

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1947

---

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München



## Über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln.

Seinem verehrten Lehrer Herrn Georg Rost  
zum goldenen Doktorjubiläum am 10. 11. 1942 gewidmet.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Mit 3 Figuren.

Vorgelegt am 3. Oktober 1947.

### § 1. Fragestellung und Ergebnis.

**1.1.** Nach einem bekannten Satz von J. Steiner<sup>1</sup> sind die Kegelschnitte (abgekürzt: KS) in einem nicht-ausgearteten<sup>2</sup> Kegelschnittbüschel (abgekürzt: KSB) im allgemeinen paarweise ähnlich, ausgenommen die im KSB enthaltene gleichseitige Hyperbel sowie – je nachdem im KSB zwei, eine oder keine Parabeln enthalten sind – diejenige (reelle oder imaginäre) Ellipse, welche einem Kreis „am nächsten kommt“, bzw. die einzige im KSB enthaltene Parabel bzw. diejenige Hyperbel, welche „am meisten von der gleichseitigen Hyperbel abweicht“. Abgesehen<sup>2</sup> wird dabei von denjenigen KSB, deren sämtliche KS untereinander ähnlich sind.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>a) J. Steiner, Vermischte Sätze und Aufgaben, Journal f. d. r. u. angew. Math. 55 (1858), S. 373 ff.; auch Ges. Werke, Bd. 2, Berlin 1882, S. 679 ff.

b) Vgl. ferner J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Bearb. von H. Schröter. 3. Aufl. durchgesehen von R. Sturm, Leipzig 1898, § 43.

c) Vgl. schließlich Enzyklopädie d. math. Wiss. III 2, 1, S. 98/99 sowie

d) S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie d. Kegelschnitte, herausgeg. v. F. Dingeldey, Leipzig 1895, S. 199 und 355 ff., insbes. S. 361.

<sup>2</sup> Ausgeartete KSB sowie KSB mit lauter untereinander ähnlichen KS (vgl. Fußnote 3) bleiben im folgenden stets außer Betracht. – Dabei wird ein KSB als ausgeartet bezeichnet, wenn alle KS dieses KSB ausgeartet sind (zerfallen).

<sup>3</sup> Die KSB mit lauter untereinander (i. w. S., vgl. Nr. 1. 2. des Textes) ähnlichen KS lassen sich folgendermaßen einteilen: I. Die KSB mit der uneigentlichen Geraden  $g_u$  als Seite des Grundpunktvierecks oder mit  $g_u$  als gemeinsamer Sekante bzw. Tangente aller KS des KSB; diese KSB enthalten je

**1.2.** Wie eine Analyse des faszinierenden Steinerschen Beweises zeigt und wie man auch an Beispielen (etwa am Doppelberührbüschel mit parallelen gemeinsamen Tangenten oder am Hyperoskulationsbüschel) bestätigt, ist im Steinerschen Satz nicht der ursprüngliche elementargeometrische Begriff der Ähnlichkeit zweier KS zugrunde gelegt, sondern, wie auch sonst vielfach üblich,<sup>4</sup> der erweiterte. Es gelten nämlich als ähnlich auch konjugierte Hyperbeln oder ein Paar  $P$  von nicht-parallelen Geraden und eine nicht-ausgeartete Hyperbel  $H$ , wenn der Asymptotenwinkel von  $H$  gleich einem der Winkel von  $P$  ist. Allgemein: Zwei *Hyperbeln* sind ähnlich im *weiteren Sinne*, kurz: ähnlich i. w. S., wenn ihre Asymptotenwinkel gleich oder supplementär sind (d. h. die Summe  $\pi$  besitzen). Unter dem Asymptotenwinkel wird dabei verstanden: Für eine nicht-ausgeartete Hyperbel jeder der beiden, von den Hyperbelasymptoten gebildeten Winkel(-räume) kleiner als  $\pi$ , in dessen Inneren<sup>5</sup> einer der Hyperbeläste liegt; für eine ausgeartete Hyperbel (deren Punkte nicht sämtlich einer Geraden angehören) ein beliebig gewählter unter den vom Geradenpaar gebildeten Winkeln (kleiner als  $\pi$ ). Demgegenüber sollen im folgenden zwei Hyperbeln ähnlich im ursprünglichen oder *im engeren Sinne*, kurz: ähnlich i. e. S., heißen, wenn sie entweder beide ausgeartet oder beide nicht-ausgeartet und wenn ihre Asymptotenwinkel gleich sind.

---

nachdem lauter untereinander ähnliche und zu je zweien ähnlich liegende Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. – II. Die nur gleichseitige Hyperbeln enthaltenden KSB mit lauter eigentlichen und mindestens zwei reellen Grundpunkten.

<sup>4</sup> Man vgl. dazu: R. Müller, Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte, Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, 2. Bd. (1902), 342–344. Den dort genannten Arbeiten ist noch hinzuzufügen: J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1. Bd., Essen 1828, S. 166 ff. Nr. 279. Vgl. ferner Enzyklopädie d. math. Wiss. III 1, 2, S. 1084 und III 2, 1, S. 30.

<sup>5</sup> Unter dem Inneren des von zwei, den gleichen Anfangspunkt besitzenden, nicht-parallelen Halbgeraden  $h_1, h_2$  gebildeten Winkels  $w$ , welcher kleiner als  $\pi$  ist, verstehe man das Innere der konvexen Hülle von  $(h_1 + h_2)$ . Allgemeiner werde als Inneres bzw. Äußeres eines beiderseits unbeschränkten Konvexbogens  $\mathfrak{B}$ , welcher keine Gerade ist, oder einer beschränkten, geschlossenen Konvexkurve  $\mathfrak{C}$  das Innere bzw. Äußere der konvexen Hülle von  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{C}$  bezeichnet.

Als ähnlich i. w. S. gelten irgend zwei Parabeln, wobei z. B. auch die eine in ein reelles, die andere in ein imaginäres Parallelenpaar ausgeartet sein kann. Hingegen gelten als ähnlich i. e. S. nur zwei nicht-ausgeartete Parabeln sowie zwei ausgeartete Parabeln, welche entweder beide aus reellen oder beide aus imaginären Parallelenpaaren bestehen.<sup>6</sup>

Schließlich sind zwei Ellipsen als ähnlich i. w. S. zu bezeichnen, wenn sie beide das gleiche Achsenverhältnis besitzen, und zwar auch dann, wenn eine von ihnen reell, die andere aber imaginär ist, d. h. keine reellen Punkte enthält, oder wenn mindestens eine der beiden Ellipsen ausgeartet ist. Hingegen sind zwei Ellipsen ähnlich i. e. S., wenn sie gleiches (reelles) Achsenverhältnis besitzen und beide nicht-ausgeartet sowie beide reell oder beide nicht-ausgeartet sowie beide imaginär sind oder beide ausgeartet sind.<sup>7</sup>

Die Paare von KS eines KSB, welche im Sinne des Steinerschen Satzes einander ähnlich sind (also gegebenenfalls auch nur i. w. S.) seien im folgenden als Steiner(sche) Paare bezeichnet, abgekürzt: St.-Paare. Handelt es sich speziell um St.-Paare von Hyperbeln bzw. Parabeln bzw. Ellipsen, so sprechen wir kurz von St.H.-Paaren bzw. St.P.-Paaren bzw. St.E.-Paaren.

**1.3.** Daß im Steinerschen Satze die Ähnlichkeit i. w. S. zugrunde gelegt ist, geht aus dem Text der Steinerschen Arbeit<sup>8</sup> hervor und ist auch von den Herausgebern seiner Vorlesungen<sup>9</sup> betont worden.

Es bleibt aber *erstens* z. B. die Frage offen, *welche* unter den *St.H.-Paaren* eines KSB *aus im engeren Sinne ähnlichen Hyper-*

<sup>6</sup> Parabeln können in imaginäre Parallelenpaare nur ausarten bei KSB mit vier imaginären Grundpunkten sowie bei Berühnbüscheln mit uneigentlichem, reellem Berührungspunkt, eigentlicher reeller gemeinsamer Tangente und zwei imaginären eigentlichen Grundpunkten.

<sup>7</sup> Ausgeartete Ellipsen (Nullellipsen) können nur auftreten bei KSB mit vier imaginären Grundpunkten sowie bei Berühnbüscheln mit einem zweifach zählenden reellen Grundpunkt und zwei imaginären Grundpunkten, während imaginäre Ellipsen nur bei vier imaginären Grundpunkten möglich sind.

<sup>8</sup> a. a. O. Fußnote 1a, S. 373.

<sup>9</sup> a. a. O. Fußnote 1b, S. 253 ff. – Dort finden sich auch einzelne Anmerkungen betr. die Paare von i. e. und i. w. S. ähnlichen KS der KSB. Die Textfassung in der zitierten 3. Aufl. kam erst nach Abschluß vorliegender Arbeit zu unserer Kenntnis.

*beln bestehen*, oder etwas allgemeiner formuliert: welche Asymptotenwinkel (einschließlich der für ausgeartete KS) in einem vorgegebenen KSB mehr als einmal, also genau zweimal, auftreten; und zweitens z. B. die *Frage nach allen<sup>2</sup> KSB, in welchen alle St.H.-Paare aus nur im weiteren Sinne ähnlichen Hyperbeln bestehen oder in welchen alle St.H.-Paare von nicht-ausgearteten Hyperbeln aus im engeren Sinne ähnlichen Hyperbeln bestehen.*<sup>10</sup>

Anmerkung. Die entsprechende (aber nur bei KSB mit lauter imaginären Grundpunkten aktuelle) Frage nach der Verteilung der verschiedenen Werte des Achsenverhältnisses  $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) auf die reellen und imaginären Ellipsen des KSB läßt sich an Hand der algebraischen Entwicklungen<sup>10a</sup> ohne weiteres beantworten.

1.4. Bei der Untersuchung der in Nr. 1. 3. angegebenen, auf die St.H.-Paare bezüglichen Fragen bemerkte ich, daß ihre Beantwortung *für den Fall der KSB mit mindestens einer Parabel rein geometrisch* (d. h. ohne Rechnung) durch eine, *nur einfachste nicht-algebraische Eigenschaften der KSB benötigende* Stetigkeitsbetrachtung gewonnen werden kann und daß durch diese Betrachtung *zugleich ein Beweis des Steinerschen Satzes selbst geliefert wird, soweit er sich auf die Hyperbeln des KSB bezieht.*

Dabei zeigt es sich, daß die *Ergebnisse nur abhängen von den Asymptotenwinkeln der ausgearteten KS* des betrachteten KSB,<sup>11</sup> ferner daß die Ergebnisse *allgemeiner* gelten für – grob gesprochen – *Büschel von (nicht notwendig algebraischen) Kurven zweiter* (linearer Realitäts-) *Ordnung*, welche paarweise nur die vier Grundpunkte (soweit diese reell sind) gemeinsam haben und deren

<sup>10</sup> Der einfacheren Formulierung wegen sehen wir hier (und gelegentlich auch im folgenden) ab von den ausgearteten KS des KSB sowie von denjenigen Hyperbeln, welche (i. w. S.) ähnlich sind zu einem dieser ausgearteten KS. Vgl. auch Nr. 2. 3. 2. und Nr. 2. 4. 2. des Textes.

<sup>10a</sup> Vgl. G. Rost, Algebraische Ableitung des Steinerschen Satzes über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln, Sitz.-Ber. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Kl. Jahrgang 1947, S. 115 ff.

<sup>11</sup> In der Tat *handelt es sich beim Steinerschen Satz letzten Endes um Feststellungen lediglich über die Asymptotenwinkel* (der Hyperbeln des KSB). Die Winkel der ausgearteten Hyperbeln sowie der (den etwa vorhandenen Parabeln des KSB entsprechende) Winkel Null erscheinen als Grenzwerte der Asymptotenwinkel der nicht-ausgearteten Hyperbeln des KSB.

jede eindeutig durch einen (geeigneten) fünften Punkt bestimmt ist (vgl. Nr. 2.5., 2.5.1., 2.8.).

**1.4.1.** Herr G. Rost, welchem ich die in Nr. 1.3. gestellten Fragen (mit Ausnahme der zweiten, soweit sie sich auf die *i. e. S.* ähnlichen Hyperbeln bezieht) sowie den in Nr. 1.4. erwähnten Beweisgedanken (mit noch sehr unvollständigem Ergebnis insbesondere bezüglich der zweiten Frage) mitteilte, hat daraufhin diese Fragen für alle KSB auf algebraischem Wege vollständig erledigt (vgl. die nachstehende Note<sup>10a</sup> von Herrn Rost); sein diesbezügliches Manuskript hat Herr Rost mir liebenswürdigerweise zur Einsichtnahme überlassen. Nach Kenntnisnahme des daraufhin von mir verfaßten Textes der Nr. 2.1.–2.5.1. vorliegender Arbeit hat ferner Herr Rost die Vermutung ausgesprochen, daß sich auch die übrigen Fälle der KSB, insbesondere also *die KSB ohne Parabeln, durch entsprechende Stetigkeitsbetrachtungen rein geometrisch erledigen* lassen.<sup>12</sup> Diese Vermutung konnte ich (vgl. Nr. 2.7. und Nr. 3.2.) bestätigen. *Allerdings ist für die KSB ohne Parabeln* – im Unterschied zu den KSB mit Parabeln (vgl. Nr. 2.7.) – der Stetigkeitsbeweis nur möglich<sup>13</sup> bei *Heranziehung weiterer Eigenschaften der KSB*, welche aber ohne weiteres aus dem von Steiner für seinen Satz gegebenen Beweis entnommen werden können; daß diese Heranziehung zusätzlicher Eigenschaften (über die bei den KSB mit Parabeln benötigten hinaus) in der Natur der Sache begründet ist, wird sich im Verlaufe der Betrachtungen ergeben (vgl. Nr. 3.1.). Will man den Steinerschen Satz und seine Verschärfung auf Kurvenbüschel ausdehnen, welche eine Verallgemeinerung der KSB *ohne Parabeln* darstellen, so empfiehlt sich zunächst eine Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit der eben erwähnten zusätzlich herangezogenen Eigenschaften der KSB. Wie aus einem Satz über gewisse reelle Funktionen folgt, der auch an sich nicht ohne Interesse zu sein

---

<sup>12</sup> Im folgenden bezeichnen wir die Fälle der KSB *mit* bzw. *ohne* Parabeln auch als die Fälle der KSB mit konvexem bzw. mit nicht-konvexem Grundpunktviereck, gleichgültig ob die Grundpunkte sämtlich reell sind oder nicht.

<sup>13</sup> Für KSB ohne Parabeln liefert die Stetigkeitsbetrachtung ohne Heranziehung weiterer Eigenschaften ein Kennzeichen nur dafür, daß ein Winkel als Asymptotenwinkel im KSB *mindestens* zweimal auftritt.

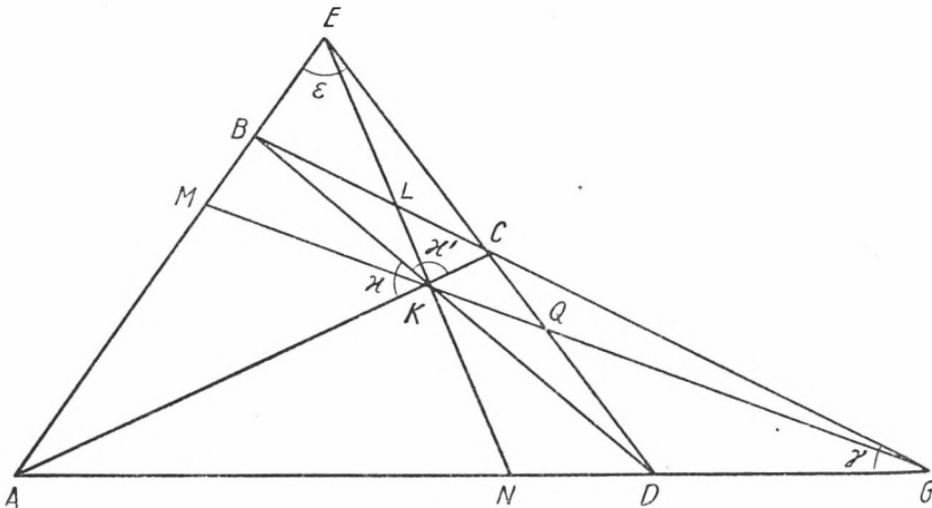
scheint, lassen sich die erwähnten Eigenschaften in der Tat auf einige wenige zurückführen (vgl. Nr. 3.4.).

**1.4.2.** Wie aus Nr. 1.4., 1.4.1. hervorgeht, ist die vorliegende Untersuchung (§§ 2, 3) durchaus *geometrisch und zugleich auf Verallgemeinerung über die KSB hinaus gerichtet*. Eine algebraische Behandlung des Steinerschen Satzes und seiner in §§ 2, 3 erörterten Verschärfung für KSB bringt die erwähnte Note<sup>10a</sup> von Herrn Rost. Für sein liebenswürdiges Interesse an gegenwärtiger Untersuchung sowie für eine Reihe von Bemerkungen dazu möchte ich Herrn Rost auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

## § 2. Büschel von Kurven zweiter Ordnung bei konvexem Grundpunktviereck.

**2.0.** Um an Bekanntes anknüpfen zu können, wollen wir Beweis und Ergebnis zunächst für den speziellen Fall der *Kegelschnittbüschel* (KSB) darlegen.<sup>2</sup> Die Ausdehnung auf Fälle allgemeinerer Kurvenbüschel ergibt sich dann fast ohne weiteres (vgl. Nr. 2.5., 2.8. und 3.4.).

**2.1.** Wir betrachten zunächst (§ 2) den Fall der KSB mit konvexem Grundpunktviereck.



Figur 1

**2.1.1.** Es seien also (vgl. Fig. 1) in der euklidischen Ebene die eigentlichen Punkte  $A, B, C, D$  die Ecken eines *konvexen* Vier-

ecks  $V$ . Dabei sei zunächst  $V$  nicht entartet, d. h. keine drei der vier Punkte seien kollinear. Ferner sei  $A, B, C, D$  eine solche Reihenfolge der vier Ecken, wie sie der Durchlaufung der Begrenzung von  $V$  in einem bestimmten Sinne entspricht. Weiter seien  $E$  bzw.  $G$  bzw.  $K$  die Schnittpunkte der<sup>14</sup> „Gegenseiten“  $AB$  und  $CD$  bzw.  $BC$  und  $DA$  bzw. der „Diagonalen“  $BD$  und  $CA$  von  $V$ . Die Schnittpunkte der Geraden  $EK$  bzw.  $GK$  mit  $BC$  und  $DA$  bzw. mit  $AB$  und  $CD$  seien  $L$  und  $N$  bzw.  $M$  und  $Q$ .

Der Fall, daß  $E$  oder  $G$  oder beide uneigentlich sind, also  $V$  ein Trapez bzw. Parallelogramm ist, sei eingeschlossen.

Derjenige Winkelraum mit dem Scheitel  $E$  bzw.  $G$  bzw.  $K$ , welcher nicht größer ist als  $\pi$  und in dessen Innern<sup>5</sup>  $K$  bzw.  $K$  bzw.  $M$  gelegen ist (auf dessen Schenkeln also  $B$  und  $C$  bzw.  $C$  und  $D$  bzw.  $B$  und  $A$  liegen), besitze das Winkelmaß  $\varepsilon$  bzw.  $\gamma$  bzw.  $\varkappa$ . Ferner werde gesetzt:

$$\varepsilon' = \pi - \varepsilon, \quad \gamma' = \pi - \gamma, \quad \varkappa' = \pi - \varkappa.$$

Dann hat man folgende Ungleichungen:

- (I)  $0 \leq \varepsilon \leq \varkappa' \leq \pi$ , also auch  $\varkappa \leq \varepsilon'$ ,  
 (II)  $0 \leq \gamma \leq \varkappa \leq \pi$ , also auch  $\varkappa' \leq \gamma'$ .

Anmerkung. Die Fälle uneigentlicher Punkte  $E$  bzw.  $G$  entsprechen den Fällen  $\varepsilon = 0$  bzw.  $\gamma = 0$ . Ebenso sind die in Nr. 2.1.2. zu besprechenden Grenzfälle für das Grundpunktviereck durch Zulassung von Gleichheitszeichen in (I) und (II) sowie in den später noch auftretenden Ungleichungen der Nr. 2.2. bereits mitberücksichtigt.

Zusatz. Zu beliebigen  $\varepsilon, \gamma, \varkappa$ , für welche  $0 \leq \varepsilon < \varkappa' < \pi$  und  $0 \leq \gamma < \varkappa < \pi$  gilt (vgl. (I) und (II)), existieren (unbegrenzt viele) nicht-entartete, konvexe Vierecke, welche  $\varepsilon$  und  $\gamma$  als Gegenseitenwinkel und  $\varkappa$  als Diagonalenwinkel besitzen.

**2.1.2.** Die sämtlichen möglichen Grenzfälle für KSB, welche dem Übergang von nicht-entarteten konvexen Grundpunktvierecken zu entarteten entsprechen,<sup>2</sup> also dem Zusammenrücken eines oder mehrerer der Grundpunkte, sind diese:

<sup>14</sup> Im folgenden wird die *Verbindungsgerade* zweier Punkte  $R$  und  $S$  mit  $\overline{RS}$  bezeichnet, hingegen die von  $R$  und  $S$  begrenzte *offene Strecke* mit  $\overline{RS}$  oder  $\overline{SR}$ .

**A<sub>1</sub>.** Berührbüschel. Im Punkte  $C$ , welcher jetzt als Grundpunkt des KSB zweifach zählt, besitzen alle KS des KSB die gemeinsame Tangente  $t$ ; außerdem sind noch zwei verschiedene je einfach zählende (eigentliche) Grundpunkte  $A$  und  $B$  vorhanden, welche weder auf  $t$  liegen noch mit  $C$  kollinear sind. Da die für uns in Betracht kommenden Berührbüschel durch Grenzübergang aus KSB mit konvexem, nicht-*ausgeartetem* Grundpunktviereck erhältlich sein sollen, so *liegen  $A$  und  $B$  auf der gleichen Seite von  $t$ .*

**A<sub>2</sub>.** Doppelberührbüschel. Im Punkte  $A$  und im Punkte  $C$ , welche beide (eigentlich sind und) jetzt als je zweifache Grundpunkte zählen, besitzen alle KS des KSB je die gemeinsame Tangente  $t$  bzw.  $t'$ ; dabei sind  $t$  und  $t'$  fremd zu  $C$  bzw. zu  $A$ . (Dieser Fall ergibt sich auch aus  $A_1$  durch Zusammenrücken von  $A$  und  $B$ .)

**A<sub>3</sub>.** Oskulationsbüschel. Im (eigentlichen) Punkte  $C$ , welcher jetzt als dreifacher Grundpunkt des KSB zählt, besitzen alle KS des KSB eine Berührung zweiter Ordnung; die gemeinsame Tangente in  $C$  sei  $t$ . Außerdem existiert noch ein zu  $t$  fremder (einfach zählender) eigentlicher Grundpunkt  $A$ . Da auch dieser Grenzfall durch Grenzübergang aus Fällen mit nicht entartetem konvexen Grundpunktviereck erhältlich sein soll, so enthalten diese *Oskulationsbüschel zwei (nicht ausgeartete) Parabeln.*

**A<sub>4</sub>.** Hyperoskulationsbüschel (mit eigentlichem, vierfach zählendem Grundpunkt).

Beim Grenzübergang von nicht entarteten, konvexen Grundpunktvierecken aus ergeben sich andererseits, entsprechend den Fällen  $A_1, \dots, A_4$ , für die Winkel  $\varepsilon, \gamma, \kappa$  die Bedingungen:

$$(A_1) \quad 0 \leq \varepsilon < \kappa' < \pi; \quad 0 < \gamma = \kappa < \pi \quad \text{oder} \quad 0 \leq \gamma < \kappa < \pi; \\ 0 < \varepsilon = \kappa' < \pi;$$

$$(A_2) \quad 0 \leq \varepsilon < \pi; \quad 0 = \gamma = \kappa \quad \text{oder} \quad 0 \leq \gamma < \pi; \quad 0 = \varepsilon = \kappa';$$

$$(A_3) \quad 0 < \gamma = \kappa = \varepsilon' < \pi;$$

$$(A_4) \quad \varepsilon' = \gamma = \kappa = \pi \quad \text{oder} \quad 0 = \varepsilon' = \gamma = \kappa.$$

Da für nicht-*ausgeartete* KSB<sup>2</sup>, welche aus KSB mit nicht-entartetem konvexem Grundpunktviereck durch Übergang zu entarteten Grundpunktvierecken (mit eigentlichen Grundpunkten) als Grenzfälle erhältlich sind, keine anderen Möglichkeiten als

die Fälle  $A_1, \dots, A_4$  bestehen, da ferner die soeben angegebenen Bedingungen  $(A_1), \dots, (A_4)$  für die  $\varepsilon, \gamma, \kappa$  nur bei entartetem Grundpunktviereck erfüllt sein können und da sie sich gegenseitig ausschließen, so können wir die Festsetzung treffen, daß die Bedingungen  $(A_j)$  kennzeichnend sein sollen für den Grenzfall  $A_j, j = 1, \dots, 4$ . Demgemäß liegt also ein Grenzfall dann und nur dann vor bzw. nicht vor, wenn  $\gamma = \kappa$  oder  $\varepsilon = \kappa'$  ist bzw. wenn  $\gamma < \kappa$  und  $\varepsilon < \kappa'$  ist (vgl. Nr. 2.1.1., (I) und (II)).

*Zusatz.* Zu vorgegebenen  $\varepsilon, \gamma, \kappa$ , welche bzw. den Bedingungen  $(A_1), \dots, (A_4)$  genügen, im übrigen aber beliebig gewählt sind, existieren entartete Vierecke mit diesen Winkeln.

**2.1.3.** Die in Nr. 2.1.2. besprochenen Grenzfälle zusammen mit denjenigen KSB, welche lauter reelle Grundpunkte und nicht-entartete, konvexe Grundpunktvierecke besitzen, sollen im folgenden zusammenfassend als KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck bezeichnet werden.<sup>12</sup> – Zur Abkürzung bezeichnen wir außerdem ein *Steinersches Hyperbel-Paar* (St.H.-Paar) als nicht-ausgeartet bzw. als ausgeartet, wenn keine bzw. mindestens eine Hyperbel des Paares ausgeartet ist. Ferner sprechen wir von St.H.-Paaren im weiteren Sinne (i. w. S.) bzw. im engeren Sinne (i. e. S.), je nachdem die Hyperbeln des Paares einander ähnlich nur im weiteren bzw. im engeren Sinne sind; ein *ausgeartetes* St.H.-Paar gehört zu den St.H.-Paaren i. w. S. bzw. i. e. S., je nachdem eine oder beide Hyperbeln des Paares ausgeartet sind. Soweit im folgenden von St.H.-Paaren (schlechthin) die Rede ist, sind sowohl ausgeartete als nicht-ausgeartete St.H.-Paare zugelassen.

**2.2.** Als Antwort auf die erste der in Nr. 1.3. gestellten Fragen ergibt sich zunächst der

**Satz.** Die Asymptotenwinkel  $\varphi$  der nicht-ausgearteten Hyperbeln eines Kegelschnittbüschels mit reell-konvexem Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$  lassen sich eineindeutig den inneren<sup>15</sup> Punkten der folgenden vier Intervalle zuordnen:

$$\begin{array}{ll} (\varepsilon) & 0 \leq \varphi \leq \varepsilon; & (I') & \kappa \leq \varphi \leq \varepsilon'; \\ (\gamma) & 0 \leq \varphi \leq \gamma; & (II') & \kappa' \leq \varphi \leq \gamma'. \end{array}$$

<sup>15</sup> Soweit solche inneren Punkte vorhanden, d. h. die Intervallendpunkte verschieden sind.

Den Endpunkten der vier Intervalle entsprechen eindeutig die ausgearteten KS sowie die Parabeln des KSB; und zwar wird z. B. von  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  der gleiche KS geliefert, während die Parabeln dem Nullpunkt entsprechen.

Bew.<sup>16</sup> **a)** *Das Viereck  $V$  sei zunächst nicht entartet.*

**(a<sub>1</sub>)** Man gehe etwa aus von einer dem  $\mathfrak{B}$  umschriebenen (nicht-ausgearteten) Ellipse  $\mathfrak{E}$ ; solche  $\mathfrak{E}$  gibt es.<sup>17</sup> Es liegen  $E$  und  $G$  im Äußeren von  $\mathfrak{E}$  (weil die (offenen) Strecken  $\overline{AB}$  usw. im Innern der konvexen Kurve  $\mathfrak{E}$  liegen müssen). Die (offene<sup>14</sup>) Strecke  $\overline{LE}$  (vgl. Nr. 2.1.1. bzw. Fig. 1) wird von  $\mathfrak{E}$  in genau einem Punkt  $P$  getroffen (weil von ihren Endpunkten einer im Innern, der andere aber im Äußern der konvexen Kurve  $\mathfrak{E}$  liegt). Man lasse nun  $P$  auf  $\overline{LE}$  stetig und *monoton* gegen  $E$  wandern. Dann ändert sich der durch  $A, B, C, D, P$  gehende, eindeutig bestimmte, nicht-ausgeartete KS ebenfalls stetig. Da dieser KS in das Geradenpaar  $AB, CD$  zerfällt, sobald  $P = E$  geworden ist, so geht  $E$  bei der monotonen Änderung von  $P$  zunächst in eine Parabel über, die etwa für  $P = L_0$  vorliegen möge, sodann in nicht-ausgeartete Hyperbeln  $\mathfrak{H}(P)$ . Dabei liegen dann  $A, B, C, D, P$  sämtlich auf dem gleichen Ast  $\mathfrak{A}(P)$  von  $\mathfrak{H}(P)$ ; denn ein Punkt der Strecke  $\overline{LE}$  bildet zusammen mit den  $A, \dots, D$  ein konvexes Fünfeck.<sup>18</sup> Außerdem liegt die Strecke  $\overline{PE}$  im Äußern von  $\mathfrak{A}(P)$ ; denn  $L$  liegt im Innern und  $E$  im Äußern des konvexen (unbeschränkten) Bogens  $\mathfrak{A}(P)$ .

**(a'<sub>1</sub>)** *Bei der in (a<sub>1</sub>) betrachteten monotonen Änderung von  $P$  wächst der Asymptotenwinkel  $\varphi$  von  $\mathfrak{H}(P)$ . In der Tat: Liegt*

<sup>16</sup> Beim nachfolgenden Beweis berufen wir uns auf bekannte Stetigkeitseigenschaften der KS. Eine strenge Begründung aller Einzelheiten unserer Betrachtung bietet keine grundsätzliche Schwierigkeit. Wir können daher auf eine ausführliche Durchführung verzichten. Vgl. dazu auch die Analyse des Beweises in Nr. 2.5.

<sup>17</sup> Vgl. z. B. Gundelfinger-Dingeldey, a. a. O. Anm. 1, S. 357. Man kann statt von  $\mathfrak{E}$  auch von einer Parabel ausgehen.

<sup>18</sup> Fünf Punkte einer nicht ausgearteten Hyperbel, welche ein konvexes Fünfeck bilden (d. h. auf der Begrenzung ihrer konvexen Hülle liegen), können nicht zwei verschiedenen Ästen der Hyperbel angehören; dies gilt allgemeiner für zweiästige Kurven zweiter linearer (Realitäts-)Ordnung. Vgl. z. B. Haupt, Bemerkungen über Konvexbogen, Monatshefte f. Math. u. Physik 50 (1943), Nr. 1.5.1.

etwa  $P''$  auf  $\overline{L_0E}$  zwischen  $P'$  und  $E$ , ferner  $P'$  seinerseits zwischen  $L_0$  und  $P''$ , so liegt, nach dem vorhin Bewiesenen, eine Umgebung von  $P''$  auf  $\mathfrak{A}(P'')$  im Äußeren von  $\mathfrak{A}(P')$ . Da aber  $\mathfrak{A}(P')$  mit  $\mathfrak{A}(P'')$  genau die Punkte  $A, B, C, D$  gemeinsam hat und da  $P''$  auf  $\mathfrak{A}(P'')$  zwischen  $B$  und  $C$  liegt,<sup>19</sup> so liegen schließlich alle<sup>20</sup> Punkte von  $\mathfrak{A}(P'')$  im Äußeren von  $\mathfrak{A}(P')$ . Daher<sup>21</sup> ist der Asymptotenwinkel  $\varphi$  von  $\mathfrak{A}(P'')$  größer als der von  $\mathfrak{A}(P')$ . Daraus folgt ohne weiteres ( $\epsilon$ ). Ganz entsprechend beweist man ( $\gamma$ ).

(a<sub>2</sub>) Zum Beweise von (I') gehe man aus von dem Geradenpaar  $BD, CA$  und lasse den Punkt  $P$  stetig und monoton die Strecke  $\overline{KM}$  durchlaufen. Man erhält dann eine stetige Schar von nicht-ausgearteten Hyperbeln  $\mathfrak{H}(P)$ , deren einer Ast  $\mathfrak{A}(P)$  die Punkte  $P, A$  und  $B$  enthält, nicht aber die Punkte  $C$  und  $D$ . In der Tat: Ein Hyperbelast  $\mathfrak{A}(P)$ , welcher neben  $P$  etwa den Punkt  $C$  enthielte, würde mit  $BD$  eine ungerade Anzahl Punkte, also genau einen Punkt gemeinsam haben, also entweder  $B$  oder  $D$ . Es liege etwa  $B$  auf  $\mathfrak{A}(P)$  und mithin  $D$  auf dem zweiten Aste der betrachteten Hyperbel, also im Äußeren von  $\mathfrak{A}(P)$ . Nun verläuft aber die Strecke  $\overline{BD}$  in der Nähe von  $B$  im Innern des von  $B, C$  und  $P$  aufgespannten Dreiecks, also im Innern von  $\mathfrak{A}(P)$ . Widerspruch. Ganz entsprechend erledigt man den Fall, daß  $D$  auf  $\mathfrak{A}(P)$  liegt. Da  $\mathfrak{A}(P)$  somit genau  $A, B$  und  $P$  enthält sowie fremd ist zu  $\overline{BK}$  und  $\overline{AK}$ , so liegen schließlich alle<sup>20</sup> Punkte von  $\mathfrak{A}(P)$  in der zu  $K$  fremden, von  $AB$  begrenzten Halbebene. Daher kann man entsprechend wie in (a<sub>1</sub>) folgern, daß bei der monotonen Bewegung von  $P$  auf  $\overline{KM}$  gegen  $M$  der Asymptotenwinkel von  $\mathfrak{A}(P)$  wächst. Daraus folgt dann (I'). Ganz ebenso ergibt sich (II').

b) Das Viereck  $\mathfrak{B}$  sei entartet im Sinne einer der Grenzfälle  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  (Nr. 2.1.2.).

Durch ganz entsprechende Stetigkeitsbetrachtungen wie in a) zeigt man, daß in allen diesen Grenzfällen für die Asymptoten-

<sup>19</sup> Projiziert man nämlich die Punkte  $A, B, P, C, D$  z. B. von dem im Innern des  $\mathfrak{A}(P)$  gelegenen Punkte  $L$  aus, so folgen die Projektionshalbstrahlen  $\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LP}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LD}$  bei Drehung etwa im Uhrzeigersinn in dieser Reihenfolge aufeinander.

<sup>20</sup> Schließlich alle Punkte soll soviel heißen wie: Alle hinreichend weit entfernten Punkte.

<sup>21</sup> Vgl. a. a. O. Fußnote 18, Nr. 1.10.

winkel die Bedingungen  $(\varepsilon)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(I')$ ,  $(II')$  gelten, wenn man darin die aus  $(A_1)$  bzw. . . . , bzw.  $(A_4)$  sich ergebenden Bedingungen für  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  berücksichtigt.

**2.3.** Durch eine Untersuchung (rein kombinatorischen Charakters) bezüglich der gegenseitigen Lage der vier Intervalle, welche in dem oben (Nr. 2.2.) bewiesenen Satze auftreten, erhält man nun auch die Verteilung der Asymptotenwinkel, welchen St.H.-Paare i. e. und i. w. S. entsprechen.

**2.3.1.** Zuvor sei bemerkt: Auf der Zahlgeraden der  $\varphi$  liegt in jedem Falle (die Grenzfälle der Nr. 2.1.2. einbegriffen) das *Intervall*<sup>22</sup>  $(\varepsilon)$  *unterhalb des Intervalles*<sup>22</sup>  $(II')$ , nämlich wegen Nr. 2.1.1. (I); und es liegt das *Intervall*  $(\gamma)$  *unterhalb* des Intervalles  $(I')$ , nämlich wegen Nr. 2.1.1., (II).

**2.3.2.** Es werde zunächst der allgemeine Fall betrachtet, d. h. es sei  $0 < \varepsilon < \kappa'$ ,  $0 < \gamma < \kappa$ ,  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ ,  $\gamma \neq \gamma'$ ,  $\kappa \neq \kappa'$ ,  $\varepsilon \neq \gamma$ ,  $\gamma \neq \kappa'$ ,  $\kappa \neq \varepsilon$ . Dann gilt der

**Satz.** *Im allgemeinen Falle eines KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck verteilen sich die Asymptotenwinkel*

*Erstens der (nicht-ausgearteten) St.H.-Paare im engeren Sinne auf zwei (je doppelt überdeckte) nicht leere, fremde offene Intervalle  $\mathfrak{S}'_e$  und  $\mathfrak{S}''_e$ . Von diesen besitzt  $\mathfrak{S}'_e$  die Endpunkte 0 und  $\text{Min}(\varepsilon, \gamma)$ , während das oberhalb  $\mathfrak{S}'_e$  gelegene Intervall  $\mathfrak{S}''_e$  entweder  $\kappa$  oder  $\kappa'$  als unteren Endpunkt besitzt;*

*Zweitens der nicht-ausgearteten St.H.-Paare im weiteren Sinne auf drei nicht leere, fremde, offene Intervalle  $\mathfrak{S}_w$ ,  $\mathfrak{S}'_w$ ,  $\mathfrak{S}''_w$ , von welchen  $\mathfrak{S}_w$  zwischen  $\mathfrak{S}'_e$  und  $\mathfrak{S}''_e$  liegt, hingegen  $\mathfrak{S}''_w$  oberhalb  $\mathfrak{S}''_e$ . Es ist  $\pi/2$  Mittelpunkt von  $\mathfrak{S}_w$ ; ferner liegen  $\mathfrak{S}'_w$  und  $\mathfrak{S}''_w$  symmetrisch bezüglich  $\pi/2$ .*

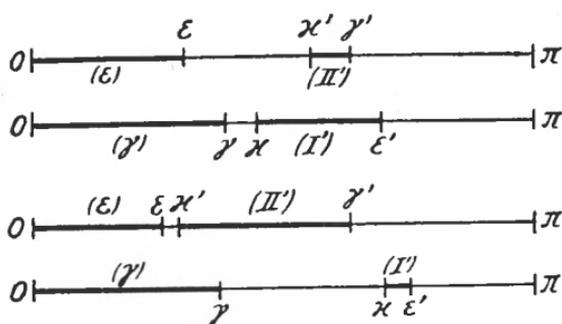
**Zusatz.** In dem zum allgemeinen Falle gehörigen KSB gibt es genau eine gleichseitige Hyperbel und diese artet nicht aus; alle Hyperbeln des KSB, deren Asymptotenwinkel hinreichend nahe bei  $\pi/2$  liegen, gehören zu nicht-ausgearteten St.H.-Paaren i. w. S.

Bew. (vgl. auch Fig. 2). O. B. d. A. kann  $\varepsilon < \gamma$  vorausgesetzt werden. Dann sind fremd die Intervalle<sup>23</sup>  $(\varepsilon)$  und  $(I')$ , ferner

<sup>22</sup> Dessen Endpunkte evtl. zusammenfallen.

<sup>23</sup> Soweit im gegenwärtigen Beweise von den Intervallen  $(\varepsilon)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(I')$  und  $(II')$  die Rede ist, sollen stets deren *offene* Kerne gemeint sein.

sind fremd ( $\varepsilon$ ) und (II') sowie ( $\gamma$ ) und (I') (gemäß Nr. 2.3.1.). Ein Asymptotenwinkel gehört folglich zu einem nicht-ausgearteten St.H.-Paare i. e. S. dann und nur dann, wenn er dem Durch-



Figur 2

schnitt entweder von ( $\varepsilon$ ) und ( $\gamma$ ) oder von ( $\gamma$ ) und (II') oder von (I') und (II') angehört. Der erstgenannte Durchschnitt ist nicht leer. Von den beiden letztgenannten Durchschnitten hingegen ist genau einer nicht leer. Ist nämlich ( $\gamma$ ) nicht fremd zu (II'), so muß  $\kappa' < \gamma$ , also  $\gamma' < \kappa$  sein, also (I') fremd zu (II'); ist dagegen (I') nicht fremd zu (II'), so muß (wegen  $\gamma' < \varepsilon'$ )  $\kappa < \gamma'$ , also  $\gamma < \kappa'$  sein, also ( $\gamma$ ) fremd zu (II'). Damit ist die Beh. bezüglich der St.H.-Paare i. e. S. bewiesen. – Ein Asymptotenwinkel  $\omega$  gehört zu einem nicht-ausgearteten St.H.-Paare i. w. S. dann und nur dann, wenn er in einem der vier Intervalle ( $\varepsilon$ ), ( $\gamma$ ), (I'), (II') liegt, aber in keinem der  $\mathfrak{S}'_e, \mathfrak{S}''_e$ ; die Menge dieser  $\omega$  sei  $\mathfrak{B}$ . Ist nun zunächst  $\gamma < \kappa'$ , so liegt  $\mathfrak{S}''_e$  im Durchschnitt von (I') und (II'). Wegen  $\varepsilon < \gamma, \gamma' < \varepsilon'$  liegen daher<sup>24</sup>  $\mathfrak{S}'_w = (\varepsilon, \gamma)$  und  $\mathfrak{S}''_w = (\gamma', \varepsilon')$  in  $\mathfrak{B}$ . Ferner ist  $\mathfrak{S}''_e = (\kappa', \gamma')$  oder  $\mathfrak{S}''_e = (\kappa, \gamma')$  je nachdem  $\kappa < \kappa'$  oder  $\kappa' < \kappa$ , und folglich liegt  $\mathfrak{S}_w = (\kappa, \kappa')$  oder  $\mathfrak{S}_w = (\kappa', \kappa)$  auch in  $\mathfrak{B}$ . Es ist aber  $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}'_w + \mathfrak{S}''_w + \mathfrak{S}_w$ . Ist dagegen  $\kappa' < \gamma$ , so liegt  $\mathfrak{S}''_e$  im Durchschnitt von ( $\gamma$ ) und (II'). Daher liegen  $\mathfrak{S}''_w = (\varepsilon, \kappa')$  sowie  $\mathfrak{S}''_w = (\kappa, \varepsilon')$  in  $\mathfrak{B}$ . Ferner ist  $\mathfrak{S}''_e = (\kappa', \gamma)$  oder  $\mathfrak{S}''_e = (\kappa', \gamma')$ , je nachdem  $\gamma < \gamma'$  oder  $\gamma' < \gamma$ , und folglich liegt  $\mathfrak{S}_w = (\gamma, \gamma')$  oder  $\mathfrak{S}_w = (\gamma', \gamma)$  in  $\mathfrak{B}$ . Damit ist auch die Beh. bezüglich der St.H.-Paare i. w. S. erledigt.

<sup>24</sup> Mit  $(\alpha, \beta)$  werde für den Augenblick das offene, von  $\alpha$  und  $\beta$  begrenzte Intervall bezeichnet.

**2.4.** Aus dem für den allgemeinen Falle gültigen Satz der Nr. 2.3.2. ergeben sich durch Übergang zu *speziellen Fällen*, z. B. zu  $\varepsilon = \gamma$  bzw.  $\varkappa' = \gamma$  bzw.  $\varkappa' = \varkappa$  oder zu den *Grenzfällen* (Nr. 2.1.2.) modifizierte Sätze in leicht ersichtlicher Weise; man hat dabei lediglich diejenigen der Intervalle  $\mathfrak{S}'_e, \mathfrak{S}''_e, \mathfrak{S}'_w, \mathfrak{S}''_w, \mathfrak{S}_w$  wegzulassen, deren Endpunkte zusammenfallen. Hierher gehören ferner die *Fälle konvexer Grundpunktvierecke mit lauter reellen, aber mit einem uneigentlichen Grundpunkt*, auf die wir ebenfalls nicht weiter eingehen. Umgekehrt kann man nach allen denjenigen Fällen von KSB fragen, in welchen sich die Intervalle  $\mathfrak{S}'_e, \dots, \mathfrak{S}_w$  auf eine geringere Anzahl reduzieren als im allgemeinen Falle. Unter den hierhergehörigen Fragen sollen nur die beiden folgenden, schon in Nr. 1.3. gestellten, aufgegriffen werden.

**2.4.1. Satz.**<sup>25</sup> *Damit die St.H.-Paare eines KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$  sämtlich St.H.-Paare im weiteren Sinne<sup>26</sup> sind, ist notwendig und hinreichend, daß einer der folgenden (vier) Fälle vorliegt:*

**a)** *Das konvexe Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$  ist nicht entartet und es gilt  $0 < \varepsilon = \varkappa < \pi$ ,  $\gamma = 0$  oder  $0 < \gamma = \varkappa' < \pi$ ,  $\varepsilon = 0$ ; in Worten: Zwei Gegenseiten von  $\mathfrak{B}$  sind parallel, etwa  $\overline{BC}$  und  $\overline{DA}$ , und es ist  $\sphericalangle DKC = \sphericalangle BEC$ .*

**b)** *Das konvexe Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$  ist entartet, es liegt also ein Grenzfall vor (Nr. 2.1.2.), und zwar ist das zugehörige KSB*

**b<sub>1</sub>)** *entweder ein Berührbüschel (vgl. Nr. 2.1.2.), bei welchem die, allen KS gemeinsame Tangente  $t$  parallel ist zur Verbindungsgeraden der beiden nicht zusammenfallenden Grundpunkte  $A, B$ ;*

**b<sub>2</sub>)** *oder ein Doppelberührbüschel (vgl. Nr. 2.1.2.), bei welchem die, allen KS gemeinsamen Tangenten  $t$  und  $t'$  parallel sind;*

<sup>25</sup> Der Text dieser Nr. 2.4.1. wurde erst abgefaßt nach Kenntnisnahme von den Ergebnissen des Herrn Rost<sup>10a</sup>, aus welchen der gegenwärtige Satz sich (für KSB) ebenfalls entnehmen läßt.

<sup>26</sup> Und zwar einschließlich der ausgearteten St. H.-Paare, soweit sie als St. H.-Paare i. w. S. gelten (vgl. Nr. 2.1.3.).

**b<sub>3</sub>)** oder ein *Hyperoskulationsbüschel*.

1. Zusatz. Die in a) auftretenden Vierecke  $\mathfrak{B}$  sind auch durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet:<sup>27</sup> Eines der, durch den Schnittpunkt  $K$  der beiden Vierecksdiagonalen, den Schnittpunkt  $E$  zweier Gegenseiten von  $\mathfrak{B}$ , etwa  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ , und durch zwei der Ecken von  $\mathfrak{B}$ , hier  $B$  und  $C$ , gebildeten konvexen Vierecke ist ein Kreisviereck, in welchem die Diagonale  $\overline{CD}$  von der Diagonale  $\overline{EK}$  halbiert wird.

2. Zusatz. Die Asymptotenwinkel der nicht-ausgearteten Hyperbeln in einem der vorstehend aufgezählten KSB nehmen alle Werte zwischen 0 und  $\pi$  an mit höchstens zwei Ausnahmen, welchen ausgeartete Hyperbeln entsprechen.

Bew. a) Es sei zunächst  $\mathfrak{B}$  *nicht entartet*, also (Nr. 2.1.2.)  $\gamma < \kappa$  und  $\varepsilon < \kappa'$ . Da  $\mathfrak{S}'_e$  leer sein soll, muß sein  $\text{Min}(\varepsilon, \gamma) = 0$ , also  $\varepsilon = 0$  oder  $\gamma = 0$ . O. B. d. A. sei  $\varepsilon = 0$ , also  $\varepsilon' = \pi$ . Wegen  $\gamma < \kappa$  muß ferner, weil  $\mathfrak{S}''_e$  leer sein soll, gelten:  $\gamma \leq \kappa' < \gamma' \leq \kappa$ ; daraus folgt  $\gamma = \kappa'$ . Wegen  $\varepsilon < \kappa'$  kann daher nicht  $\gamma = 0$  und wegen  $\gamma < \kappa$  auch nicht  $\gamma = \pi$  sein.

b) Es sei  $\mathfrak{B}$  *entartet*, also  $\gamma = \kappa$  oder  $\varepsilon = \kappa'$ . O. B. d. A. sei  $\gamma = \kappa$ : Zunächst folgt wie in a), daß  $\varepsilon = 0$  oder  $\gamma = 0$ . Es sei *zuerst*  $\gamma = 0$  angenommen. Dann ist  $\gamma = \kappa = 0$ , so daß der Grenzfall  $A_2$  bzw.  $A_4$  vorliegt, je nachdem  $\varepsilon' > 0$  oder  $\varepsilon' = 0$  ist. Überdies folgt für  $\varepsilon' > 0$  noch  $\varepsilon = 0$ , also  $b_2$ ); denn es sollen ja  $(\varepsilon)$  und  $(I')$  fremd sein. – Es sei *zweitens*  $\gamma > 0$  und  $\varepsilon = 0$  angenommen. Ist  $0 < \gamma = \kappa < \pi$ , so liegt Fall  $b_1$ ) vor; ist dagegen  $\gamma = \kappa = \pi$ , so hat man wieder  $A_4$ , also  $b_3$ ).

**2.4.2. Satz.** *Damit ein KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$ , abgesehen von den (stets vorhandenen) ausgearteten St.H.-Paaren, nur St.H.-Paare im engeren Sinne enthält, ist notwendig und hinreichend, daß einer der folgenden (vier) Fälle vorliegt:*

a) *Das konvexe Grundpunktviereck  $\mathfrak{B}$  ist nicht entartet und es gilt  $0 \leq \varepsilon = \gamma < \pi/2$ ,  $\kappa = \kappa' = \pi/2$ , in Worten: Die von den beiden Gegenseitenpaaren von  $\mathfrak{B}$  gebildeten Winkel sind gleich und die Diagonalen von  $\mathfrak{B}$  stehen aufeinander senkrecht.*

<sup>27</sup> Diese Kennzeichnung entnehmen wir ebenfalls den Mitteilungen von Herrn Rost.

**b)** Das konvexe Grundpunktviereck ist entartet, es liegt also ein Grenzfall vor (vgl. Nr. 2.1.2.), und zwar ist das zugehörige KSB

**b<sub>1</sub>)** entweder ein Berührbüschel, bei welchem die, allen KS gemeinsame Tangente  $t$  senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden der beiden nicht zusammenfallenden Grundpunkte  $A, B$  (Vgl. Nr. 2.1.2.);

**b<sub>2</sub>)** oder ein Doppelberührbüschel, bei welchem die, allen KS gemeinsamen Tangenten  $t$  und  $t'$  aufeinander senkrecht stehen;

**b<sub>3</sub>)** oder ein Oskulationsbüschel, bei welchem die, allen KS gemeinsame Tangente  $t$  senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden des (dreifach zählenden) Berührungspunktes von  $t$  mit dem vierten (einfach zählenden) Grundpunkt.

1. Zusatz. Die in a) auftretenden Vierecke  $\mathfrak{B}$  sind auch durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Die beiden Diagonalen von  $\mathfrak{B}$  stehen senkrecht aufeinander und eine der Diagonalen wird von der anderen halbiert.

2. Zusatz. In den Fällen b) nehmen die Asymptotenwinkel der nicht-ausgearteten Hyperbeln alle Werte zwischen 0 und  $\pi/2$  an, mit höchstens einer Ausnahme.<sup>28</sup>

Bew. a) Es sei  $\mathfrak{B}$  nicht entartet, also (Nr. 2.1.2.)  $\gamma < \kappa$  und  $\varepsilon < \kappa'$ . Infolgedessen sind die Intervalle<sup>29</sup> (I') und (II') beide nicht leer. Da aber  $\mathfrak{F}_w''$  leer sein soll, muß  $\varepsilon' = \gamma'$  sein, also  $\varepsilon = \gamma$ . Ebenso folgt  $\kappa = \kappa'$ , also  $\kappa = \pi/2$ .

b) Es sei  $\mathfrak{B}$  entartet, also  $\gamma = \kappa$  oder  $\varepsilon = \kappa'$ . O.B.d.A. sei  $\gamma = \kappa$ . Dann ist das Intervall (II') leer. Da infolgedessen hier alle Punkte von  $(\varepsilon)$  in (I') oder  $(\gamma)$  liegen müssen, so folgt  $\varepsilon \leq \varepsilon'$ . Umgekehrt müssen alle Punkte von (I') und  $(\gamma)$  in  $(\varepsilon)$  liegen; daher folgt  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ , also  $\varepsilon = \varepsilon' = \pi/2$ . Wir haben jetzt noch zu unterscheiden, ob  $\varepsilon < \kappa'$  oder  $\varepsilon = \kappa'$ . Ist  $\varepsilon < \kappa'$ , so liegt der Grenzfall  $A_1$  oder  $A_2$  vor, je nachdem  $0 < \gamma = \kappa < \pi$  oder  $0 = \gamma = \kappa$ . Ist dagegen  $\varepsilon = \kappa'$ , so kann wegen  $0 < \gamma = \kappa = \varepsilon' = \pi/2 < \pi$  nur der Fall  $A_3$  vorliegen; w. z. z. w.

<sup>28</sup> Diese Ausnahme ist  $\gamma = \kappa$  im Falle  $b_1$ ), wenn  $\gamma \neq 0$ .

<sup>29</sup> Es sind immer offene Intervalle gemeint.

**2.5.** Verallgemeinerung auf Büschel von nicht-algebraischen Kurven 2. Ordnung (vgl. die Konstruktion solcher Büschel in Nr. 3.8.).

Bei den Stetigkeitsbetrachtungen der Nr. 2.2., auf welchen alles folgende beruhte, wurden im wesentlichen nur die in den betrachteten KSB auftretenden Hyperbeln (gegebenenfalls einschließlich ihrer Grenzfälle, nämlich der Parabeln, und ihrer Ausartungen, nämlich der Geradenpaare) herangezogen. Wie eine Durchmusterung der fraglichen Stetigkeitsbetrachtungen lehrt, wurden dabei für den Fall eines nicht-entarteten Grundpunktvierecks von Eigenschaften der durch die vier Grundpunkte  $A, B, C, D$  gehenden nicht-ausgearteten Hyperbeln nur die folgenden herangezogen:

1) Jede Hyperbel  $\mathfrak{H}$  ist Summe zweier (fremder) beiderseits unbeschränkter Bogen,<sup>30</sup> der sogenannten Äste  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'(\mathfrak{H})$ ,  $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''(\mathfrak{H})$  von  $\mathfrak{H}$ . Es besitzt  $\mathfrak{H}$  die lineare (Realitäts-)Ordnung Zwei. Als *Inneres*  $i(\mathfrak{A}')$  von  $\mathfrak{A}'$  wird der offene Kern der konvexen Hülle von  $\mathfrak{A}'$  bezeichnet;<sup>5</sup> *Äußeres*  $a(\mathfrak{A}')$  von  $\mathfrak{A}'$  ist das Komplementärgebiet von  $i(\mathfrak{A}')$ .

2) Durch die vier Grundpunkte und einen weiteren Punkt  $P$  ist eindeutig eine Hyperbel  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(P)$  bestimmt, wenn  $P$  im Innern entweder einer Teilstrecke  $l = \overline{L_0E}$  von  $\overline{LE}$  oder einer Teilstrecke  $q = \overline{Q_0G}$  von  $\overline{QG}$  oder der Strecke  $m = \overline{KM}$  oder der Strecke  $n = \overline{KN}$  liegt.

3) Je zwei der Hyperbeln  $\mathfrak{H}(P')$ ,  $\mathfrak{H}(P'')$ , für welche  $P'$  und  $P''$  der gleichen Strecke  $l$  bzw.  $q$  bzw.  $m$  bzw.  $n$  angehören, haben außer den vier Grundpunkten keine Punkte gemeinsam. Jeder der Grundpunkte ist Schnittpunkt von  $\mathfrak{H}(P')$  und  $\mathfrak{H}(P'')$ .

4) Die Hyperbeln  $\mathfrak{H}(P)$  ändern sich stetig, wenn  $P$  jeweils eine der Strecken  $l, q, m, n$  durchläuft. Bei Annäherung von  $P$  an  $E$  bzw. an  $G$  bzw. an  $K$  auf  $m$  bzw. an  $K$  auf  $n$  ist der Grenzwert des Asymptotenwinkels<sup>31</sup> von  $\mathfrak{H}(P)$  gleich  $\varepsilon$  bzw.  $\gamma$  bzw.  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$ ; bei Annäherung von  $P$  an  $M$  bzw. an  $N$  ist der fragliche Grenz-

<sup>30</sup> Unter einem Bogen wird hier ein topologisches Bild der Geraden verstanden.

<sup>31</sup> Unter dem Asymptotenwinkel von  $\mathfrak{H}$  werde der (stets existierende) Limes des Winkels zweier Stützgeraden eines (beliebigen) der beiden Äste von  $\mathfrak{H}$  verstanden, falls die Stützpunkte nach entgegengesetzten Seiten auf

wert gleich  $\varepsilon'$  bzw.  $\gamma'$ ; schließlich bei Annäherung von  $P$  an  $L_0$  bzw. an  $Q_0$  ist dieser Grenzwert gleich Null.

*Sobald nur für ein Kurvenbüschel die vorstehenden Eigenschaften 1) bis 4) erfüllt sind, gelten also die Sätze in Nr. 2.2. bis 2.4.2., soweit sie sich auf nicht-entartete, reell-konvexe Grundpunktvierecke beziehen und soweit sie als Sätze über die Asymptotenwinkel der betrachteten Büschelkurven aufgefaßt werden.*

**2.5.1.** Durch geringfügige Modifikation bzw. Ergänzung der Eigenschaften 1) bis 4) in Nr. 2.5. kann man auch die Grenzfälle von Büscheln einbeziehen, welche *entarteten*, konvexen Grundpunktvierecken entsprechen. Auch liegt es nahe, die in 1) enthaltene Forderung preiszugeben, daß  $\mathfrak{H}$  von zweiter linearer Ordnung ist, und sie durch andere zu ersetzen. Wir gehen indes hierauf nicht weiter ein.

**2.6.** Für die bisher (Nr. 2.1.–2.5.) allein betrachteten KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck<sup>12</sup> lieferte unsere Stetigkeitsbetrachtung sowohl den auf die Hyperbeln des KSB bezüglichen Teil des Steinerschen Satzes selbst als auch die *Verschärfung des Steinerschen Satzes*, welche sich auf die St.H.-Paare i. e. und i. w. S. bezieht und uns hier vor allem beschäftigt (vgl. Nr. 1.2. ff.). Und zwar war bei unserer Betrachtungsweise die Heranziehung nur der einfachsten Eigenschaften der KSB erforderlich (vgl. Nr. 2.5.). Der Grund hierfür ist folgender: Bei reell-konvexem Grundpunktviereck liegt auf jedem Hyperbelast immer eine gerade Anzahl (Null eingeschlossen) von Grundpunkten des KSB (vgl. Nr. 2.2., Bew. (a<sub>2</sub>)); und dieser Umstand ermöglicht es, den Schluß zu ziehen, daß bei den einzelnen von uns benutzten, stetigen Änderungen der Hyperbeln des KSB die Asymptotenwinkel sich jeweils monoton ändern.<sup>32</sup> Aus dieser Monotonie aber ergaben sich unmittelbar die Sätze der Nr. 2.2. ff.

---

dem Ast ins Unendliche rücken. – Da sich der Asymptotenwinkel von  $\mathfrak{H}(P)$  monoton ändert, falls  $P$  monoton eine der Strecken  $l, q, m, n$  durchläuft (vgl. Nr. 2.2., Bew. (a<sub>2</sub>)), existieren die im Text benutzten Grenzwerte der Asymptotenwinkel der  $\mathfrak{H}(P)$ .

<sup>32</sup> Beschränkt man die Betrachtung ausschließlich auf Kegelschnitte (ohne Rücksicht auf etwaige weitergehende Verallgemeinerung im Sinne der Nr. 2.5.), so kann man die Feststellung des Textes unmittelbar daraus entnehmen, daß bei zwei im KSB vorhandenen Parabeln die vom KSB auf der uneigent-

**2.7.** Nach dieser Vorbemerkung betrachten wir allgemein die KSB mit Parabeln.<sup>2</sup> Es genügt dabei die Beschränkung auf die KSB mit mindestens zwei imaginären Grundpunkten; denn bei vier reellen Grundpunkten muß, wegen der Konvexität der Parabel, das Grundpunktviereck selbst konvex sein, wenn Parabeln im KSB auftreten sollen; die KSB mit reell-konvexem Grundpunktviereck sind aber schon in Nr. 2.1.–2.4. vollständig behandelt.

Es sei zunächst also ein KSB mit vier imaginären Grundpunkten vorgelegt. Da hier irgend zwei Hyperbeln des KSB fremd sind, ist die in Nr. 2.6. angegebene Vorbedingung für Anwendung der Schlußweise der Nr. 2.2. erfüllt;<sup>33</sup> und zwar *bedarf es keiner zusätzlichen Eigenschaften des KSB über die in Nr. 2.5. angegebenen hinaus.*

Somit bleiben nur noch die KSB mit genau zwei imaginären Grundpunkten (und mit Parabeln) zu erledigen. Gemäß Nr. 2.6. genügt der Nachweis, daß auch in solchen KSB auf jedem Hyperbelast eine gerade Anzahl Grundpunkte liegt. Dies sieht man so ein: Es seien  $P'$ ,  $P''$  die beiden reellen Grundpunkte des KSB, welche zunächst als verschieden vorausgesetzt werden mögen. Es sei  $g = \overline{P'P''}$  und es sei  $g'$  die reelle Gerade, welche Träger der beiden imaginären Grundpunkte ist und von welcher  $g$  im Punkte  $S$  geschnitten werden möge.<sup>34</sup> Wir nehmen dabei  $S$  als eigentlichen Punkt an; der Fall paralleler  $g$ ,  $g'$  kann hinterher leicht einbezogen werden. Nun können  $P'$  und  $P''$  auf  $g$  nicht durch  $S$  getrennt werden: denn andernfalls hätte jede, durch  $P'$  und  $P''$  gehende Parabel (auch wenn sie in ein Parallelenpaar ausartet) mit  $g'$  (mindestens) einen reellen (ev. uneigentlichen) Punkt gemeinsam, also einen dritten Punkte (neben den beiden imaginären Grundpunkten). Folglich müssen  $P'$  und  $P''$  beide

---

lichen Geraden ausgeschnittene Involution hyperbolisch, also gegenläufig ist. Entsprechendes gilt für den Fall nur einer im KSB vorhandenen Parabel, also parabolischer Involution.

<sup>33</sup> Man entnimmt daraus zugleich, daß die vom KSB auf der uneigentlichen Geraden ausgeschnittene Involution hyperbolisch ist, daß also im Falle von lauter imaginären Grundpunkten stets Parabeln im KSB auftreten (Vgl. aber die Verabredung in Fußnote 2).

<sup>34</sup> Es muß  $g$  eine eigentliche Gerade sein, weil andernfalls im KSB keine Parabeln auftreten könnten.

auf *einem* Ast einer jeden Hyperbel des KSB liegen; denn andernfalls läge  $S$  im Innern eines der Hyperbeläste, so daß die Hyperbel mit  $g'$  reelle Punkte gemeinsam hätte, also mit  $g'$  wieder mehr als zwei Punkte.<sup>35</sup> Die in Nr. 2.6. angegebene Vorbedingung für Anwendung der Schlußweise von Nr. 2.2. ist somit wieder erfüllt, und zwar lediglich unter den in Nr. 2.2. herangezogenen Eigenschaften der KSB. Auch für den Fall, daß  $P'$  und  $P''$  zusammenfallen, bleiben die vorstehenden Schlüsse gültig. Wir gelangen somit zu folgendem

**Satz.** *Ist im nicht-ausgearteten<sup>2</sup> KSB mit höchstens zwei reellen Grundpunkten und mit mindestens einer Parabel der (eine) Winkel des immer vorhandenen, in ein reelles Geradenpaar ausgearteten KS gleich  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \pi$ , so sind die Asymptotenwinkel der nicht-ausgearteten Hyperbeln des KSB ein-eindeutig zugeordnet den Punkten der beiden offenen Intervalle  $(0, \varepsilon)$  und  $(0, \varepsilon')$  mit  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$ .*

Anmerkung. Falls der reelle ausgeartete KS des KSB ein (reelles) Parallelenpaar ist, so hat man im vorstehenden Satze nur  $\varepsilon = 0$  zu setzen.

**2.8.** Die beim Beweise des vorstehenden Satzes benutzten Eigenschaften der KSB sind sämtlich unter den in Nr. 2.5. angegebenen enthalten. Daher *verallgemeinert sich unser Satz wie in Nr. 2.5. angeben.*

### § 3. Büschel von Kurven zweiter Ordnung bei nicht-konvexem Grundpunktviereck.<sup>2)</sup>

**3.1.** Nachdem in § 2 die KSB mit Parabeln erledigt wurden, wenden wir uns jetzt zu den KSB *ohne* Parabeln; in Betracht kommen dabei (nach dem in Nr. 2.7. Bemerkten) nur KSB entweder mit vier reellen Grundpunkten aber nicht-reell-konvexem Grundpunktviereck oder mit genau zwei reellen Grundpunkten. In diesen Fällen kann auf dem einzelnen Aste einer Hyperbel

---

<sup>35</sup> Unter den KSB mit zwei imaginären und zwei eigentlichen reellen Grundpunkten sind diejenigen *ohne* Parabeln dadurch *gekennzeichnet*, daß die beiden reellen Grundpunkte durch die Trägergerade der imaginären Grundpunkte voneinander getrennt werden, oder auch dadurch, daß die beiden reellen Grundpunkte immer auf verschiedenen Hyperbelästen liegen.

des KSB nur eine ungerade Anzahl (1 oder 3) von reellen Grundpunkten liegen<sup>35</sup> und dementsprechend kann sich der Asymptotenwinkel nicht-monoton ändern bei gewissen hier in Betracht kommenden stetigen Änderungen der Hyperbel (nämlich bei solchen, in welchen zwar keine ausgeartete, wohl aber die extreme Hyperbel (vgl. Nr. 3.2.) überschritten wird). Es ist somit<sup>33</sup> die Heranziehung weiterer Einzelheiten – über die in § 2 benutzten Eigenschaften der KSB hinaus – bezüglich des Verhaltens der Hyperbeln des KSB bei den betrachteten stetigen Änderungen nicht zu umgehen.

**3.2.** Alle derartigen, noch erforderlichen Einzelheiten lassen sich dem (geometrischen) Beweis entnehmen, welchen Steiner für seinen Satz in seinen Vorlesungen gegeben hat und dessen Gedankengang daher kurz wiederholt sei: Die vom KSB auf der uneigentlichen Geraden  $g_u$  ausgeschnittene Involution werde von einem festen (eigentlichen) Punkte  $Z$  aus auf einen festen,  $Z$  enthaltenden Kreis (Kreislinie)  $\mathfrak{K}$  (linear) projiziert. Das Zentrum der so auf  $\mathfrak{K}$  entstehenden Involution sei  $L$ . Sind  $Q', Q''$  irgend zwei Punkte von  $\mathfrak{K}$ , welche einander vermöge dieser Involution entsprechen, so sind  $ZQ', ZQ''$  parallel zu den Asymptoten desjenigen KS  $\mathfrak{S}$  des KSB, dessen Schnittpunkte<sup>36</sup> mit der  $g_u$  sich von  $Z$  aus nach  $Q', Q''$  projizieren. Da  $Q' Q''$  durch  $L$  geht, so entsprechen mithin die KS  $\mathfrak{S}$  ein-eindeutig den Geraden  $p$  durch  $L$ , also auch den Punkten  $P$  der Polaren  $l$  von  $L$  bezüglich  $\mathfrak{K}$ . (Dabei sind die  $P$  die Zentra derjenigen Involutionen auf  $\mathfrak{K}$ , in welche sich die durch die zugehörigen KS  $\mathfrak{S}$  auf  $g_u$  induzierten Involutionen konjugierter Pole von  $Z$  aus projizieren.) Es ist  $\mathfrak{S}$  eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der zugehörige Punkt  $P$  innerhalb, auf oder außerhalb  $\mathfrak{K}$  liegt. Hat  $l$  mit  $\mathfrak{K}$  keine (reellen) Punkte gemeinsam, so enthält das KSB lauter Hyperbeln und dem Punkte  $P_e$  kleinsten Abstandes von  $\mathfrak{K}$  auf  $l$  entspricht diejenige Hyperbel  $\mathfrak{H}_e$  des KSB, welche „am meisten von der gleichseitigen Hyperbel abweicht“ und welche wir als extreme Hyperbel im KSB bezeichnen wollen. Die gleichseitige Hyperbel  $\mathfrak{H}_g$  entspricht immer dem uneigentlichen Punkte  $P_g$  von  $l$ .

Aus dieser „Steinerschen Beweisfigur“ sollen nun für die KSB ohne Parabeln die benötigten Eigenschaften des Asymptoten-

<sup>36</sup> Es können auch imaginäre (Schnitt-)Punkte einbezogen werden.

winkels der Hyperbeln des KSB als Funktion der Hyperbeln bzw. als Funktion eines geeignet gewählten Büschelparameters, etwa des Punktes  $P$  auf  $\mathbb{I}$ , entnommen werden.

Der einfacheren Darstellung wegen beschränken wir uns im gegenwärtigen § 3 durchweg auf die allgemeinen Fälle, d. h. auf diejenigen KSB, welche entweder drei verschiedene, ausgeartete KS oder nur einen ausgearteten KS enthalten; es soll also keiner der ausgearteten KS des KSB als solcher mehrfach zählen. Übrigens ließen sich die durch die Beschränkung auf die allgemeinen Fälle ausgeschlossenen KSB (ohne Parabeln) mit mehrfach zählenden ausgearteten KS nachträglich durch Grenzübergang in einfacher Weise einbeziehen.

Betrachten wir also die Steinersche Beweisfigur. Wie schon bemerkt, entsprechen im Falle eines KSB ohne Parabeln die Punkte  $P$  von  $\mathbb{I}$  und die Hyperbeln  $\mathfrak{H}$  des KSB einander ein-eindeutig. Diese Zuordnung  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(P)$  ist sogar topologisch<sup>37</sup> in hinreichend kleiner Umgebung  $U$  eines jeden Punktes  $P$  von  $\mathbb{I}$ , welchem keine ausgeartete Hyperbel entspricht.<sup>38</sup> (Ist nämlich  $\mathfrak{H}_0$  eine nicht-ausgeartete Hyperbel des KSB, so sind die zu  $\mathfrak{H}_0$  beliebig benachbarten Hyperbeln  $\mathfrak{H}$  des KSB dadurch gekennzeichnet, daß die uneigentlichen Punkte von  $\mathfrak{H}$  hinreichend benachbart sind zu den uneigentlichen Punkten von  $\mathfrak{H}_0$ . Vermöge der Zentralprojektion aus  $L$  gilt dann Entsprechendes für die zu  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{H}_0$  zugehörigen Kreissehnen  $\overline{Q'Q''}$  bzw.  $\overline{Q'_0Q''_0}$  und folglich auch für die zugehörigen Bildpunkte  $P$  bzw.  $P_0$  auf  $\mathbb{I}$ .) In jeder solchen Umgebung  $U$  ist daher der Asymptotenwinkel  $\Phi(\mathfrak{H})$  von  $\mathfrak{H}$  eine eindeutige, stetige Funktion  $\varphi(P)$  von  $P$ . Daraus folgt weiter, im Hinblick auf die aus der Steinerschen Beweisfigur zu entnehmende Abhängigkeit zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $P$  (auf  $\mathbb{I}$ ), daß  $\Phi(\mathfrak{H})$  bzw.  $\varphi(P)$  in einer vollen Umgebung einer nicht-ausgearteten und weder extremen noch gleichseitigen Hyperbel sogar eine streng monotone Funktion von  $P$  ist. Übrigens ist  $\varphi(P)$  eindeutig und stetig auch in der vollen Umgebung der gleichseitigen Hyperbel, falls diese ausgeartet ist.

<sup>37</sup> Der Raum der hier jeweils in Betracht kommenden Hyperbeln ist metrisierbar und soll als metrisiert angenommen werden.

<sup>38</sup> Für  $P = P_g$  ist dabei der Begriff der Umgebung von  $P$  auf  $\mathbb{I}$  geeignet zu definieren.

Dagegen erkennt man hinsichtlich des Verhaltens von  $\varphi(P)$  in der Umgebung eines Punktes  $A$  von  $\mathfrak{L}$ , welchem eine nicht-gleichseitige, aber ausgeartete, von zwei (nicht-parallelen)<sup>39</sup> Geraden  $g', g''$  gebildete Hyperbel  $\mathfrak{H}$  entspricht, durch Betrachtung von  $\mathfrak{H}$  innerhalb des KSB folgendes: Sind  $\varepsilon$  und  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \pi/2$  die beiden von  $g'$  und  $g''$  gebildeten Winkel ( $< \pi$ ), so ist  $\varphi(P)$  für jeden zu  $A$  hinreichend benachbarten, von  $A$  verschiedenen Punkt  $P$  auf  $\mathfrak{L}$  beliebig wenig verschieden von  $\varepsilon$  oder von  $\varepsilon'$ . Und aus der Steinerschen Beweisfigur ergibt sich überdies, daß  $\varphi(P)$  vom Wachsen zum Abnehmen übergeht oder umgekehrt bzw. daß  $\varphi(P)$  monoton ist, falls  $P$  monoton auf  $\mathfrak{L}$  den Punkt  $A$  überschreitet und wenn dabei  $A \neq P_g$  bzw.  $A = P_g$  ist. (Nach Annahme sollte stets  $A \neq P_g$  sein.)

Schließlich ergibt sich noch, daß  $\varphi(P)$  bei nicht-ausgearteter  $\mathfrak{H}_g$  in der zweiseitigen (vollen) Umgebung von  $P_g$  monoton ist. In der Tat verteilen sich auf  $\mathfrak{L}$  diejenigen Punkte, welchen spitz- bzw. stumpfwinklige Hyperbeln des KSB entsprechen, auf Strecken  $s_p$  bzw.  $s_t$  derart, daß in jedem Punkte  $A$  je eine  $s_p$  und eine  $s_t$  zusammenstoßen. Da nun bei nicht-ausgearteter  $\mathfrak{H}_g$  eine ungerade Anzahl von  $P_g$  verschiedener Punkte  $A$  vorhanden ist, folgt die Beh. Entsprechend ergibt sich, daß  $\varphi(P)$  in  $P_g$  ein Extremum besitzt, falls  $\mathfrak{H}_g$  ausgeartet ist.<sup>40</sup>

**3.2.1.** Wir können also über den Asymptotenwinkel  $\varphi$  der Hyperbeln  $\mathfrak{H}$  eines KSB ohne Parabeln<sup>2</sup> als Funktion  $\varphi(P)$  von  $P$  aus dem Steinerschen Beweis folgendes entnehmen:

1) Es nimmt  $\varphi(P)$  für  $P \in \mathfrak{L}$  (einschließlich des uneigentlichen Punktes  $P_g$ ) jeden Wert (zwischen 0 und  $\pi$ ) höchstens zweimal an, den Wert  $\pi/2$  aber genau einmal.

2) Es ist  $\varphi(P)$  *eindeutig und stetig* in allen Punkten  $P$ , welchen *nicht-ausgeartete* Hyperbeln entsprechen.

3) Hingegen ist  $\varphi(P)$  *zweiwertig* mit den Werten  $\varepsilon$  und  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$  (wobei  $0 < \varepsilon < \pi$  und  $\varepsilon \neq \pi/2$ ) in jedem Punkt  $A$ , welchem eine *ausgeartete*, nicht-gleichseitige Hyperbel entspricht. Ferner existieren in  $A$  die einseitigen Limiten von  $\varphi(P)$  und sind bzw. gleich  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ .

<sup>39</sup> Wären  $g'$  und  $g''$  parallel, so enthielte das KSB eine (ausgeartete) Parabel.

<sup>40</sup> Zu den Betrachtungen dieser Nr. 3.2. vgl. a. a. O. Fußnote 9.

4) Es ist  $\varphi(P)$  *streng monoton* in jedem Intervall (auf  $\mathfrak{I}$ ), dessen inneren Punkten nur *nicht-ausgeartete, nicht-extreme, nicht-gleichseitige* Hyperbeln entsprechen.

5) Entspricht dem Punkte  $A$  eine *ausgeartete*, aber *nicht-extreme, nicht-gleichseitige* Hyperbel, so geht  $\varphi(P)$  vom Wachsen zum Abnehmen über oder umgekehrt, falls  $P$  den Punkt  $A$  monoton überschreitet.

6) Für den Asymptotenwinkel  $\delta$  der *extremen* Hyperbel  $\mathfrak{H}_e$  gilt folgendes:  $0 < \delta < \pi$  und  $\delta \neq \pi/2$ . Ist  $\mathfrak{H}_e$  nicht ausgeartet, so ist  $\delta$  absolutes Extremum von  $\varphi(P)$ , und zwar Minimum oder Maximum, je nachdem  $\delta < \pi/2$  oder  $\delta > \pi/2$ . Ist dagegen  $\mathfrak{H}_e$  ausgeartet, so ist  $\varphi(P)$  in einer zweiseitigen Umgebung der Sprungstelle monoton.

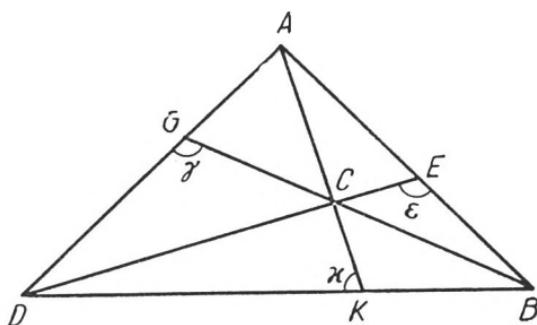
7) Ist die *gleichseitige* Hyperbel  $\mathfrak{H}_g$  nicht ausgeartet, so ist  $\varphi(P)$  auch in der zweiseitigen (vollen) Umgebung von  $P_g$  monoton. Ist dagegen  $\mathfrak{H}_g$  ausgeartet, so besitzt  $\varphi(P)$  in  $P = P_g$  ein Extremum.

Mit den Feststellungen 1–7 ist eine volle Übersicht über die Verteilung der Asymptotenwinkel im KSB ohne Parabeln erreicht und mithin die gesuchte *Verschärfung des Steinerschen Satzes für alle KSB ohne Parabeln* gewonnen; denn auch die Fälle der KSB mit mehrfachzählenden ausgearteten KS, welche bei den obigen Betrachtungen zunächst ausgeschlossen waren, lassen sich durch geeigneten Grenzübergang einbeziehen.

**Zusatz.** Eine geringfügige Modifikation der Betrachtungen in dieser Nr. 3.2. liefert übrigens einen *Beweis der Verschärfung des Steinerschen Satzes auch für die KSB mit Parabeln*, sofern man eben den *Steinerschen Beweis als bereits bekannt voraussetzt*. Für die KSB mit *einer* (extremen) Parabel  $\mathfrak{P}_e$  tritt hierbei eine gewisse, übrigens leicht zu behebbende Schwierigkeit auf, insofern nämlich eine ausgeartete  $\mathfrak{P}_e$  als ausgearteter KS des KSB immer mindestens zweifach zählt.

**3.3.** Man wird wünschen, sich die in Nr. 3.2.1. erhaltene Verteilung der Asymptotenwinkel in den KSB ohne Parabeln auch an Hand der Figur des Grundpunktvierecks klarzumachen in der gleichen Weise, wie das (vgl. Nr.2. 3.) für konvexe Grundpunktvierecke durchgeführt worden ist. Diese Veranschaulichung soll

jetzt noch wenigstens für *KSB* mit nicht-konvexem Grundpunktviereck und vier reellen eigentlichen Grundpunkten etwas ausgeführt werden.



Figur 3

Es seien  $A, B, C, D$  die vier Grundpunkte; und zwar möge  $C$  im Innern des Dreiecks  $ABD$  liegen (vgl. Fig. 3). Mit  $E$  bzw.  $G$  bzw.  $K$  seien bezeichnet die Schnittpunkte der Geraden  $BA, CD$  bzw.  $DA, CB$  bzw.  $BD, CA$ , ferner mit  $\varepsilon$  bzw.  $\gamma$  bzw.  $\kappa$  die Winkel  $\sphericalangle CEB$  bzw.  $\sphericalangle CGD$  bzw.  $\sphericalangle CKD$ . Es sei  $\delta$  der Asymptotenwinkel der extremen Hyperbel  $\mathfrak{H}_e$ , also  $\delta \neq \pi/2$ . Ist  $\mathfrak{H}_e$  ausgeartet, so sei  $\mathfrak{H}_e$  identisch mit dem Geradenpaar  $AB, CD$ ; ist  $\mathfrak{H}_e$  nicht ausgeartet, so enthalte der eine Ast von  $\mathfrak{H}_e$  die Grundpunkte  $B, C$  und  $D$ .

Dann entsprechen die Asymptotenwinkel  $\varphi$  der nicht-ausgearteten Hyperbeln des KSB ein-eindeutig den Punkten von vier halb-offenen bzw. offenen (ev. auch leeren)<sup>41</sup> Intervallen, und zwar

im Falle  $0 < \delta < \pi/2$  der Intervalle  $[\delta, \varepsilon), [\delta, \gamma), (\kappa, \varepsilon'), (\kappa', \gamma')$

im Falle  $\pi/2 < \delta < \pi$  der Intervalle  $(\varepsilon, \delta], (\gamma, \delta], (\varepsilon', \kappa), (\gamma', \kappa')$ .

Dabei ist  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon, \gamma' = \pi - \gamma, \kappa' = \pi - \kappa$  und es besitzen  $\varepsilon, \gamma, \kappa$  die eben vorausgesetzten Bedeutungen, wobei nur ev.  $\kappa$  und  $\kappa'$  zu vertauschen sind; ist nämlich z. B.  $\delta \leq \varepsilon$  und etwa  $\varepsilon \leq \gamma$ , so muß für  $\kappa$  derjenige der beiden Winkel  $< \pi$  im Punkte  $K$  der Fig. 3 gewählt werden, für welchen  $\gamma \leq \kappa$ , also  $\kappa' \leq \gamma'$  ist. Man beachte, daß im eben betrachteten Fall von selbst  $\kappa \leq \varepsilon'$

<sup>41</sup> Es ist nämlich z. B.  $[\delta, \varepsilon)$  dann leer, wenn  $\delta = \varepsilon$ , d. h. wenn  $\mathfrak{H}_e$  ausgeartet ist. Mit  $(\delta, \varepsilon)$  bzw.  $[\delta, \varepsilon]$  bzw.  $(\delta, \varepsilon]$  bzw.  $[\delta, \varepsilon]$  wird im folgenden das offene bzw. das rechts bzw. links bzw. beiderseits abgeschlossene Intervall bezeichnet.

wird; denn wegen  $\varepsilon \leq \gamma$  wird das Intervall  $(\delta, \varepsilon)$  von Asymptotenwinkeln im KSB doppelt überdeckt, muß also, wegen Nr. 3.2.1., 1), fremd sein zu  $(\alpha', \gamma')$ , woraus  $\varepsilon \leq \alpha'$  und somit  $\alpha \leq \varepsilon'$  folgt.

**Zusatz.** Zu beliebig vorgegebenen (untereinander verschiedenen)  $\varepsilon, \gamma, \alpha$ , welche sämtlich zwischen Null und  $\pi$  liegen, existieren unbegrenzt viele, nicht-entartete, nicht-konvexe Vierecke, deren Gegenseitenwinkel (vgl. Fig. 3) bzw.  $\varepsilon, \gamma, \alpha$  sind.

**3.4.** Der Beweis für die Verschärfung des Steinerschen Satzes erforderte für KSB ohne Parabeln (vgl. Nr. 3.2.) zusätzliche Feststellungen gegenüber dem Falle der KSB mit Parabeln vor allem deshalb, weil im letzteren Falle die Monotonie des Asymptotenwinkels als Funktion eines Büschelparameters (für die nicht-ausgearteten Hyperbeln) sich nicht ohne weiteres ergab. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint die Tatsache nicht ohne Interesse, daß gerade die fragliche *Monotonie, und übrigens auch die Eigenschaft 7* (vgl. Nr. 3.2.1.), z. B. schon *aus den Eigenschaften 1, 2, 3, 5, 6 folgt*. Diese Behauptung soll im folgenden (Nr. 3.5. ff.) bewiesen werden. Ihr zufolge gilt also der Steinersche Satz und seine Verschärfung – beide aufgefaßt als Aussagen über die Asymptotenwinkel der Hyperbeln des betrachteten KSB – ohne Parabeln –, sobald lediglich 1–3, 5 und 6 sichergestellt sind. Dabei ist es dann unwesentlich, ob die fraglichen Büschelkurven speziell KS sind. Und es lassen sich auch leicht Büschel von lauter hyperbelartigen Kurven 2. Ordnung konstruieren (vgl. Nr. 3.8.), in welchen keine KS enthalten sind und für welche der Steinersche Satz und seine Verschärfung gilt.

**3.5.** Wir haben also diejenige reelle Funktion  $\varphi(P)$  zu untersuchen, welche durch den Asymptotenwinkel in einem KSB ohne Parabeln definiert wird. (Für KSB mit Parabeln, also ohne extreme Hyperbel, hat  $\varphi(P)$  ganz entsprechende Eigenschaften. Vgl. dazu Nr. 3.2.1., Zusatz.) Eine Bezugnahme auf die Steinersche Beweisfigur ist hierbei nur gegeben, insoweit  $P$  als Punkt auf der Geraden  $l$  gedeutet wird; diese Bezugnahme können wir aber ohne weiteres ausschalten, indem wir den jeweils betrachteten KS nicht durch die Punkte von  $l$  festlegen, sondern durch die Schnittpunkte der KS mit passend gewählten Strecken (vgl. dazu die Ausführungen in Nr. 2.2. und 3.3.), doch beziehen wir uns

der Einfachheit wegen im folgenden meist auf die Deutung von  $P$  als Punkt von  $\mathcal{I}$ .

Soweit die *extreme Hyperbel*  $\mathfrak{H}_e$  *nicht ausgeartet* ist, können wir hier o. B. d. A. ihren Asymptotenwinkel  $\delta$  kleiner als  $\pi/2$  annehmen. Andernfalls nämlich können wir  $\varphi(P)$  durch  $\Phi(P) = \pi - \varphi(P)$  und  $\delta$  durch  $\delta' = \pi - \delta$  ersetzen. Und dann besitzt  $\Phi(P)$  die sämtlichen, für uns in Betracht kommenden Eigenschaften 1)–7) des Falles  $\delta' < \pi/2$ . Ist *dagegen*  $\mathfrak{H}_e$  *ausgeartet*, so tritt neben  $\delta$  zugleich  $\delta'$  als Asymptotenwinkel von  $\mathfrak{H}_e$  auf, so daß zwischen  $\delta < \pi/2$  und  $\delta > \pi/2$  nicht mehr unterschieden zu werden braucht.

**3.6.** Zunächst führen wir den Beweis dafür, daß die Eigenschaft 7) von  $\varphi(P)$  eine Folge der ihr vorangehenden Eigenschaften 1)–6) ist.

Ersichtlich genügt zum Beweis von 7) die Feststellung

7\*) Je nachdem die gleichseitige Hyperbel  $\mathfrak{H}_g$  des KSB ausgeartet ist oder nicht, besitzt  $\varphi(P)$  in  $P_g$  ein bzw. kein Extremum.

Denn die Monotonie von  $\varphi(P)$  in den einseitigen Umgebungen von  $P_g$  ist durch 4) schon sichergestellt und aus ihr folgt dann die Monotonie in einer zweiseitigen Umgebung von  $P_g$ , sobald in  $P_g$  kein Extremum vorliegt.

**3.6.1.** Die Beh. 7\*) folgt aber, was für die Betrachtungen in Nr. 3.7. von Bedeutung sein wird, sogar schon aus einem Teil von 1)–6), insbesondere ohne 4). Um beim Nachweis hierfür das für uns Wesentliche herauszuheben, bedienen wir uns nachstehender Bezeichnungen.

Wir denken uns die Gerade  $\mathcal{I}$  (vgl. Nr. 3.2.) im Punkte  $P_e$  aufgeschnitten ( $P_e$  entspreche der extremen Hyperbel  $\mathfrak{H}_e$ ) und sie alsdann topologisch abgebildet auf die Strecke  $0 \leq x \leq 1$ , so daß  $x = 0$  und  $x = 1$  dem ursprünglichen Punkt  $P_e$  zugeordnet sind. Es wird so der Asymptotenwinkel  $\varphi(P)$  eine reelle Funktion  $f(x)$  mit  $[0, 1]$  als Definitionsbereich und  $[\delta, \pi - \delta]$  als Wertebereich.

Zunächst sei  $\mathfrak{H}_e$  als *nicht-ausgeartet angenommen*. Setzen wir  $d = \delta < \pi/2$ ,  $h = \pi/2$ , so hat  $f(x)$  gemäß Nr. 3.2.1. jedenfalls folgende Eigenschaften:

1') Gegeben sind die reellen Zahlen  $d, h, m$  mit  $d < h < 2h - d = m$ . Die reelle Funktion  $f(x)$  ist in  $J = [0, 1]$  erklärt mit

$d \leq f(x) \leq m$ . Es nimmt  $f(x)$  in  $J$  den Wert  $h$  genau einmal an.

2') Es ist  $f(x)$  eindeutig und stetig in<sup>42</sup>  $J' = J - \sum_{j=1}^k \{x_j\}$ .

Dabei<sup>43</sup> ist  $k = 3$  oder  $k = 1$  und  $x_i < x_{i+1}$  mit  $i = 0, \dots, k$ , ferner  $x_0 = 0, x_{k+1} = 1$ .

3') Es ist<sup>44</sup>  $f(0) = f(1) = d$ .

4') In  $x_j, j = 1, \dots, k; 1 \leq k$ ; existiert der links- und der rechts-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x < x_j}} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x > x_j}} f(x)$$

Überdies sind  $f(x_j - 0)$  und  $f(x_j + 0)$  die (beiden) Werte von  $f(x)$  in  $x_j, j = 1, \dots, k$ . Und es ist  $f(x_j - 0) + f(x_j + 0) = 2h$ , wobei der Fall  $f(x_j - 0) = f(x_j + 0) = h$  zugelassen ist; dieser Fall kann (wegen 1') nur für (höchstens) ein  $j$  eintreten.

Ist hingegen  $\mathfrak{H}_e$  ausgeartet, so gibt es zwei oder keine ausgearteten, nicht-extremen Hyperbeln; es ist 2') zu ersetzen durch diejenige Eigenschaft

2''), welche aus 2') hervorgeht, wenn  $k = 0$  oder  $k = 2$  vorgeschrieben wird.

Bei ausgearteter  $\mathfrak{H}_e$  erleidet ferner  $\varphi(P)$  in  $P_e$  einen Sprung von  $\delta$  nach  $\pi - \delta$ . Daher ist alsdann 3') zu ersetzen durch die Eigenschaft

3'') Es ist  $f(0) = d, f(1) = 2h - d$  (mit  $d < h$ ).

Die Eigenschaften 1') - 4') bzw. 1''), 2''), 3''), 4') sind in 1) - 6) der Nr. 3.2.1. enthalten, aber nicht umgekehrt (weil z. B. in 1') usw. die in 4) genannte Monotonie nicht gefordert wird).

Andererseits ziehen die Eigenschaften 1') usw. schon 7\*) (Nr. 3.6.) nach sich. Wir behaupten nämlich die Gültigkeit des folgenden

Hilfssatzes. Vor. Es besitze  $f(x)$  die Eigenschaften 1') - 4') oder 1''), 2''), 3''), 4').

<sup>42</sup> Mit  $\{x_j\}$  wird die einpunktige, nur  $x_j$  enthaltende Menge bezeichnet.

<sup>43</sup> Den  $x_j$  entsprechen die ausgearteten KS des KSB.

<sup>44</sup> Es soll also die extreme Hyperbel nicht ausgeartet sein (vgl. auch im Text weiter unten).

Beh. 1\*) Sind<sup>45</sup> alle  $f(x_j - 0) \neq h$ ,  $j = 1, \dots, k$ , und ist  $x = x'$  die (gemäß 1') einzige und innerhalb  $J'$  gelegene) Stelle mit  $f(x') = h$ , so besitzt  $f(x)$  in  $x'$  kein Extremum.

2\*) Ist dagegen<sup>46</sup>  $f(x_j - 0) = h$  für ein (gemäß 1') eindeutig bestimmtes)  $j$ , so hat die (in  $x_j$  gemäß 4') stetige) Funktion  $f(x)$  in  $x_j$  ein Extremum, und zwar ein Maximum oder Minimum, je nachdem  $j$  ungerade oder gerade ist.

Bew. Zu 1\*). Zunächst seien 1')-4') erfüllt. Ferner sei  $k = 3$ . Liegt  $x'$  in<sup>41</sup>  $(0, x_1)$  und wäre in  $x'$  ein Extremum von  $f(x)$  vorhanden, so könnte dieses wegen Vor. 1')-3') nur ein Maximum sein, da sonst (wegen des Zwischenwertsatzes für in  $(0, x_1)$  stetige Funktionen)  $f(x)$  den Wert  $h$  in  $(0, x_1)$  mindestens zweimal annimmt. Wegen (Vor.) 1'), 2') und 4') wäre  $f(x_1 - 0) < h < f(x_1 + 0)$  und  $f(x) > h$  in  $[x_1, x_2]$ ; aus den gleichen Gründen folgte  $f(x) < h$  in  $[x_2, x_3]$  und  $f(x) > h$  in  $[x_3, 1]$  im Widerspruch mit den Vor. d. h. mit  $f(1) = d$  (vgl. Vor. 3'). — Liegt  $x'$  in  $(x_1, x_2)$  so schließt man entsprechend wie oben: Es ist  $f(x) < h$  in  $[0, x_1]$ , also (wenn in  $x'$  ein Extremum vorliegt)  $f(x) \geq h$  in  $(x_1, x_2)$ , also  $f(x) < h$  in  $[x_2, x_3]$ , also  $f(x) > h$  in  $[x_3, 1]$ , also Widerspruch mit  $f(1) = d$ . Entsprechend erledigt man die noch übrigen Fälle:  $x' \in (x_2, x_3)$  und  $x' \in (x_3, 1)$  sowie den Fall  $k = 1$ . — Sind dagegen 1'), 2''), 3''), 4') erfüllt und ist zunächst  $k = 2$ , so kommt man für z. B.  $x' \in (0, x_1)$  und  $f(x') = h$  bei der vorstehend angewandten Schlußweise zur Folgerung, daß  $f(x) < h$  in  $(x_2, 1)$ , während doch  $f(1) = 2h - d > h$  sein sollte. Entsprechend für  $k = 0$ .

Zu 2\*). Sind zunächst wieder 1')-4') erfüllt, ist ferner etwa  $k = 3$  und  $j = 1$ , so schließen wir, ähnlich wie bei 1\*), so: Wegen  $f(0) = d$  und  $f(x_1 - 0) = f(x_1 + 0) = h$  ist  $f(x)$  stetig in  $[0, x_2)$ . Wäre also in  $x_1$  kein Extremum vorhanden, so müßte  $f(x) > h$  sein in  $(x_1, x_2]$ , weil  $f(0) = d < h$ . Wie bei 1\*) käme man daher zu  $f(x) > h$  in  $(x_3, 1]$  und damit zu einem Widerspruch. Entsprechend ergeben sich Widersprüche für  $x' = x_2$ ,  $x' = x_3$ , ferner für  $k = 1$  und schließlich bei den Vor. 1'), 2''), 3''), 4').

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

<sup>45</sup> Es soll also die gleichseitige Hyperbel  $\mathfrak{H}_0$  des KSB nicht ausgeartet sein.

<sup>46</sup> d. h.  $\mathfrak{H}_0$  ist ausgeartet (vgl. die vorangehende Fußnote).

**3.7.** In Nr. 3.6.1. ist gezeigt, daß die Eigenschaft 7) der Nr. 3.2.1. aus 1)–6) folgt, und zwar z. B. ohne 4). Wir können noch etwas weitergehen, indem wir nämlich, grob gesprochen, 4) als Folge von 1), 2), 3), 5), 6) nachweisen. Genauer gesagt: Wir werden die Richtigkeit des folgenden Satzes zeigen

**Satz.** Vor. *Es besitze  $f(x)$  die Eigenschaften 1')–4') oder 1'), 2''), 3''), 4') aus Nr. 3.6.1. Ferner gelte noch:*

*1'a) Es nimmt  $f(x)$  in  $J$  jeden Wert höchstens zweimal an;*

*4'a) Ist  $f(x_j - 0) \neq h$  und  $f(x) \leq f(x_j - 0)$  bzw.  $f(x) \geq f(x_j - 0)$  in einer linksseitigen Umgebung von  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , so ist auch  $f(x) \leq f(x_j + 0)$  bzw.  $f(x) \geq f(x_j + 0)$  in einer rechtsseitigen Umgebung von  $x_j$ .*

*Beh. Es ist  $f(x)$  streng monoton in jedem Intervall  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_{k+1} = 1$ . Und zwar nimmt  $f(x)$  zu oder ab in  $(x_i, x_{i+1})$ , je nachdem  $i$  gerade oder ungerade ist.*

Der Beweis läßt sich so führen:

**3.7.1.** Es gelten die Beh. 1\*) und 2\*) des Hilfssatzes in Nr. 3.6.1., weil dessen Vor. auch hier erfüllt sind.

**3.7.2.** Ziehen wir, außer den Vor. des Hilfssatzes, aber ohne 4'), noch die Vor. 1'a) heran, so ergibt sich u. a., daß  $f(x)$  stückweise monoton ist. In der Tat folgt der Reihe nach:

**a)** Besitzt  $f(x)$  an der innerhalb  $J'$  gelegenen Stelle  $x'$  ein lokales Maximum bzw. Minimum, so ist  $f(x')$  weder innerer Punkt noch rechter bzw. linker Endpunkt eines (dem Wertebereich von  $y = f(x)$  angehörigen) Intervalles, dessen Urbildmenge vermöge  $y = f(x)$  Summe endlich vieler, abgeschlossener, zu  $x'$  fremder Stetigkeitsintervalle von  $f(x)$  ist.

**b)** Im Innern eines jeden der Intervalle  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k$ , besitzt  $f(x)$  höchstens zwei Extreme; in jedem der  $(x_i, x_{i+1})$  setzt sich daher  $f(x)$  aus endlich vielen, streng monotonen Stücken zusammen. – In der Tat: Besäße  $f(x)$  im Stetigkeitsintervall  $S$  mindestens drei Extrema, so wären mindestens zwei von ihnen gleichartig, d. h. z. B. mindestens zwei von ihnen wären Maxima, etwa an den Stellen  $x'$ ,  $x''$ . Da  $x'$  und  $x''$  beide zu  $S$  gehören, ist **a)** anwendbar.

**c)** In  $(0, x_1)$  sowohl als in  $(x_k, 1)$  besitzt  $f(x)$  nicht mehr als ein Extremum. Und zwar müßte ein in  $(0, x_1)$  auftretendes Extremum

ein Maximum sein, hingegen ein in  $(x_h, 1)$  auftretendes Extremum ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Vor. 1')-4') oder 1'), 2''), 3''), 4') gelten. — In der Tat: Es werde zunächst  $(0, x_1)$  betrachtet. In einer Umgebung von  $x = 0$  wächst  $f(x)$ . Besitzt daher  $f(x)$  in  $(0, x_1)$  überhaupt ein Extremum, so kommt unter diesen jedenfalls ein Maximum vor; ein solches liege etwa in  $x'$ . Würde daneben auch ein Minimum auftreten, etwa in  $x''$ , so wäre  $0 < x' < x''$  und — für das am nächsten bei  $x'$  gelegene  $x''$  — überdies  $f(x') > f(x'')$ . Daher ließe sich a) anwenden, was zu einem Widerspruch führen würde. Die Untersuchung für  $(x_h, 1)$  führt man vermöge  $z = 1 - x$ ,  $F(z) = f(1 - z)$  bzw. vermöge  $z = 1 - x$ ,  $F(z) = m - f(1 - z)$  auf die von  $(0, x_1)$  zurück, je nachdem  $k = 2t + 1$  oder  $k = 2t$  ist.

Zusatz: Da  $f(x)$  zufolge b) stückweise monoton ist in  $J'$ , so existieren die einseitigen Limiten  $f(x_j \pm 0)$ , ohne daß dies besonders (wie in Vor. 4'')) vorausgesetzt zu werden bräuchte (denn Vor. 4') wird beim Beweis von b) nicht benutzt).

**3.7.3.** Aus 3.2.1. und 3.7.2. ergibt sich jetzt: Ist  $f(x') = h$  und ist  $x' \neq x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , so ist  $f(x)$  in einer zweiseitigen Umgebung von  $x'$  streng monoton; es werden also alle Werte aus einer Umgebung von  $h$  (auf der reellen Zahlgeraden) genau einmal angenommen, und zwar innerhalb genau eines der Intervalle  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Ist speziell  $(0, x_1)$  dieses Intervall, d. h.  $x' \in (0, x_1)$ , so ist  $f(x)$  in  $(x_1, x_2)$ , sowie (falls  $k = 3$ ) in  $(x_3, 1)$  monoton und kleiner als  $h$ ; ferner ist  $f(x) > h$  in  $(x_2, x_3)$ . Ist dagegen  $f(x') = h$  mit  $x' = x_j$ , so nimmt  $f(x)$  in der rechtsseitigen Umgebung von  $x_j$  zu oder ab, je nachdem  $f(x)$  in der linksseitigen ab- oder zunimmt.

Anmerkung. Zu der letzten Aussage betr.  $f(x') = h$  mit  $x' = x_j$  beachte man, daß zu ihrem Beweis die Vor. 4'a) nicht herangezogen wurde.

**3.7.4.** Machen wir schließlich auch von der Vor. 4'a) Gebrauch, so folgt wegen Nr. 3.7.2., b) zunächst: Es nimmt  $f(x)$  in der rechtsseitigen Umgebung von  $x_j$  zu oder ab; je nachdem nimmt  $f(x)$  in der linksseitigen Umgebung von  $x_j$  ab oder zu,  $j = 1, \dots, k$ . (Dies gilt sowohl für  $f(x) \neq h$  als für  $f(x) = h$ .)

**3.7.5.** Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum Beweis der Beh. in Nr. 3.7. Dabei legen wir *zunächst die Vor. 1')-4')*,

sowie 1'a), 4'a) zugrunde und machen außerdem die Annahme, daß  $f(x)$  den Wert  $h$  in  $J'$  annimmt, daß also  $h = f(x')$  für  $x' \neq x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Zur Abkürzung sagen wir ferner im folgenden, es nehme  $f(x)$  in  $f(x_j - 0)$  bzw. in  $(x_j + 0)$  zu oder ab, wenn  $f(x)$  in einer linksseitigen bzw. in einer rechtsseitigen Umgebung von  $x_j$  zu- oder abnimmt.

**3.7.5.1.** Der Fall  $k = 1$  erledigt sich einfach. Ist nämlich  $f(x') = h$  mit  $x' \in (0, x_1)$ , so muß  $f(x)$  monoton und kleiner als  $h$  sein in  $(x_1, 1)$  gemäß Nr. 3.7.3. Wegen  $f(1) = d$  nimmt also  $f(x)$  ab in  $(x_1 + 0)$ , also zu in  $(x_1 - 0)$  gemäß Vor. 4'a). Außerdem ist  $f(x_1 - 0) > h$ . Wäre nun  $f(x)$  nicht monoton in  $(0, x_1)$ , so müßte  $f(x)$  mindestens ein Minimum besitzen entgegen Nr. 3.7.2., c). Der Fall, daß  $x' \in (x_1, 1)$  wird durch Vertauschung von  $x$  mit  $1 - x$  auf den vorhergehenden zurückgeführt.

**3.7.5.2.** Nunmehr sei  $k = 3$ . O. B. d. A. können wir uns auf die Betrachtung der folgenden zwei Fälle beschränken: Es nimmt  $f(x)$  den Wert  $h$  entweder in  $(0, x_1)$  oder in  $(x_1, x_2)$  an. Auf diese beiden nämlich lassen sich die übrigen Fällen zurückführen, indem man  $x$  durch  $1 - x$  ersetzt, also  $x = 0$  mit  $x = 1$  und  $x_1$  mit  $x_3$  vertauscht. Die Durchführung des Beweises für diese beiden Fälle erfolgt durch systematische Diskussion aller denkbaren Unterfälle. Es genügt, diese Fallunterscheidungen nachstehend aufzuzählen.

*I. Fall:* Es nehme  $f(x)$  den Wert  $h$  in  $(0, x_1)$  an. Unterfälle:

*I. 1.* In  $(0, x_1)$  besitze  $f(x)$  in Maximum.

*I. 2.* In  $(0, x_1)$  sei  $f(x)$  monoton (also zunehmend). Unterfälle:

*I. 2. 1.* In  $(x_2, x_3)$  besitze  $f(x)$  ein (einziges) Maximum oder

*I. 2. 2.* sei dort monoton (zunehmend).

*II. Fall:* Es nehme  $f(x)$  den Wert  $h$  in  $(x_1, x_2)$  an. Unterfälle:

*II. 1.* In  $(0, x_1)$  besitze  $f(x)$  genau ein Extremum (Maximum).

*II. 2.* In  $(0, x_1)$  sei  $f(x)$  monoton (und kleiner als  $h$ ). Unterfälle:

*II. 2. 1.* In  $(x_1, x_2)$  besitze  $f(x)$  ein (einziges) Minimum ( $< h$ ).

*II. 2. 2.* In  $(x_1, x_2)$  sei  $f(x)$  monoton (abnehmend). Unterfälle:

*II. 2. 2. 1.* bzw. *II. 2. 2. 2.* bzw. *II. 2. 2. 3.* je nachdem  $f(x)$  in  $(x_2, x_3)$  zwei Extrema (Maximum und Minimum) bzw. ein Extremum (Maximum) bzw. kein Extremum besitzt. In *II. 2. 2. 1.* und *II. 2. 2. 2.* werden dabei noch die Fälle unterschieden, daß  $f(x_1 - 0) \leq$  oder  $> f(x_2 - 0)$  ist.

**3.7.6.** Die in Nr. 3.7.5. noch nicht erledigten Fälle (es wird der Wert  $h$  in einem der  $x_j$  angenommen oder es werden die Vor. 1'), 2''), 3''), 4'), 1'a), 4'a) zugrunde gelegt) lassen sich ganz entsprechend behandeln. Man kann estere Fälle aber auch auf den in Nr. 3.7.5. behandelten Fall folgendermaßen zurückführen: Ist  $\tilde{f}(x)$  eine Funktion, welche den Vor. eines der in Nr. 3.7.5. noch nicht behandelten Fälle genügt, so läßt sich aus  $\tilde{f}(x)$  durch passende Abänderung in beliebig klein wählbarer Umgebung von geeignet gewählten unter den  $x_j$  eine Funktion  $f(x)$  gewinnen, welche den in Nr. 3.7.5. zugrunde gelegten Vor. genügt. Besäße nun  $\tilde{f}(x)$  Extrema innerhalb der  $(x_i, x_{i+1})$ , so könnten diese nur in endlicher Anzahl vorhanden sein (Nr. 3.7.2., b)) und die eben erwähnten Umgebungen der  $x_j$  ließen sich so wählen, daß sie keine dieser Extrema enthalten. Mithin erhalte man eine den Vor. in Nr. 3.7.5. genügende Funktion  $f(x)$  mit Extremen innerhalb der  $(x_i, x_{i+1})$ , was unmöglich ist gemäß Nr. 3.7.5.

**3.8.** Schließlich seien noch Beispiele von Büscheln mit nicht-analytischen Kurven zweiter linearer (Realitäts-) Ordnung angegeben, welche die in Nr. 2.5. geforderten Eigenschaften besitzen und für welche die in § 2 und § 3 mitgeteilten Sätze über die Verteilung der Asymptotenwinkel der hyperbelartigen Büschelkurven gelten. Bei z. B. lauter reellen Grundpunkten und nicht-entarteten Grundpunktviereck kann man solche Büschel auf folgende Weise erhalten.

Wir betrachten (vgl. etwa Fig. 1) ein beliebiges beschränktes Dreieck, etwa  $ADK$ , dessen Ecken von zwei Grundpunkten, etwa  $A$  und  $D$ , zusammen mit dem Schnittpunkt, etwa  $K$ , zweier Diagonalen gebildet werden und wobei keine Dreiecksseite einen weiteren Grundpunkt (als inneren Punkt) enthält. Das Innere eines solchen Dreiecks wird sodann schlicht überdeckt von einer Teilschar der KS des zum betrachteten Grundpunktviereck gehörigen KSB, genauer von Teilbogen  $\mathfrak{Z}$  der KS dieser Teilschar. Diese  $\mathfrak{Z}$  sind 1) konvex und haben 2) mit dem Dreieck außer inneren Punkten nur  $A$  und  $D$  als Endpunkte gemeinsam. Es sei nun  $t$  eine topologische Abbildung des abgeschlossenen Dreiecks  $ADK$  auf sich von folgender Beschaffenheit: Bei  $t$  bleibt sowohl  $K$  als jeder Punkt der Dreiecksseite  $AD$  fest (und die Seiten  $AK$ ,  $DK$  gehen in sich über); ferner ist das Bild  $\mathfrak{Z}' = t(\mathfrak{Z})$  von  $\mathfrak{Z}$  ein

Bogen mit den Eigenschaften 1) (und 2)) und es liegt  $\mathfrak{L}'$  bis auf  $A$  und  $D$  „zwischen“  $AD$  und  $\mathfrak{L}$ , d. h. in dem von  $AD$  und  $\mathfrak{L}$  begrenzten, beschränkten (konvexen) Gebiet. Ist dann  $\mathfrak{L}$  Teilbogen des KS  $\mathfrak{K}$ , so ist  $\mathfrak{K}' = (\mathfrak{K} - \mathfrak{L}) + t(\mathfrak{L})$  wieder eine Kurve zweiter Ordnung; und die  $\mathfrak{K}'$  bilden zusammen mit den zum Innern des Dreiecks  $ADK$  fremden KS des KSB ein Büschel der gewünschten Beschaffenheit (denn die  $\mathfrak{K}'$  sind nicht-analytisch, weil  $\mathfrak{L}' \neq \mathfrak{L}$  ist).

Es gibt nun Abbildungen  $t$  der geforderten Art, nämlich sogar projektive. Man kann aber auch nicht-projektive  $t$  leicht herstellen. Ferner kann man Abbildungen  $t$  gleichzeitig für jedes der oben gekennzeichneten, in der Figur des Grundpunktvierecks auftretenden Dreiecke vornehmen. Schließlich könnte man auch „Dreiecke“ in Betracht ziehen, welche von der uneigentlichen Geraden getroffen werden. Auf diese Weise erhält man Büschel der gewünschten Art, welche sich mehr und mehr von den KSB unterscheiden.