Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Schwach ordnungsminimale Kontinua im projektiven R_n.

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 4. Juli 1947.

Definiert man im projektiven Raum R_n den (starken) Ordnungswert (kurz OW) eines Kontinuums $\mathfrak{K}$ als maximale Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{K}$ mit allen Hyperebenen des R_n (falls das Maximum existiert), so sind die ordnungsminimalen Kontinua, d. h. die Kontinua vom (minimalen, starken) Ordnungswert n, identisch mit den einfachen Bogen und Kurven vom OW n. Bei vielen Untersuchungen ist aber nicht der starke, sondern der schwache Ordnungswert, kurz SOW, der angemessene[1]; dieser SOW ergibt sich, wenn die maximale Durchschnittsmächtigkeit nicht bezüglich aller Hyperebenen genommen wird, sondern wenn dabei abgesehen werden darf von einer im Raume aller Hyperebenen nirgends dichten Menge von Hyperebenen. Die Kontinua vom minimalen SOW n sind weit weniger einfach zu bestimmen. Dies hat seinen Grund darin, daß im Falle des schwachen Ordnungswertes in solchen Kontinuen Verzweigungspunkte (im Sinne der topologischen Kurventheorie) auftreten können. Eine nähere Untersuchung zeigt nun: Ist mindestens ein Verzweigungspunkt vorhanden, so ist das ordnungsminimale Kontinuum Summe von höchstens $2n$ mehrpunktigen Teilmengen, deren jede je in einem linearen Unterraum von niedrigerer Dimension als das Kontinuum selbst enthalten ist.

Im einzelnen sei an Ergebnissen (ohne Beweis) folgendes mitgeteilt. Unter der linearen Hülle $L(\mathfrak{M})$ einer Punktmenge $\mathfrak{M} \subset R_n$ verstehe man den Durchschnitt aller, $\mathfrak{M}$ enthaltender, linearen Unterräume von R_n (einschließlich R_n selbst) und unter dem Rang $R(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ die Dimension von $L(\mathfrak{M})$. Als Kontinuum werde jede mehrpunktige, zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge des R_n bezeichnet (jedes Kontinuum im R_n ist kompakt). Dann gilt:

[1] Vgl. diese Sitz.-Ber. (math.-naturwiss. Kl.) 1941, 57 ff.

Jedes Kontinuum im R_n von beschränktem SOW *ist erbliche Bogensumme.*

Das Kontinuum C sei ordnungsminimal. Zu jedem Verzweigungspunkt V von $\mathfrak{C}$ erklären wir zwei Kennzahlen M_V und R_V folgendermaßen: Es sei M_V gleich dem Maximum der Mächtigkeit $M(\mathfrak{C}\, L_{n-1})$ des Durchschnittes $\mathfrak{C}\, L_{n-1}$ von $\mathfrak{C}$ mit allen denjenigen Hyperebenen L_{n-1} durch V, für die der Durchschnitt $\mathfrak{C}\, L_{n-1}$ endlich ist (also kein Kontinuum enthält). Ferner sei R_V das Maximum des Ranges von $\mathfrak{C}\, L_{n-1}$ für alle Hyperebenen L_{n-1} durch V, für die $M_V = M(\mathfrak{C} L_{n-1})$ ist. Jede Hyperebene L_{n-1} durch V und mit $M(\mathfrak{C} L_{n-1}) = M_V$ sowie $R(\mathfrak{C} L_{n-1}) = R_V$ werde als maximal bezüglich V bezeichnet. Dann gelten die Sätze:

Satz. *Es ist* $1 \leq M_V < 3n + 1$; $0 \leq R_V \leq n - 2$; $R_V \leq M_V - 1$.

Satz. Vor. *Es sei L' eine maximale Hyperebene bezüglich des Verzweigungspunktes V und $\mathfrak{D}' = \mathfrak{C} L'$, also $M_V = M(\mathfrak{D}')$, $R_V = R(\mathfrak{D}')$.*

Beh. (I) *Für jede $\mathfrak{D}'$ enthaltende Hyperebene L_{n-1} gilt:*

(1) *Es ist $(\mathfrak{C} - \mathfrak{D}')\, L_{n-1}$ entweder leer oder nicht punkthaft.*

(2) *Jede Komponente von $(\mathfrak{C} - L_{n-1})$ mündet nur in $\mathfrak{D}'$ (also nicht in $(\mathfrak{C} - \mathfrak{D}')\, L_{n-1}$).*

(3) *Jede Komponente von $(\mathfrak{C} - \mathfrak{D}')\, L_{n-1}$ mündet in $\mathfrak{D}'$ (sofern eine solche Komponente existiert* (vgl. (1)).

(II) *Es ist $\mathfrak{C}$ Summe aus mindestens $(n - R_V)$ und höchstens $2n$ Teilmengen $\mathfrak{T}'_j$, $j = 1, \ldots, q$, von folgender Beschaffenheit: Es ist $\mathfrak{T}'_j \mathfrak{T}'_m = \mathfrak{D}' = \mathfrak{C} L'$ für $j \neq m$; $j, m = 1, \ldots, q$; ferner ist $(\mathfrak{T}'_j - \mathfrak{D}') \neq 0$ und $R(\mathfrak{T}'_j) = 1 + R_V$. Für jedes j ist $(\mathfrak{T}'_j - \mathfrak{D}')$ Summe endlich vieler Komponenten, deren jede mehrpunktig ist und in einem der M_V Punkte von $\mathfrak{D}'$ mündet; ist k_j die Anzahl dieser Komponenten, so gilt $n - R_V \leq q \leq k_1 + \ldots + k_q \leq 2n$.*

Satz. *Die Anzahl der Verzweigungspunkte eines ordnungsminimalen Kontinuums im R_n besitzt eine nur von n abhängige endliche obere Schranke.*

Eine entsprechende Untersuchung der Kontinua vom SOW $(n + 1)$ bleibe vorbehalten.