend den Höchstkoeffizienten des Hauptnenners gleich 1 wählt.

hervorgeht. Von beiden Quotienten kann nur höchstens einer der gekürzte Bruch sein. In Wirklichkeit ist es keiner von beiden, wie sich weiter unten herausstellen wird.

Setzt man an Stelle der Kettenmatrix (5) die Matrizen (4a) und (4b) ein, so erhält man die Brückenreaktanzen unserer beiden Filter mit gegebenen Betriebseigenschaften zu

$$
\text{(8a)}\quad \begin{aligned} Z_a &= \frac{E_g - P}{E_u + F} = \frac{E_u - F}{E_g + P} \\ Z_b &= \frac{E_g + P}{E_u + F} = \frac{E_u - F}{E_g - P} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Z'_a &= \frac{E_u - F}{E_g + P} = \frac{E_g - P}{E_u + F} \\ Z'_b &= \frac{E_u + F}{E_g + P} = \frac{E_g - P}{E_u - F} \end{aligned} \quad \text{(8b)}
$$

Auch die Darstellungen der Brückenreaktanzen durch die Gl. (8a) und (8b) sind, wie sich zeigen wird, nicht die verlangten durch gekürzte Brüche.

1.5. Bevor eine Darstellung der letztgenannten Art gesucht wird, ist es zweckmäßig, den Zusammenhang zwischen einem Filter und dem zugehörigen (einseitig) umgepolten, dem dualen (widerstandsreziproken) und dem konjugierten noch etwas näher zu betrachten. Wie die Gleichungen (4a) und (4b) zeigen, führt Vorzeichenumkehr von F beim ungestrichenen Filter zum dualen, beim gestrichenen zum umgepolten Filter. Bei den Brückenreaktanzen bedeutet dies, wie die Gleichungen (8a) und (8b) zeigen, den Tausch von Z'_a mit $1/Z_b$[1] bzw. den Tausch von Z'_a mit Z'_b. Analog führt Vorzeichenumkehr von P beim ungestrichenen Filter zum umgepolten, beim gestrichenen zum dualen Filter, und es tauscht Z_a mit Z_b, Z'_a mit $1/Z'_b$. Der Vergleich der beiden Gleichungen (8) lehrt schließlich, daß zwei konjugierte Filter in der Längsreaktanz übereinstimmen ($Z'_a = Z_a$), während die Kreuzreaktanzen zueinander reziprok sind ($Z'_b = 1/Z'_a$).

2. Die Brücken-Reaktanzen in Form von gekürzten Brüchen

2.1. Um nun die verlangte gekürzte Darstellung zu gewinnen, ziehen wir aus der Differenz[2] $P - F$ der beiden gegebenen Poly-

[1] Die Einheit des Widerstandes ist 1.

[2] Genau so gut könnte man die Summe $P + F$ benützen.

nome ihren Hurwitzfaktor $E_\alpha(\lambda)$ heraus. Der Rest hat, da $P+F$ keine Nullstellen auf der imaginären Achse haben kann, die Gestalt $E_\beta(-\lambda)$, wo auch $E_\beta(\lambda)$ ein Hurwitz-Polynom ist. Verlangen wir noch, daß E_α und E_β einen und damit lauter positive Koeffizienten haben soll, so haben wir den Ansatz

$$P(\lambda) - F(\lambda) = \pm E_\alpha(\lambda)\, E_\beta(-\lambda) \tag{9}$$

wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, wenn das notwendigerweise von 0 verschiedene, konstante Glied von $P(\lambda)$ positiv ist, im entgegengesetzten Fall das untere Vorzeichen. Durch Gl. (9) sind bei dieser Festsetzung die beiden Hurwitz-Polynome $E_\alpha(\lambda)$ und $E_\beta(\lambda)$ bis auf belanglose positive Zahlenfaktoren eindeutig bestimmt. Es ist nun

$$E_\alpha(\lambda)\, E_\beta(\lambda) = E(\lambda) \tag{10}$$

wie aus den Gleichungen (1) und (9) leicht hervorgeht. Die Zerlegung von E gemäß Gl. (10) in seine Faktoren E_α und E_β erfordert keinen zusätzlichen Rechenaufwand, da es ohnehin bei der Bestimmung von $E(\lambda)$ nach Gl. (1) am einfachsten ist, die beiden Faktoren E_α und E_β getrennt nach Gl. (9) zu ermitteln.

2.2. Nun ist es nur noch erforderlich, die beiden Hurwitz-Polynome E_α und E_β in ihren geraden (G) und ungeraden (U) Teil gemäß

$$\begin{aligned} E_\alpha &= G_\alpha + U_\alpha \\ E_\beta &= G_\beta + U_\beta \end{aligned} \tag{11}$$

zu zerlegen und die in den Formeln der Gleichungen (8a) und (8b) vorkommenden Polynome durch diese neuen Polynome auszudrücken. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_g &= G_\alpha G_\beta + U_\alpha U_\beta \\ E_u &= G_\alpha U_\beta + U_\alpha G_\beta \end{aligned} \tag{12}$$

und wegen Gl. (9):

$$\begin{aligned} \pm P &= G_\alpha G_\beta - U_\alpha U_\beta \quad &\text{Doppelvorzeichen im gleichen} \\ \pm F &= G_\alpha U_\beta - U_\alpha G_\beta \quad &\text{Sinn wie bei Gl. (9)} \end{aligned} \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (12) und (13) folgen schließlich für die in den Zählern und Nennern der Gleichungen (8a) und (8b) auftretenden Polynome:

$$\begin{aligned} E_g \pm P &= 2\,G_\alpha G_\beta \qquad & E_g \mp P &= 2\,U_\alpha U_\beta \\ E_u \pm F &= 2\,G_\alpha U_\beta \qquad & E_u \mp F &= 2\,U_\alpha G_\beta \end{aligned} \tag{14}$$

(Doppelvorzeichen zu nehmen, wie bei Gl. (9).)
Mithin ergeben sich die Brückenreaktanzen nach den Gleichungen (8a) und (8b), wenn das konstante Glied von $P(\lambda)$

positiv	negativ
(obere Vorzeichen in Gl. (14))	(untere Vorzeichen in Gl. (14))
zu:	zu:

$$\begin{aligned} Z_a &= Z'_a = U_\alpha / G_\alpha \qquad & Z_a &= Z'_a = G_\alpha / U_\alpha \\ Z_b &= 1/Z'_b = G_\beta / U_\beta \qquad & Z_b &= 1/Z'_b = U_\beta / G_\beta \end{aligned} \tag{15}$$

Die Gleichungen (15) lösen die gestellte Aufgabe. Ihre rechten Seiten sind in allen Fällen Quotienten aus dem geraden und dem ungeraden Teil eines und desselben Hurwitz-Polynoms. Gerader und ungerader Teil eines Hurwitz-Polynoms sind aber immer relativ prim. Deshalb sind die Quotienten der Gl. (15) alle die gesuchten gekürzten Brüche.

Außerdem ergibt sich ein weiterer Beweis für die Realisierbarkeit einer nach Ziffer 2 konstruierten Kettenmatrix. Denn Quotienten aus geradem und ungeradem Teil eines Hurwitz-Polynoms sind immer Reaktanzen.

2.3. Die bisherige Darstellung knüpft unmittelbar an die beiden charakteristischen Polynome $F(\lambda)$ und $P(\lambda)$ an, weil diese die Grundlage für die Berechnung von symmetrischen Filtern mit vorgeschriebener Betriebsdämpfung bilden. Man kann aber genau so gut von der in reduzierter Polynomform gemäß Gl. (5) angeschriebenen Kettenmatrix ausgehen. Hat diese einen geraden Hauptnenner G, so braucht man nur an Stelle des Polynoms $P - F$ von Gl. (9) das mit ihm identische Polynom $\frac{1}{2}\,(2\,G + U_1 - U_2)$ zu betrachten und in seine beiden Faktoren $E_\alpha(\lambda)$ und $E_\beta(-\lambda)$ zu zerspalten und dann die Brückenreaktanzen nach Gl. (15), Formeln für Z_a und Z_b, aus deren geraden und ungeraden Teilen zu bilden.

Hat hingegen die Kettenmatrix einen ungeraden Hauptnenner G, sind also in ihr alle mit G bezeichneten Polynome ungerade, alle mit U bezeichneten gerade, so tritt an die Stelle des Polynoms $P - F$ das jetzt mit ihm identische Polynom $-\frac{1}{2}(2G + U_1 - U_2)$ und es sind nach der Zerlegung die Gl. (15), Formeln für Z'_a und Z'_b anzuwenden. Das zwischen den linken und rechten Formeln (15) entscheidende Vorzeichen ist in beiden Fällen das Vorzeichen des konstanten Gliedes des zu zerlegenden Polynoms.

2.4. Bezeichnet man der Kürze halber die in den gekürzten Brüchen der Gl. (15) auftretenden Polynome einheitlich, ohne Rücksicht darauf, ob sie gerade oder ungerade sind, indem man etwa schreibt

$$Z_a = \frac{p_a}{q_a} \qquad Z_b = \frac{p_b}{q_b} \tag{16}$$

so ergeben sich die in der ungekürzten Form der Gl. (6) auftretenden Polynome zu:

$$\begin{aligned} G_1 + G &= 2\, q_a p_b \\ G_1 - G &= 2\, p_a q_b \\ U_1 &= 2\, p_a p_b \\ U_2 &= 2\, q_a q_b \end{aligned} \tag{17}$$

Hieraus ist zu entnehmen, in welcher Weise die Polynome der gekürzten Form in denen der ungekürzten Form wechselseitig als gemeinsame Teiler auftreten. Auch ergibt sich so ein Verfahren zur Bestimmung der vier in den Gl. (6) auftretenden Polynome, bei dem keine Nullstellen von Polynomen bestimmt zu werden brauchen. Allerdings muß hierzu die Kettenmatrix in reduzierter Form, also die Polynome $G_1\, U_1\, U_2\, G$ schon bekannt sein, so daß keine Vereinfachung erreicht wird, wenn diese erst aus den Betriebseigenschaften berechnet werden müssen. Ist aber die Kettenmatrix in dieser Form bekannt, so bestimmt man eines der vier Polynome $p_a q_a p_b q_b$ als größten gemeinsamen Teiler aus zwei der in den Gl. (17) links stehenden Polynomen etwa mittels des Euklidschen Algorithmus und die übrigen durch Division. Beispielsweise kann man p_a (mit willkürlichem positivem Zahlenfaktor) als größten gemeinsamen Teiler von $G_1 - G$ und U_1 bestimmen. p_b folgt dann aus der dritten, q_b aus der zweiten der

Gl. (17) und schließlich q_a entweder aus der ersten oder aus der vierten der Gl. (17). Die beiden letzteren Schritte liefern dasselbe Ergebnis, weil die vier in Gl. (17) links stehenden Polynome nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Determinantenregel der Kettenmatrix:

$$(G_1 + G)(G_1 - G) = G_1^2 - G^2 = U_1 U_2 \tag{18}$$

miteinander verknüpft sind.

2.5. Schließlich zeigen die Gl. (15) noch, daß der Grad des Filters, d. h. der Grad des Polynoms $E(\lambda)$, gleich der Summe der Grade der beiden Brückenreaktanzen ist. Der Grad von Z_a oder Z'_a ist nämlich gleich dem Grad des Polynoms $(G_\alpha + U_\alpha)$, der Grad von Z_b oder Z'_b gleich dem Grad des Polynoms $(G_\beta + U_\beta)$. Die Summe der Grade zweier zusammengehöriger Brückenreaktanzen also gleich dem Grad des Polynoms $E = (G_\alpha + U_\alpha)(G_\beta + U_\beta)$, was zu zeigen war.

Literatur

[1] Piloty, „Wellenfilter, insbesondere symmetrische und antimetrische mit vorgeschriebenem Betriebsverhalten". TFT 28, Heft 10.

[2] Darlington, „Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics". J. of math. and phys. of the Massach. Inst. September 1939.