Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein.

Von **Ch. Müntz.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vorwort.

Wir geben im folgenden die Resultate ausgedehnter Untersuchungen wieder, deren volle Begründung einem ausführlichen besonderen Werke vorbehalten bleiben möge. Es handelt sich darum, den Aufbau der gesamten Geometrie auf die geringste Zahl von Voraussetzungen zurückzuführen, überall darin nicht nur hinreichende, sondern auch durchaus notwendige Elemente zu geben, und insbesondere keine Axiome zuzulassen, wo schon Definitionen ausreichen. Nach solchen vorwiegend logischen Prinzipien hat in einem berühmten Werke zuletzt Herr Prof. Hilbert („Grundlagen der Geometrie") die Axiomatik behandelt; die Untersuchung der ebenen Verhältnisse allein, ohne Benutzung des dreidimensionalen Raumes — obwohl auch die Axiome des letzteren gegeben werden — spielt in diesem Werke die Hauptrolle, wodurch neben den projektiven Axiomen der Verknüpfung und Anordnung die Aufstellung einer Reihe von weiteren Axiomgruppen notwendig wird.

Es ist indes möglich, mit den projektiven Axiomen allein (Gruppen I, II bei Hilbert) auszukommen und auch dort einige Einschränkungen vorzunehmen. Durch die Benutzung sämtlicher projektiver Axiome und des Parallelenpostulats, des letzteren in wesentlich eingeschränkter Gestalt, lassen sich auf

Grund geeigneter Definitionen die übrigen Axiomgruppen (III bis V bei Hilbert) direkt ableiten und fallen daher als solche einfach fort.

Die Richtlinien des zugehörigen Programms hat, auf den klassischen Untersuchungen von v. Staudt fußend und wichtige Resultate von Cayley heranziehend, zuerst Herr Prof. Klein in einer grundlegenden Abhandlung (Mathem. Annalen Bd. 6) gegeben, und bedeutsame Untersuchungen in gleicher Richtung finden sich in den Werken von Herrn Prof. Pasch („Vorlesungen über neuere Geometrie") und Herrn Prof. Lindemann („Vorlesungen über Geometrie" Bd. II, 1).

Über diese Arbeiten hinaus, die übrigens den Hilbertschen Untersuchungen zeitlich vorangegangen sind und im wesentlichen eine ganz andere — nämlich die rein projektive — Richtung vertreten, geben die folgenden Ausführungen zunächst eine äußerste Einschränkung der Axiomatik[1]), alsdann eine Zurückführung des Parallelenproblems auf seine letzten Elemente, und zuletzt eine neue, rein synthetische Begründung der Metrik.

Neben den bislang betrachteten drei Grundformen des Raumes treten dabei durch das Parallelenproblem und seine dualen Erweiterungen auch andersgeartete Räume auf, die eine Vervollständigung und Verbindung jener Grundformen darstellen und die Gesamtheit der regulären Geometrien erschöpfen. Es gibt 9 ebene und 27 räumliche homogene Geometrien. Sie sind arithmetisch dadurch charakterisiert, daß in ihnen — abgesehen von Perioden — die Entfernungen und Winkel durch das gleiche ideale Gebilde analytisch eindeutig bestimmt sind; geometrisch — dadurch, daß in ihnen bei homogenem Verhalten der eigentlichen Elemente jedem projektiven Grundgebilde

[1]) Vereinfachungen der geometrischen Axiomatik sind in letzter Zeit häufig gegeben worden, so von den Herren Moore (Math. Trans. 1902), Veblen (ibd. 1904), Rosenthal (Math. Ann. 1910, 1912); insbesondere vertritt die Arbeit von Herrn Veblen auch in der Begründung der Euklidischen Lehre von den Kongruenzen projektive Gesichtspunkte.

Die im Texte befolgte Darstellung schließt sich am nächsten dem projektiven Teil der Axiomatik von Herrn Prof. F. Schur („Grundlagen der Geometrie") an.

(Punktreihe, Strahlenbündel, Ebenenbüschel) eine einheitliche Art der Metrik (elliptisch, oder parabolisch, oder hyperbolisch) zukommt; gruppentheoretisch — dadurch, daß sie bei richtiger Auffassung sämtlich alle Bewegungen zulassen: ∞^3 in der Ebene, ∞^6 im Raume. Durch jede dieser Eigenschaften sind umgekehrt alle angegebenen Geometrien, und nur sie, definiert.

Zur Ergänzung der Untersuchung haben wir noch als letzte Erweiterung die von Hilbert aufgestellte Nicht-Archimedische Geometrie synthetisch in die Archimedische eingebaut.

Die vom mathematischen und philosophischen Standpunkte ausgezeichnete Stellung der Euklidischen Geometrie und der dadurch begründete Vorrang der klassischen Raumlehre bilden den Inhalt der abschließenden Betrachtungen.

I. Die projektiven Axiome.

Die Geometrie hat zu ihrem Gegenstand den Raum der menschlichen Anschauung und seine Teile. Bei Betrachtung oder Vorstellung von Teilen des Raumes läßt sich jede subjektiv gewählte feste Grenze der wirklichen Anschauung unterbieten; durch den Vorbehalt, eine solche Grenze bei erneuter Betrachtung kleiner gewählt zu denken, gelangt man zum Begriff des Punktes, als idealer Grenze räumlicher Vorstellung und Wahrnehmung.

Der Aufbau der Geometrie geschieht durch Axiome, Konstruktionen und Definitionen. Jedes geometrische Axiom ist eine Festsetzung, d. h. ein freier Willensakt des Denkens, dem keine absolute logische Notwendigkeit innewohnt. Das Kriterium für die Aufstellung von solchen Axiomen ist die Anpassung an die reine Anschauung des Raumes; in diesem Sinne kommt den geometrischen Axiomen eine psychologische Notwendigkeit zu, obwohl sie, nur logisch betrachtet, beliebig abgeändert werden und so zu neuen Geometrien Anlaß geben können.

Das Ziel der Axiomatik ist: mit geringsten Mitteln den Aufbau des Raumes der Anschauung zu ermöglichen und ihn

nach logischen Prinzipien zu ordnen, insbesondere dem Zahlbegriff zugänglich zu gestalten.

Axiom 1. Der Raum hat beliebig viele Punkte.

Axiom 2. Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gesamtheit von Punkten: die Gerade.

Axiom 3. Die Gerade ist durch zwei beliebige ihrer Punkte eindeutig bestimmt.

Für die Anordnung der Punkte einer Geraden sind neue Axiome notwendig, die eine Beziehung zwischen beliebig (endlich) vielen Punkten und den natürlichen Zahlen eindeutig ermöglichen. Als Grundlage dieser Beziehung kann am zweckmäßigsten der aus der Zahlenreihe abstrahierte Begriff „zwischen" dienen, für dessen Anwendbarkeit auf ein vorgelegtes System von Dingen (Vorstellungsinhalten) A, B, C usf. folgende Eigenschaften dieses Begriffes festgelegt werden mögen:

a) von drei betrachteten Dingen liegt das eine (B), und nur dieses eine, zwischen den beiden anderen (A und C);

b) liegt B zwischen A und C, so liegt es auch zwischen C und A;

c) liegt B zwischen A und C, und C zwischen B und D, so liegt C auch zwischen A und D.

Axiom 4. Die Anordnung beliebig vieler Punkte einer Geraden nach dem Begriffe „zwischen" ist immer möglich[1]).

Axiom 5. Zu zwei Punkten A und C einer Geraden läßt sich (unter den bereits existent gedachten Punkten des Raumes) ein dritter B so angeben, daß B zwischen A und C, und

Axiom 6. ein vierter D so, daß C zwischen A und D zu liegen kommt.

Axiom 7. Durch die Punkte einer Geraden ist der Raum nicht erschöpft.

[1]) In der elliptischen Geometrie ist dabei irgend ein Punkt der Geraden auszuschließen.

Durch die Angabe eines Punktes außerhalb einer Geraden wird die Konstruktion von beliebig vielen weiteren Geraden möglich, die sich sämtlich dem Begriff der Ebene unterordnen. Für diesen Begriff legen wir folgende spezielle Konstruktion zugrunde, die in allen drei Grundformen der Geometrie[1]) ausführbar ist:

In einem Punkte O mögen sich zwei Gerade treffen; auf jeder Geraden wählen wir nach beiden Seiten von O je einen bestimmten Punkt und verbinden diese Punkte durch geradlinige Strecken untereinander, so ein Viereck als Basis gewinnend; nach jedem Punkte dieser Basis werde von O ein Halbstrahl gezogen; die Gesamtheit der so gewonnenen Punkte ergibt ein Gebilde, das wir Ebene nennen.

Für die Einordnung der übrigen Geraden, deren Konstruktion nun möglich wird, stellen wir ein Axiom auf, durch welches sie in der gewonnenen Ebene aufgehen:

Axiom 8. Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt die ganze Gerade in dieser Ebene.

Es läßt sich dann folgender Satz beweisen, der sonst, ohne die Angabe einer bestimmten Konstruktion für die Ebene, erst durch zwei besondere Axiome (Hilbert I 4, I 5) festgelegt werden müßte: eine Ebene ist durch drei beliebige nicht in gerader Linie liegende Punkte in ihr eindeutig bestimmt. Auf Grund der gegebenen Konstruktion der Ebene läßt sich[2]) der Begriff der Halbebenen um eine Gerade definieren. Der einfache Zusammenhang der Ebene muß dann noch besonders festgelegt werden.

Axiom 9. Beim Schneiden zweier Geraden einer Ebene tritt die schneidende Gerade aus der einen, von der geschnittenen Geraden gebildeten Halbebene in die andere.

[1]) Wir verstehen darunter die Euklidische, die Gaußsche und die Riemannsche Geometrie.

[2]) In der elliptischen Geometrie ist dabei irgend eine Gerade der Ebene von der Betrachtung auszuschließen.

Dieses Axiom vertritt dasjenige von Pasch (Hilbert II 4), welches in seiner Fassung zu weit ist.

Axiom 10. Durch die Punkte einer Ebene ist der Raum nicht erschöpft.

Wir können nun jedes weitere räumliche Axiom entbehren, wenn wir für den Raum eine bestimmte, in allen Geometrien ausführbare Konstruktion geben.

Neben einer Ebene sei ein Punkt C außerhalb ihr gegeben. Wir legen durch einen Punkt O dieser Ebene in früher gegebener Weise eine Basis fest und verbinden außerdem C mit O durch eine Gerade $(C\,O\,C')$; als Basis des Raumes läßt sich dann ein so bestimmtes räumliches Oktaëder nehmen.

Nach allen Punkten der Begrenzung dieses Oktaëders ziehe man von O aus Halbstrahlen; die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte möge als Raum definiert werden — auf Grund dieser Konstruktion und der bisherigen Axiome, denen alle Elemente des gewonnenen Raumes unterworfen bleiben mögen, sind dann alle geometrischen Eigenschaften des Raumes gegeben.

Es läßt sich so wiederum als Satz beweisen, was sonst durch ein besonderes Axiom (Hilbert I 7) ausgesprochen werden müßte: wenn zwei Ebenen[1]) einen Punkt gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein.

Der Satz von Desargues folgt daraus, und seine Gültigkeit in der Ausgangsebene ist[2]), rein projektiv betrachtet, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie als Teil eines Raumes von drei Dimensionen betrachtet werden dürfe.

2. Der projektive Raum.

Die zehn vorhin gegebenen projektiven Axiome erlauben, die ganze projektive Geometrie, einschließlich ihrer analytischen Darstellung, von einem im Endlichen abgegrenzten Teil des Raumes aus zu gewinnen.

[1]) Des gleichen dreidimensionalen Raumes — denn in höheren Dimensionen gilt der Satz nicht mehr.

[2]) Vgl. Hilbert, l. c., p. 96.

Der Satz von der Eindeutigkeit des vierten harmonischen Elementes zu drei in bestimmter Folge in einem Grundgebilde erster Stufe gegebenen spielt dabei die entscheidende Rolle.

Unter Zugrundelegung eines Koordinatentetraëders lassen sich die Punkte des Raumes auf rein projektivem Wege mit Zahlenquadrupeln — homogenen, projektiven Koordinaten — belegen; als Zahlen gelten dabei zunächst die gewöhnlichen rationalen Zahlen, nur die ihnen entsprechenden Punkte sind zunächst existent gedacht. Jede Ebene erhält dann zu ihrer analytischen Darstellung eine homogene lineare Gleichung.

Es können nun beliebige und allgemeinste Erweiterungen des vorläufig abgegrenzt gedachten dreidimensionalen Raumes dadurch vorgenommen werden, daß man zu zwei beliebigen Geraden einer Ebene, da sie eindeutig ein Bündel im Raume bestimmen und dieses Bündel in gleicher Weise durch zwei beliebige Strahlen in ihm bestimmt ist — eine ausführliche Darstellung findet man bei Pasch —, ein Zentrum ihres Bündels hinzunimmt, auch wenn man über dessen reale Existenz nichts aussagen kann. Die analytische projektive Geometrie läßt sich dann auf alle überhaupt möglichen Zahlenquadrupel ausdehnen, wobei nunmehr das Wort „Zahl" im allgemeinsten Sinne verstanden werden kann. Jede homogene lineare Gleichung bestimmt in ihr eine Ebene; zwei Ebenen schneiden sich nun immer in einer Geraden, zwei Gerade einer Ebene und ebenso drei Ebenen des Raumes — immer in einem Punkte.

In dem so gewonnenen projektiven Raume wird das Gesetz der Dualität für räumliche und ebene Verhältnisse uneingeschränkt gültig. Alle überhaupt möglichen Raumformen fließen in einer einzigen Idealgeometrie zusammen, die wir absolute projektive Geometrie heißen können. Innerhalb dieser ist dann die weitere Trennung zwischen Realem und Idealem vorzunehmen.

Der gleiche absolute projektive Raum läßt sich aber auch aus noch wenigeren Voraussetzungen, als oben gegeben, aufbauen, sobald man neben idealen Punkten auf eigentlichen Geraden auch die dual entsprechende Möglichkeit idealer Ge-

raden durch eigentliche Punkte und idealer Ebenen durch eigentliche Gerade offen läßt. Es ist nicht schwer, die hierzu notwendigen Änderungen der Axiomatik anzugeben: wir wollen dann von einer absoluten projektiven Axiomatik sprechen.

Eine andere Einschränkung würde darin bestehen, daß man sich zunächst auf das Innere eines Tetraëders beschränkte und alle Axiome und Definitionen danach richtete: auch dies würde zur Gewinnung des gesamten projektiven Raumes genügen (vgl. F. Schur, l. c.).

3. Das Parallelenproblem.

Den hier folgenden Betrachtungen sei ein System von projektiven Axiomen zugrundegelegt, das für den Aufbau aller drei Grundformen der Geometrie hinreicht — etwa das von uns vorangestellte, oder z. B. das der Hilbertschen Gruppen I, II. Wenn dann ein einziges Mal zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen äußeren Punkt in der dadurch bestimmten Ebene nur eine einzige wirkliche Nichtschneidende vorausgesetzt wird, so besteht gegenüber dieser Geraden das gleiche Verhalten in jedem Punkte des Raumes — der Beweis ist durch die Betrachtung des projektiv geordneten zugehörigen Büschels zu erbringen; es ist dann der ganze Raum durch ein Bündel ausgefüllt, dessen Zentrum ein bestimmter Idealpunkt — ein Euklidischer uneigentlicher Punkt — ist; zwei beliebige Gerade dieses Bündels sind im euklidischen Sinne einander parallel.

Wird ein ebensolches Verhalten für irgend eine zweite, jenem Bündel nicht angehörende Gerade angenommen, so entsteht ein zweites Bündel von gleicher Natur; alle beiden Bündeln angehörigen Ebenen werden dann Euklidisch — wie die Betrachtung der zugehörigen Strahlenbüschel zeigt — und füllen den Raum durch ein Büschel mit uneigentlicher Axe aus; zwei beliebige Ebenen dieses Büschels sind im Euklidischen Sinne einander parallel[1]).

[1]) Mit diesem Satze hängt die Möglichkeit zusammen, eine Reihe elementarer Konstruktionen in der Euklidischen Ebene durch das Lineal

Wird nun das gleiche Verhalten noch für eine dritte, jenem Büschel nicht angehörende, Gerade vorausgesetzt, so wird dadurch der ganze Raum zu einem Euklidischen gestaltet[1]). Analytisch läßt sich dies in projektiven Koordinaten so ausdrücken, daß zur Gesamtheit der uneigentlichen Punkte des Raumes eine einzige uneigentliche (doppelt zu zählende) Ebene gehört. Innerhalb jeder Raumform läßt sich durch Benutzung der absoluten projektiven Geometrie eine solche Ebene willkürlich wählen und so eine Euklidische Gestaltung wenigstens formal einführen; aber auch jede andere Gestaltung des Raumes läßt sich formal nach Belieben in den projektiven Raum einbauen, wie auch die eigentliche Natur dieses Raumes gedacht wird.

Es werde nunmehr für eine bestimmte Gerade durch einen bestimmten äußeren Punkt in der dadurch definierten Ebene je eine erste Nichtschneidende nach jeder Seite vorausgesetzt, wobei die beiden Parallelen verschieden gedacht seien; so trifft das gleiche Verhalten gegenüber dieser Geraden in jedem Punkte des Raumes zu, es werden dadurch auf der Geraden und im Raume zwei ideale Grenzpunkte hyperbolischer Natur bestimmt, die Geraden nach jedem dieser Grenzpunkte sind zu je zweien untereinander im hyperbolischen Sinne parallel.

Schließlich kann einmal zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt in der dadurch definierten Ebene überhaupt keine Nichtschneidende als wirklich angenommen werden; dann trifft das gleiche elliptische Verhalten gegenüber

allein auszuführen, sobald ein einziges Parallelogramm in ihr gezeichnet vorliegt: Parallelenziehen, Abtragen von Strecken auf Geraden gleicher Richtung, Halbieren von Strecken u. a. m.; ist die vorgelegte Figur insbesondere ein Quadrat, so wird noch das Fällen und Errichten von Loten, ebenso das Abtragen von Winkeln in gleicher Weise möglich; das Streckenabtragen nach verschiedenen Richtungen ist indes mit dem Lineal allein auch dann nicht allgemein durchführbar, da man so nur im rationalen Bereiche und bei speziellen Kollineationen desselben bleibt (vgl. u.).

[1]) Die ∞^7 Aussagen enthaltende gewöhnliche Fassung des Parallelenpostulats läßt sich also aus drei Aussagen gewinnen.

dieser Geraden für jeden Punkt des Raumes zu, die ganze Gerade muß als in sich geschlossen angesehen werden.

Wird dem Raume die Forderung der Homogenität bezüglich der Parallelen aufgezwungen, so können gemischte Raumformen nicht als zulässig angesehen werden; mathematisch steht jedoch ihre Möglichkeit offen.

Der Raum kann beispielsweise nach zwei verschiedenen Richtungen, und somit nach allen Richtungen eines uneigentlichen Ebenenbüschels, Euklidisch gedacht werden, und nach einer dritten, jenem Büschel nicht angehörenden Richtung und somit nach allen Richtungen dieser Art — hyperbolisch. Das absolute Gebilde dieser Raumform, d. h. die Gesamtheit ihrer Grenzpunkte, wird dann in projektiven Koordinaten durch ein reeles Ebenenpaar definiert.

Der Raum kann etwa auch nach einer einzigen Richtung als Euklidisch, nach allen anderen als hyperbolisch gedacht werden; man braucht nur für das absolute Gebilde in projektiven Koordinaten einen reellen Kegel zu nehmen, dessen Spitze dann den einzigen uneigentlichen Euklidischen Punkt des Raumes darstellt.

Wird als absolutes Gebilde ein Paar konjugiert komplexer Ebenen angenommen, so entspricht dies derjenigen Raumform, in welcher alle Richtungen eines Ebenenbüschels, durch Festsetzung Euklidischen Verhaltens nach zwei Richtungen desselben, Euklidisch ausfallen, während nach einer jenem Büschel nicht angehörenden dritten Richtung, und somit nach allen Richtungen dieser Art, elliptisches Verhalten postuliert wird. Die Axe des Euklidischen Büschels ist dann die Schnittlinie der beiden absoluten Ebenen.

In ähnlicher Weise entsteht der nur in einer einzigen Richtung Euklidische, nach allen anderen Richtungen elliptische Raum durch die Festsetzung eines imaginären Kegels mit reeller Spitze für das absolute Gebilde; die Spitze repräsentiert dann wieder den einzigen Euklidisch uneigentlichen Punkt.

Dagegen können im gleichen Raum nicht zugleich hyperbolische und elliptische Gerade vorkommen, solange man an

allen aufgestellten Axiomen festhält (bei richtiger Auffassung gilt dieser Satz übrigens in allen regulären Geometrien).

Es gibt so in bezug auf das Parallelenproblem drei homogene und vier inhomogene Formen des Raumes; ebenso drei homogene und zwei inhomogene Formen der Ebene, wobei in letzteren das absolute Gebilde bzw. durch ein reelles oder imaginäres Geradenpaar dargestellt ist.

Es gibt aber vom Standpunkte der absoluten projektiven Geometrie nur einen einzigen projektiven Raum, in dem durch Abgrenzung des Realen mit Hilfe projektiver Koordinaten und absoluter Gebilde in denselben jene verschiedenen (wie alle überhaupt möglichen) Formen des Raumes verwirklicht gedacht werden können.

4. Metrik der Geraden.

Auf Grund projektiver Koordinatenbestimmung und Hinzunahme aller Idealpunkte lassen sich alle Formen des Raumes in gleicher Weise behandeln. Jede Art der Metrik läßt sich nun mit Hilfe der zunächst rationalen projektiven Koordinaten auf dem Wege reiner Definition, ohne jede Benutzung von Bewegungsbegriffen oder — was auf das Gleiche hinauskäme — von besonderen Kongruenzaxiomen, vollständig durchführen. Es braucht daher die Metrik durchaus nicht derjenigen Form des Raumes zu entsprechen, die man gerade als die gegebene annimmt: vielmehr läßt sich beispielsweise in jeder beliebigen Raumform Euklidische Metrik durch Definitionen festlegen. Es wird jedoch zweckmäßig erscheinen, die Metrik jedesmal der gegebenen Raumform direkt anzupassen, und so die projektiv ausgezeichneten Elemente auch als metrisch ausgezeichnet zu erhalten.

Die Existenz einer einzigen Euklidischen Parallelen zu einer gegebenen Geraden liefert auf derselben einen projektiv eindeutig bestimmten uneigentlichen Punkt, den wir mit ∞ bezeichnen, und so zu einem beliebig gewählten eigentlichen Punktepaar, das wir -1, $+1$ nennen wollen, ihre parabolische

Mitte 0; umgekehrt vertreten dann die drei Punkte mit den projektiven Koordinaten -1, 0, $+1$ nicht nur in projektiver, sondern auch in metrischer Hinsicht die Angabe der Parallelen, da letztere in jedem Punkte aus ihnen wiedergewonnen werden kann. Nun besitzen drei beliebige Punkte der Geraden in Verbindung mit dem festen uneigentlichen Punkte ∞ eine gegenüber projektiven Transformationen des Raumes ausgezeichnete absolute Invariante — ihr Doppelverhältnis; und zwei Punkte allein bestimmen bis auf eine multiplikative Konstante gleichfalls eine einzige Invariante — ihre Entfernung, sobald man als mathematisches Kennzeichen der letzteren ihr additives Verhalten festsetzt. Die gesamte parabolische Metrik der Geraden ist so bestimmt. Die Formel der Entfernung vom Nullpunkt ist in diesem Falle

$$r = cx \left(= cm \cdot \frac{x}{m}\right).$$

Die projektiven Transformationen der Geraden in sich, welche bei gleicher Definition die Entfernungen unverändert lassen, sind gegeben durch

$$x' = x + a;$$

sie lassen formal den uneigentlichen Punkt der Geraden fest.

Es sei nun für eine gegebene Gerade in einem einzigen äußeren Punkte hyperbolisches Verhalten angenommen, so werden dadurch auf dieser Geraden zwei projektiv bestimmte uneigentliche Grenzpunkte festgelegt. Nunmehr bestimmen schon zwei beliebige Punkte der Geraden eine absolute Invariante — das Doppelverhältnis zu den festen uneigentlichen Grenzpunkten. Den Grenzen oder (nach Hilbertscher Bezeichnung) Enden der Geraden legen wir die festen projektiven Koordinaten $-m$, $+m$ bei und wählen einen willkürlichen Punkt der Geraden als 0; so ist die hyperbolische Metrik der Geraden notwendig definiert durch die Formel:

$$r = \frac{cm}{2} \log \frac{m + x}{m - x}.$$

Die Entfernungen bleiben unter gleicher Definition unverändert bei den projektiven Transformationen von der Form

$$x' = \frac{x + a}{1 + \frac{ax}{m^2}};$$

die Enden bleiben dadurch ebenfalls fest. Auch in diesem Falle genügt die Angabe der drei Punkte -1, 0, $+1$, wenn daneben die projektive Konstante m und die metrische c vorgeschrieben werden.

Zuletzt sei für eine Gerade elliptisches Verhalten angenommen. Die Metrik dieses Falles wird am einfachsten im dual entsprechenden Strahlenbüschel untersucht, wobei an Stelle von Punkten Strahlen einrücken, an Stelle von Entfernungen — Winkel. Hierbei ist zunächst kein Anhalt für die Auffindung der Punkte -1, 0, $+1$, d. h. einer halbierten Strecke bzw. eines halbierten Winkels gegeben; man kann sie willkürlich wählen und aus ihnen die weiteren Grössen auf projektiver Grundlage definieren. Für jeden weiteren Punkt ist dann nämlich wieder das Doppelverhältnis zu den drei gegebenen als einzige wesentliche Invariante gegeben, worauf sich die Definition der Entfernung treffen läßt. Die entsprechende Formel ist dann:

$$r = cm \cdot \operatorname{ar\,tg} \frac{x}{m},$$

wobei m und c wieder Konstanten sind. Die Punkte $x = \pm m$ stellen mit dem Punkte 0 und dem dadurch bestimmten Punkte ∞ eine Vierteilung der elliptischen Geraden dar. Die elliptischen Entfernungen bleiben unter gleicher Definition unverändert bei den Transformationen von der Gestalt

$$x' = \frac{x + a}{1 - \frac{ax}{m^2}}.$$

Es ist beispielsweise zunächst kein Anhalt für die Konstruktion eines rechten Winkels gegeben; wird aber ein solcher

direkt hingelegt und halbiert, so braucht man nur die Schenkel des rechten Winkels als -1 und $+1$ zu betrachten, den halbierenden Strahl als 0: der Winkel eines Strahles von der projektiven Koordinate τ gegen die Nullrichtung ist dann gegeben durch

$$\varphi = \operatorname{ar\,tg}\, \tau.$$

In allen Fällen genügt die Festlegung einer halbierten Strecke $(-1,\ 0,\ +1)$ auf der Geraden neben der Angabe der Konstanten m und c zur Erledigung der entsprechenden Metrik, die dann durch Betrachtungen im Endlichen allein gewonnen wird.

Durch die gegebenen Definitionen ist sowohl der Begriff der Kongruenz, wie der der Bewegung, für jedes projektive Grundgebilde erster Stufe erklärt.

5. Homogene Metrik der drei Grundformen der Ebene.

Für den Aufbau der gesamten Metrik wählen wir einen Weg, der 1. jedes neue Axiom vermeidet, indem er sich zunächst auf den eigentlichen (endlichen), reellen, rationalen, projektiven Raum bezieht, 2. den Begriff der freien Beweglichkeit des Raumes *nicht* heranzieht. Was letzteren anbetrifft, so enthält er eine höchst komplizierte Aussage in sich, deren Zulässigkeit erst aus der Theorie der quadratischen Formen einleuchtet, die so ohne Weiteres in die Geometrie hineininterpretiert wird; zudem erlaubt die Stellung der Geometrie innerhalb der Gesamtheit aller Wissenschaften nicht, daß ihr der Begriff der Bewegung in irgend einer Form zugrundegelegt werde: vielmehr hat umgekehrt die Bewegung erst aus rein geometrischen Begriffen erklärt zu werden.

Zum Prinzip, nach dem die sonst ganz willkürlich gestaltbare Durchführung der Metrik vor sich gehen soll, nehmen wir das der Homogenität; worunter nur verstanden werden mag, daß bei jeder elementaren metrischen Begriffsbildung unter allen zulässigen Definitionen einzig diejenige gewählt werden solle, bei der sich der eigentliche Raum in jeder Weise

gleichartig verhält — es zeigt sich, daß diese Forderung in jedem Falle in strenge mathematische Form gekleidet werden kann. Wir unterwerfen dadurch die gesamte Metrik dem Satz vom Grunde, worin die tiefere Bedeutung der getroffenen Festsetzung liegt. Daraufhin ist die Metrik im wesentlichen eindeutig bestimmt; jede anders geartete Metrik kann durch Änderung der Definitionen gebildet werden: sie ist dann aber entweder nicht an sich schon eindeutig (d. h. die Winkel sind nicht durch das gleiche absolute Gebilde definiert, wie die Strecken), oder nicht stetig, oder nicht analytisch[1]).

Die Allgemeingültigkeit der Kongruenz- und Bewegungsbegriffe wird so aus den notwendigsten Elementen gewonnen: die methodischen Verhältnisse liegen hier ganz analog wie beim Parallelenproblem, für welches ebenfalls die allgemeinen Aussagen aus wenigen Grundannahmen folgen.

Die freie Beweglichkeit des Raumes wird dann zu einem beweisbaren Satze, der bei richtiger Interpretation in allen regulären Geometrien gilt: auch in denjenigen, die bei der üblichen Auffassung unnötigerweise ausgeschlossen werden und so zum größten Teile, wie es scheint, nicht einmal bekannt sind.

Wir beschränken uns zunächst auf die drei fundamentalen, inbezug auf das Parallelenproblem homogenen Formen der Ebene.

Es sei durch zwei sich schneidende Gerade ein einziges Mal in der betreffenden Ebene ein rechter Winkel (d. h. die halbe Periode im elliptisch gemessenen Strahlenbüschel) als solcher festgesetzt und allen weiteren Definitionen zugrundegelegt; nach beiden Seiten von ihrem Schnittpunkte 0 lege man auf jeder der beiden Geraden, in Übereinstimmung mit der getroffenen Annahme, die Punkte -1, $+1$ hin — so ist wieder ein einziges Mal die Gleichheit zweier Strecken verschiedener Richtungen als solche in der Ebene definiert; in der Nicht-Euklidischen Geometrie wird dabei zum ersten Male

[1]) Es kann daher auch an Stelle der Homogenität die analytische Eindeutigkeit der fundamentalen Definitionen und ihres Zusammenhangs (abgesehen von Perioden) als maßgebend der Metrik zugrundegelegt werden.

vom Prinzip der Homogenität Gebrauch gemacht, indem den Enden der hyperbolischen bzw. den Viertelungspunkten der elliptischen Geometrie auf beiden Axen die gleichen Koordinaten $\pm m$ zugewiesen werden.

Auf Grund einer solchen metrischen Basis der Ebene — rechtwinkeliges Axenkreuz vom Arme 1 — lassen sich alle übrigen Strecken und Winkel dieser Ebene projektiv (d. h. eigentlich durch Ziehen von Geraden allein) definieren[1]).

Die Punkte -1, 0, $+1$ bestimmen auf jeder Axe eine eindeutige projektive Anordnung aller rationalen Punkte, die wir zunächst allein betrachten wollen (wenn auch beliebige Erweiterungen später vorgenommen werden können). Nun lassen sich die beiden Böschel von Geraden

$$x = \text{const} = a, \quad y = \text{const} = b$$

ohne Mühe konstruieren; man braucht nur beispielsweise durch Verbindung je zweier Punkte $(a + b;\ 0)$ $(0;\ a + b)$ bzw. $(a - b;\ 0)$ $(0;\ b - a)$ die beiden Büschel $x + y = a + b$, $x - y = a - b$ herzustellen. Auf diese Weise erscheint die ganze Ebene durch ein Netz von speziellen projektiven Koordinaten — wir wollen sie kanonische Koordinaten nennen — eindeutig bedeckt, auf das sich alle weiteren Definitionen übertragen lassen.

Durch die zwei Geraden $x = 0$, $y = 0$ war der rechte Winkel einmal festgelegt worden; durch die dritte Gerade $x - y = 0$ und jede von jenen beiden mag am Nullpunkte der halbe rechte Winkel auf jeder Seite dieser Geraden definiert werden; eine andere Definition würde die metrische Homogenität der Ebene zerstören, die Winkel würden ohne jeden Grund nach der einen Seite größer ausfallen als nach der anderen, und dies wäre auf zweierlei Weise möglich. Die drei Strahlen $x = 0$, $x - y = 0$, $y = 0$ bestimmen nunmehr im Strahlenbüschel um den Nullpunkt in eindeutiger Weise eine

[1]) Im Falle der Euklidischen Ebene genügt daher ein vorgelegtes Quadrat zur Erledigung aller projektiven und metrischen Verhältnisse.

projektive Anordnung der Elemente und somit auch die elliptische Metrik derselben. Für die Neigung eines Strahls $y = cx$ gegen die X-Axe erhält man dann $\operatorname{tg}\tau = c$ oder auch $\operatorname{tg}\tau = \frac{y}{x}$.

Es gibt nun Kollineationen der Ebene, durch welche das erledigte Strahlenbüschel bei gleichen Definitionen mit unveränderten Größen der Winkel in sich selbst transformiert wird; sie sind gegeben durch die Gleichungen:

$$x' = \delta'(x\cos\delta - y\sin\delta), \quad y' = \delta'(x\sin\delta + y\cos\delta);$$

wir nennen darin δ den Drehwinkel, δ' den Streckungsfaktor. Die Umkehrung dieser Kollineationen

$$x = \frac{1}{\delta'}(x'\cos\delta + y'\sin\delta), \quad y = \frac{1}{\delta'}(-x'\sin\delta + y'\cos\delta)$$

kehrt das Vorzeichen des Drehwinkels und den Wert des Streckungsfaktors um; es sind daher diejenigen derartigen Kollineationen besonders ausgezeichnet, für welche der Streckungsfaktor gleich ± 1 ist. Den Fall $+1$ nennen wir einfach Drehung um den Winkel δ; der Fall -1 entspricht dann der Drehung um $\pi + \delta$, ist also in dem vorigen enthalten.

Die verlangte Homogenität unserer Metrik läßt nur die einfachen Drehungen zur Definition der Entfernungen in den Strahlen des Büschels als erlaubt heranziehen, sonst würde die Metrik in dem einen Drehsinn der Ebene anders ausfallen als im anderen.

Die Drehung der Ebene um ihren Nullpunkt ist also bei der getroffenen Wahl der Koordinaten in allen homogenen Geometrien notwendig durch die kanonischen Formeln gegeben:

$$x' = x\cos\delta - y\sin\delta, \quad y' = x\sin\delta + y\cos\delta;$$

hier ist zunächst $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta}$ durchaus als rational vorauszusetzen, worin auch die Unmöglichkeit der allgemeinen Streckenübertragung im Strahlenbüschel mit dem Lineal allein begründet ist.

Die Gleichung des Kreises um den Nullpunkt ist dann auch immer durch

$$x^2 + y^2 = l^2 = \text{const}$$

dargestellt; dadurch wird die Entfernung vom Nullpunkte zunächst für alle rationalen Werte von l erklärt; die Ausdehnung auf alle rationalen Punkte der Ebene überhaupt ist aber, wenn man will, ohne weiteres möglich, die gleiche Formel definiert dann alle zugehörigen Entfernungen.

Wir wollen nun dem Prinzip der Homogenität gemäß alle Geraden $y = \text{const}$ als auf der X-Axe senkrecht stehend definieren; in gleicher Weise sollen alle Geraden $x = \text{const}$ auf der Y-Axe senkrecht. Nun betrachten wir diejenigen Kollineationen, welche die X-Axe und ihre Entfernungen unverändert lassen, während sie gleichzeitig das System ihrer definierten Lote in sich überführen. Sie sind gegeben durch die entsprechenden Formeln:

1. für die parabolische Ebene

$$x' = x + a, \quad y' = a' y;$$

2. für die hyperbolische

$$x' = \frac{x + a}{1 + \frac{a x}{m^2}}, \quad y' = a' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \cdot y}{1 + \frac{a x}{m^2}};$$

3. für die elliptische

$$x' = \frac{x + a}{1 - \frac{a x}{m^2}}, \quad y' = a' \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2}} \cdot y}{1 - \frac{a x}{m^2}}.$$

Wir nennen hier a den Verschiebungsparameter, a' den Dehnungsfaktor. Die Umkehrungen dieser Kollineationen sind:

1. für die parabolische Ebene

$$x = x' - a, \quad y = \frac{1}{a'} \cdot y';$$

2. für die hyperbolische

$$x = \frac{x' - a}{1 - \frac{a x'}{m^2}}, \quad y = \frac{1}{a'} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \cdot y'}{1 - \frac{a x'}{m^2}};$$

3. für die elliptische

$$x = \frac{x' - a}{1 + \frac{a x'}{m^2}}, \quad y = \frac{1}{a'} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2}} \cdot y'}{1 + \frac{a x'}{m^2}};$$

sie kehren jedesmal das Vorzeichen der Verschiebung und den Wert des Dehnungsfaktors um. Es sind daher diejenigen unter den betrachteten Kollineationen besonders ausgezeichnet, für welche der Dehnungsfaktor gleich ± 1 ist; den Fall $+1$ nennen wir einfach Verschiebung der Ebene längs der X-Axe um den Parameter a, den Fall -1 leiten wir aus jenem durch Spiegelung ab.

Die verlangte Homogenität unserer Metrik läßt nur die einfachen Verschiebungen, wobei die Quadratwurzeln zunächst als rational vorauszusetzen sind, zur Definition der Entfernungen und Winkel in allen Punkten der X-Axe als erlaubt heranziehen; sonst würde sich die Ebene in der einen Richtung der X-Axe anders verhalten, als in der anderen; die Entfernungen würden z. B. ohne jeden Grund nach der einen Seite größer, nach der anderen — kleiner ausfallen, und dies wäre wieder auf zwei Weisen möglich.

Ebenso definiert man die Verschiebung längs der Y-Axe durch analoge Formeln, in denen x mit y vertauscht und β für a gesetzt wird.

Nunmehr sind die Entfernungen auf allen betrachteten Loten zur einen, wie zur anderen Axe erklärt; die Ausdehnung auf alle rational definierten Lote überhaupt ist ebenfalls ohne weiteres möglich.

Durch die Kombination einer Verschiebung längs der einen Axe mit einer zweiten, längs der anderen, ist die Möglichkeit gegeben, jeden Punkt der Ebene als Nullpunkt zu wählen. Wir definieren nun — diese Definition ist nach unseren Festsetzungen wieder die einzig mögliche — die Strecken und Winkel in jedem Punkte durch die ihnen nach diesen Verschiebungen entsprechenden Strecken und Winkel am ur-

sprünglichen Nullpunkte. Dadurch ist dann die Metrik der ganzen rationalen Ebene erschöpft.

Alle Kongruenzen der Ebene sind so auf projektiver Grundlage erklärt, ebenso die Bewegungen der Ebene in sich: letztere lassen sich aus der Kombination der drei gegebenen fundamentalen Kollineationen definieren, sie ändern also weder die Entfernungen noch die Winkel. Alle metrischen Eigenschaften der Ebene werden zu beweisbaren Sätzen. Bei der gegebenen Darstellung sind die ebenen Bewegungen zunächst besondere rein projektive Transformationen, nicht etwa wirkliche mechanische Vorgänge; letztere werden so vielmehr erst als mathematisch möglich erwiesen und durch die ersten erklärt.

Da nun alle drei fundamentalen Transformationen in der Euklidischen Ebene eine elliptische uneigentliche Doppelgerade unverändert lassen, in den Nicht-Euklidischen Geometrien die entsprechende quadratische Beziehung

$$x^2 + y^2 - m^2 < 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + m^2 > 0$$

in sich selbst überführen, so läßt sich rein formal der gegebene Gedankengang dahin definieren, daß das entsprechende absolute Gebilde bei allen gegebenen Definitionen unverändert bleibt und umgekehrt ihnen zugrundegelegt werden kann; die spezielle orthogonale und normierte Form der Gleichung ist bedingt durch die spezielle Wahl der projektiven Koordinaten, die in allen Fällen aus zwei aufeinander senkrechten Axen und der Gesamtheit ihrer Lote gebildet sind. In der Euklidischen Geometrie ist diese spezielle Wahl mit der gewöhnlichen Cartesischen identisch, in den fertigen Nicht-Euklidischen Geometrien sind solche Koordinaten unter Anwendung aller Hilbertschen Kongruenzaxiome gegentlich von M. Dehn (Math. Annalen Bd. 53) benutzt worden.

In der hier gegebenen Darstellung sind diese Koordinaten nach je einmaliger Festlegung des rechten Winkels und der Streckenkongruenz auf seinen beiden Schenkeln, nach ihren beiden Richtungen, in rein projektiver Weise erschlossen; durch jene Festlegung sind die notwendigen und hinreichenden Ele-

mente für den Aufbau der gesamten Metrik der Ebene, sei's im Euklidischen, sei's im Nicht-Euklidischen Sinne gegeben. Es sei noch besonders bemerkt, daß der Übergang von der einen so gewählten metrischen Basis der Ebene zu irgend einer beliebigen ebensolchen anderen der allgemeinsten Kollineation dieser Ebene entspricht.

Es entsteht nun die Frage, was eine nichthomogene Metrik auch im regulärsten Falle nach sich zieht. Dies mag an dem Beispiel der Drehung illustriert werden. Man kann dort zunächst den Streckungsfaktor δ' als geeignete Funktion von δ definieren, nur wird $f(0) = 1$, $f(n\,\delta) = f(\delta)^n$ sein müssen; bei Beschränkung auf rationale Punkte führt dies auf eine unstetige Metrik; es entsteht eine Geometrie, auf die Hilbert (p. 150) gelegentlich hingewiesen hat; die Ebene verhält sich hier in ihren beiden Drehsinnen verschieden. Bei der üblichen Ausdehnung auf irrationale Elemente erhält man in $f(\delta) = C^\delta$ eine stetige Definition, die an Stelle der Kreise logarithmische Spiralen setzt (Helmholtz); die Metrik ist dann nicht mehr eindeutig. Zuletzt kann man noch Nicht-Archimedische Koordinaten zulassen (vgl. u.) und die Ebene im Endlichen homogen, im Aktual-unendlichkleinen nichthomogen gestalten (Hilbert, p. 14, nennt eine solche Geometrie Nicht-Pythagoräisch); dann ist die Metrik nicht mehr analytisch.

6. Allgemeine homogene Metrik der projektiven Ebene.

Nach dem gleichen synthetischen Verfahren, durch das vorhin die Metrik der drei Grundformen der Ebene durchgeführt wurde, läßt sich auch die Metrik in allen übrigen regulären Geometrien behandeln. In jedem Falle wird man dann formal auf ein quadratisches absolutes Gebilde geführt, das umgekehrt der gleichen Metrik zugrundegelegt werden kann. Wir ziehen es daher vor, die allgemeine Metrik der projektiven Ebene von vornherein auf ein solches Grundgebilde zu beziehen, wobei aber keine Möglichkeit ausgeschlossen werden soll.

Aus der Parallelentheorie ist uns zunächst eine parabolisch-

elliptische Ebene bekannt, deren absolutes Gebilde aus zwei konjugiert komplexen Geraden durch einen reellen Punkt besteht; offenbar ist dieser Fall dual zur Euklidischen Ebene, wo umgekehrt eine reelle Gerade mit zwei konjugiert komplexen Kreispunkten der Metrik zugrundegelegt werden kann. Man braucht daher nur die Sätze der klassischen ebenen Geometrie in die duale Sprache zu übersetzen, um die Verhältnisse in der betrachteten dualeuklidischen Ebene zu erhalten[1]): so ist hier z. B. die Summe der Seiten in jedem Dreieck konstant. Wie nun in der Euklidischen Ebene die reellen Punkte der uneigentlichen Geraden als unzugänglich betrachtet werden müssen und so keine Verschiebung eines eigentlichen Punktes dorthin möglich ist, so ist entsprechend keine Drehung eines elliptischen Strahls der dualen Ebene nach den ausgezeichneten Strahlen (des einzigen parabolischen Büschels) möglich; die richtige Auffassung ist hier daher die, daß diese besonderen Strahlen (Niveaulinien) als uneigentlich zu betrachten sind — die Redewendung von 180^0 wird also in dieser Geometrie ganz unsinnig, da für die Winkel nicht elliptische, sondern parabolische Metrik gilt. Es ist klar, daß bei solcher Auffassung die betrachtete Ebene ∞^3 Bewegungen in sich zuläßt. Es besteht in dieser Geometrie der Satz, daß alle Wege zwischen zwei Niveaulinien gleiche Länge haben.

Ganz analog liegen die Verhältnisse in der parabolisch-hyperbolischen Ebene, wo das absolute Gebilde durch zwei reelle Gerade gegeben ist, deren Schnittpunkt dem als ideal zu betrachtenden einzigen parabolischen Büschel der Ebene entspricht. Auch hier ist die Winkelmessung parabolisch, und es gilt wieder der Satz von den Niveaulinien; es gibt wieder ∞^3 Bewegungen, die nur natürlich keinen eigentlichen Strahl in einen uneigentlichen überführen können.

Es existiert nun selbstverständlich eine Ebene, die zur zuletzt betrachteten dual ist und deren absolutes Gebilde aus

[1]) In ganz anderem Zusammenhange findet sich eine spezielle ähnliche Übertragung auf den Raum in der Dissertation von Herrn Böhm: „Parabolische Metrik im hyperbolischen Raum", München 1908.

einer ausgezeichneten Geraden mit zwei reellen Grundpunkten besteht, eine gewissermaßen pseudoeuklidische Ebene; von der Euklidischen unterscheidet sie sich dadurch, daß die Winkelmessung in ihr hyperbolisch ist. In jedem eigentlichen Punkte gibt es hier zwei ausgezeichnete Richtungen und nur die im eigentlichen Sinne zwischen ihnen liegenden Richtungen sind als real zu bezeichnen; um den Nullpunkt gilt für die Winkel bei passender Wahl der Axen die Gleichung $\operatorname{tg} \operatorname{h} \delta = \frac{y}{x}$.

Es läßt sich auch parabolische Winkelmessung in der Euklidischen Ebene durchführen: man braucht nur eine einzige Richtung, etwa die der Y-Axe, als uneigentlich aufzufassen. Um den Nullpunkt gilt dann für die Winkel die Gleichung $\delta = \frac{y}{x}$; auch hier gilt der Satz von den Niveaulinien; die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Winkel. Das absolute Gebilde besteht hier aus der uneigentlichen Doppelgeraden mit einem einzigen ausgezeichneten Doppelpunkt.

Es läßt sich nun auch eine duale Geometrie zur hyperbolischen herstellen, wenn man die absolute projektive Axiomatik gelten läßt, wobei z. B. der Zusammenhang der Halbebenen untereinander anders ausfällt, als in allen bisherigen Formen. Man braucht sich nur im Äußeren einer Hyperbel $(x^2 - y^2 - m^2 < 0)$ zu bewegen, und nur die nichtschneidenden Geraden für real zu halten. Im gleichen Gebiet existiert daneben eine zweite Geometrie, wenn nur die schneidenden Geraden als real gelten: hierbei werden sowohl die Winkel, wie die Längen hyperbolisch.

Die beiden letztgenannten Geometrien ergeben, in eine einzige vereinigt, eine besondere Geometrie, deren Existenz längst bekannt ist: aber gerade die von uns vorgenommene Trennung stellt ihren eigentlichen Sinn und ihre volle Bewegungsfreiheit wieder her. Es sind in ihnen übrigens beliebig viele parabolische Gerade verschiedener Richtungen — die Tangenten des absoluten Gebildes — vorhanden, die wegen der Ungültigkeit der üblichen Anordnungs- und Zusammenhangssätze die Ebene trotzdem nicht zu einer Euklidischen gestalten.

Auf solchen ausgezeichneten parabolischen Geraden sind alle Längen gleich Null zu setzen; ebenso wie in einem dualen Falle die Winkel der Strahlen gleicher Richtung in der Euklidischen Geometrie als Null betrachtet werden. Es läßt sich dann aber immer auch eine besondere parabolische Metrik mit unveränderlicher aktual-unendlichkleiner Einheit für solche ausgezeichneten Gebilde durchführen, die bei allen ∞^3 Bewegungen bestehen bleibt. Entsprechend ist auf der uneigentlichen Geraden bzw. im uneigentlichen Büschel, wo sie einzig sind, eine Metrik mit aktual-unendlichgroßer Einheit möglich. Diese uneigentliche Metrik kann sogar als hinreichende Grundlage der eigentlichen benutzt werden.

Wir stellen hier die neun möglichen regulären ebenen Geometrien, die durch eine homogene Metrik ihrer Winkel und Längen charakterisiert sind, in einer besonderen Tafel zusammen. Eine sie alle umfassende Dreiecksformel gibt der allgemeinste Kosinussatz:

$$\cos\frac{a}{M} = \cos\frac{b}{M}\cos\frac{c}{M} + \sin\frac{b}{M}\sin\frac{c}{M}\cos\frac{a}{\mathsf{M}},$$

wo die Konstanten M, M je nach elliptischer, parabolischer, oder hyperbolischer Metrik der Längen und Winkel bzw. reell, unendlich, oder rein imaginär zu nehmen sind.

a) Winkel elliptisch.
   1. Längen elliptisch (Elliptische Ebene):
      im reellen Inneren eines imaginären Kreises;
   2. Längen parabolisch (Euklidische Ebene):
      durch Ausschluß einer elliptischen Geraden mit zwei konjugiert komplexen Kreispunkten;
   3. Längen hyperbolisch (Hyperbolische Ebene):
      im Inneren eines Kreises oder einer Hyperbel.

b) Winkel *parabolisch*.
   1. Längen elliptisch (Dualeuklidische Ebene):
      im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Geraden;

2. Längen parabolisch (Absolutparabolische Ebene): durch Ausschluß einer parabolischen Geraden;
3. Längen hyperbolisch (Dual-pseudoeuklidische Ebene): im Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei reellen Geraden.

c) Winkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch (Dualhyperbolische Ebene): im Äußeren eines Kreises oder einer Hyperbel, wenn nur die nichtschneidenden Geraden für real gelten;
2. Längen parabolisch (Pseudoeuklidische Ebene): durch Ausschluß einer hyperbolischen Geraden;
3. Längen hyperbolisch (Absoluthyperbolische Ebene): im Äußeren eines Kreises oder einer Hyperbel, wenn nur die schneidenden Geraden für real gelten.

7. Metrik des Raumes.

Wir lassen vorweg nur die drei homogenen Geometrien gelten, in denen alle Richtungen als zugänglich betrachtet werden und so für die Winkel im Strahlen- und Ebenenbüschel elliptische Metrik vorgeschrieben ist. Durch drei in einem Punkte zusammentreffende, nicht einer Ebene angehörende Gerade möge dreimal der rechte Winkel dargestellt und festgelegt werden; im Anschluß an die gewählte Annahme über die Natur des Raumes legen wir auf jeder Axe nach beiden Richtungen vom Nullpunkte die projektiven Koordinaten -1, $+1$ hin, so dreimal kongruente Strecken im Raume definierend. Die so gewonnene metrische Basis erlaubt auf rein projektiver Grundlage die gesamte homogene Metrik des Raumes synthetisch zu erledigen; man hat nur den für die Ebene gewählten Weg zu verallgemeinern. Zunächst werden, was nur auf eine Weise geschehen kann, diejenigen Kollineationen des Raumes definiert, die man als Drehungen um die Axen bezeichnen kann und die in allen homogenen Geometrien bei der gegebenen speziellen Wahl der (kanonischen) projektiven Koordinaten durch die gleichen Formeln der Cartesischen analytischen Geo-

metrie dargestellt werden — hierin ist übrigens der Grund dafür zu suchen, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie in allen drei Grundformen des Raumes die gleichen sind. So überträgt man den Längen- und Winkelbegriff von den Axen auf alle Richtungen durch den Nullpunkt. Dann definiert man, was wieder nur auf eine Art möglich ist, diejenigen Kollineationen, die man als Verschiebungen längs der Axen bezeichnen kann, und überträgt so die Begriffe von Länge und Winkel auf alle Punkte und Richtungen des Raumes. Man überzeugt sich, daß die fraglichen Transformationen in der parabolischen Geometrie die Gleichung einer uneigentlichen Ebene, in den Nicht-Euklidischen Geometrien die Gleichung einer Idealfläche zweiten Gerades $x^2 + y^2 + z^2 \pm m^2 = 0$ in sich überführen; diese kann umgekehrt nach Cayleys Vorgang zum Ausgangspunkt der Definitionen genommen werden. Der ganze Raum läßt sich also in seinen drei Grundformen von einer gegebenen metrischen Basis — in der Form eines rechtwinkligen Dreiaxenkantes vom Arme 1 — aus durch rein projektive Definitionen metrisch erschöpfen, sei's im Euklidischen, sei's im Nicht-Euklidischen Sinne.[1]) Der Übergang von einer bestimmten solchen Basis zu irgendeiner beliebigen anderen ist durch die allgemeinste Kollineation gegeben.

Es erübrigt sich noch, die sonstigen regulären Formen des dreidimensionalen projektiven Raumes anzugeben.

Für jedes der drei Grundgebilde erster Stufe ist jede der drei Arten der Metrik möglich. Es existieren daher insgesamt 27 homogene Geometrien des Raumes; sie lassen sämtlich ∞^6 Bewegungen zu, man darf nur nie das Verlangen stellen, daß dabei eigentliche Elemente in uneigentliche übergeführt werden, oder umgekehrt. Durch diese Geometrien wird der duale Charakter der Geometrie auch in metrischer Hinsicht voll-

[1]) Im Euklidischen Raume genügt daher ein vorgelegter Würfel zur Erledigung aller projektiven und metrischen Verhältnisse durch Ziehen von geraden Linien allein.

ständig. Nur in den angeführten Geometrien ist die Metrik an sich schon analytisch eindeutig; in jeder anderen ist eine solche Eindeutigkeit erst durch besondere Festsetzung zu erreichen, wodurch nicht mehr alle Bewegungen möglich bleiben.

Der Sinn z. B. einer von Hilbert (p. 30) aufgestellten Geometrie ist der, daß in der uneigentlichen Ebene zwei verschiedene imaginäre Ellipsen gleichzeitig vorgelegt werden: dadurch werden zwei verschiedene reguläre Geometrien im gleichen Euklidischen Raume vereinigt, von denen jede an sich schon analytisch eindeutig ist; nun werden aus der einen Geometrie die Längen, aus der anderen — die Winkel herübergenommen — die Kongruenzsätze gelten dann natürlich nicht mehr, auch bleiben so nur ∞^3 Bewegungen übrig. Eine andere Geometrie von Hilbert (p. 128) legt im Euklidischen Raume ein Tetraëder als absolutes Gebilde hin; auf jeder Geraden im Inneren des Tetraëders entstehen dann zwar nur zwei Grenzpunkte, analytisch hat aber jede Gerade tatsächlich vier ausgezeichnete Punkte und die Metrik ist so nicht an sich schon eindeutig; hier sind nur noch ∞^1 Bewegungen möglich.

Wir stellen nunmehr die 27 regulären Geometrien des Raumes in folgender Tafel zusammen.

A) Ebenenwinkel elliptisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch (Elliptische Geometrie):
   im reellen Inneren einer imaginären Kugel;
2. Längen parabolisch (Euklidische Geometrie):
   durch Ausschluß einer elliptisch gedachten Ebene (a_1);
3. Längen hyperbolisch (Hyperbolische Geometrie):
   im Inneren einer Kugel oder eines zweisch. Hyp-ids.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:
   im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller elliptischer Schnittgeraden;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer Euklidisch gedachten Ebene (a_2);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Ebenenpaares durch eine elliptische Gerade.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:
auf jeder Seite am einsch. Hypb-id, wenn nur die nichtschneidenden Geraden für real gelten;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer hyperbolischen Ebene (a_3);
3. Längen hyperbolisch:
im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hypb-ids, wenn nur die schneidenden Geraden für real gelten.

B) Ebenenwinkel parabolisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren eines imaginären Kreis- oder Hyperbelkegels mit reeller Spitze;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer dualeuklidischen Ebene (b_1);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Kreis- oder Hyperbelkegels.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren des Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller parabolischer Schnittgeraden;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer absolutparabolischen Ebene (b_2);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Ebenenpaares mit einer parabolischen Schnittgeraden.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:

im Äußeren eines Kreis- oder Hyperbelkegels, wenn nur die nichtschneidenden Geraden als real gelten;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer dual-pseudoeuklidischen Ebene (b_3);

3. Längen hyperbolisch:
im Äußeren eines Kreis- oder Hyperbelkegels, wenn nur die schneidenden Geraden als real gelten.

C) Ebenenwinkel hyperbolisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch:
im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hypb-ids, wenn nur die nichtschneidenden Ebenen für real gelten;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer dualhyperbolischen Ebene (c_1);

3. Längen hyperbolisch:
auf jeder Seite am einsch. Hypb-id, wenn nur die inneren Ebenenteile für real gelten.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller hyperbolischer Schnittgeraden;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer pseudoeuklidischen Ebene (c_2);

3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Ebenenpaares mit hyperbolischer Schnittgeraden.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:
im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hypb-ids, wenn nur die schneidenden Ebenen und in ihnen die nichtschneidenden Geraden real sind;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer absoluthyperbolischen Ebene (c_3);

3. Längen hyperbolisch:
auf jeder Seite am einsch. Hypb-id, wenn dur die schneidenden Geraden der äußeren Ebenenteile für real gelten.

8. Vollständige und Nicht-Archimedische Geometrie.

Der absolute projektive Raum mit seinen in allen Fällen von einem begrenzten Bereiche aus geometrisch wie analytisch eindeutig bestimmten vollzähligen Punkten, Geraden und Ebenen ist immer sich selbst gleich und immer einzig.

Die Trennung des Realen vom Idealen, des Rationalen vom Irrationalen, des Endlichen vom Unendlichgroßen und Unendlichkleinen läßt dann diesen absoluten Raum der projektiven Geometrie von verschiedenen Gesichtspunkten metrischer Natur aus betrachten.

Der von uns projektiv aufgebaute Raum ist vorläufig wesentlich rational; d. h. es sind in ihm nur diejenigen realen oder idealen Punkte berücksichtigt, die durch projektive Konstruktionen aus dem fundamentalen Dreiaxenkant entstehen[1]). Nichts aber schränkt die mathematische Erweiterung ein. Man kann nun mit Dedekind, G. Cantor, Klein u. A. m. durch ein besonderes Axiom festsetzen, daß nach Einführung der Irrationalen die Gesamtheit aller Punkte der Geraden genau erschöpft sei und erhält dann die übliche vollständige analytische Geometrie als volles Äquivalent des Raumes; man kann aber auch noch das aktuale Unendlich im Großen wie im Kleinen zulassen, und so als letztmögliche reelle arithmetische Erweiterung die Nicht-Archimedische Geometrie erhalten. Indem wir uns beständig nur an diejenigen Punkte halten, die wir uns als wirklich konstruiert denken, und alle Möglichkeiten offen lassen, können wir jedes beson-

[1]) Es läßt sich sogar bei Beschränkung der Koordinaten auf ganze positive Zahlen allein (in begrenzter Anzahl) die gesamte Geometrie, einschließlich der Metrik, in gleicher Weise erledigen; sodaß die Geometrie aus endlich vielen Aussagen über endlich viele Elemente gewonnen werden kann.

dere Axiom in dieser Richtung vermeiden. In dem von uns bisher aufgebauten rationalen Raume ist seine eigene Art von Vollständigkeit von selbst erfüllt; durch die Art der Durchführung der Metrik ist auch das Archimedische Prinzip für die realen Elemente von selbst erfüllt; ebenso kann man für die Kongruenzen durch die gegebenen Definitionen jedes Axiom entbehrlich machen. So ist die gesamte Geometrie rein synthetisch auf Grund der projektiven Axiome allein aufgebaut; eine geringe Abänderung dieser Axiome in absolut projektivem Sinne erschließt sämtliche möglichen homogenen Geometrien des Raumes von beliebig vielen Dimensionen: es gibt offenbar immer einen einzigen absoluten projektiven Raum von n Dimensionen und in ihm 3^n Möglichkeiten eindeutiger Metrik, die jedesmal auf die allgemeinste reelle quadratische Gleichung des absoluten Grundgebildes führen, und je $\infty^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ Bewegungen in sich zulassen.

Wir wollen nun zeigen, wie die Vervollständigung des Raumes durch irrationale und aktuale Punkte auf projektivem Wege möglich ist.

Es sei durch eine Zahl σ ein existent gedachter irrationaler Punkt auf der Geraden $(-1, 0, +1)$ festgelegt, d. h. dem zugehörigen Grenzprozeß entsprechend definiert. Wir konstruieren aus $-1, 0, +1$ zunächst den realen oder idealen Punkt ∞; aus $0, \sigma, \infty$ läßt sich nun bei rationalem x jedes $x\,\sigma$ projektiv konstruieren; aus $-1, +1, \sigma$ hat man sofort $\frac{1}{\sigma}$ und darauf jedes $\frac{x}{\sigma}$; durch weitere projektive Konstruktion an den bereits gewonnenen Punkten läßt sich jeder gebrochenen rationalen Funktion von σ mit rationalen Koeffizienten eindeutig ein Punkt der Geraden zuweisen, da der vierte harmonische Punkt zu (a, b), c gegeben ist durch $\frac{(a+b)c-2ab}{2c-(a+b)}$. Auf diese Weise ist die Irrationalzahl σ dem rationalen Raume adjungiert; und so kann man beliebige weitere Irrationale nach Bedarf und Belieben dem Raume hinzufügen, worauf die Definition des gewöhnlich angenommenen vollständigen reellen

Raumes arithmetisch möglich wird. Es hat aber, wie wir glauben, keinen eigentlichen Sinn, diesen Raum dann durch ein ausdrückliches Axiom als den richtigen Raum schlechtweg anzunehmen, um so mehr, als noch Weiterbildungen möglich sind durch Heranziehung des aktualen Unendlich. Nehmen wir einen Punkt t als Repräsentanten des letzteren auf der Geraden an, so ist hier t durch den Grenzprozeß $1, 2, 3 \ldots N \ldots$ definiert und dennoch vom absoluten ∞ (d. h. dem vierten harmonischen Punkt zu $-1, 0, +1$) verschieden gedacht. Man kann dies mit Hilbert so ausdrücken, daß man t als beliebig groß zu nehmende positive Variable betrachtet. Halten wir uns an diese Auffassung, so ist durch Angabe einer solchen Einheit des aktualen Unendlich die Konstruktion jedes Punktes für eine rationale gebrochene Funktion von t mit rationalen Zahlenkoeffizienten ermöglicht, vor allem auch die Konstruktion des Repräsentanten des aktualen Unendlichkleinen $\frac{1}{t}$, der aus dem Grenzprozeß $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{N} \ldots$ entsteht, und doch von 0 verschieden gedacht wird. Das Gesamtgebiet des aktualen Unendlichgroßen ist auf der Geraden durch die Punkte $|x| > N$ für beliebige ganzzahlige N gegeben; das des aktualen Unendlichkleinen durch $|x| < \frac{1}{N}$; um jeden endlich rationalen Punkt s entsteht ein Gebiet des Aktual-Unendlichkleinen, gegeben durch die Bedingung $|x - s| < \frac{1}{N}$. Es ist nun leicht, diese Nicht-Archimedische Geometrie und ihre Metrik in die fertig gedachte Archimedische in jeder ihrer Gestalten einzubauen; die hinzukommenden rationalen aktual-unendlichkleinen und -großen Zahlen legen sich in die existent gedachten zugehörigen Punkte, die Metrik schließt sich im Endlichen ohne Änderung der Hauptsätze der ursprünglichen Archimedischen unmittelbar an.

Wir betrachten nun die drei homogenen Grundformen des Raumes, und erhalten so in einfacher Weise die Sätze von Dehn (l. c.) wieder. In der elliptischen Geometrie wird wieder

keine Nichtschneidende angenommen, in der Euklidischen — wieder eine einzige nach dem von vornherein projektiv bekannten Punkte des absoluten ∞; die Metrik wird dadurch nicht geändert, die Summe der Winkel im Dreieck bleibt kleiner als zwei Rechte, bzw. ist sie ihnen gleich. Durch die Annahme der Existenz beliebig vieler wirklicher Nichtschneidenden wird jedoch nunmehr eine Trennung möglich. Eine besondere Geometrie dieser Art entsteht zunächst beim Ausschließen des Gesamtgebietes des aktualen Unendlichgroßen durch die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 < N^2$ für beliebiges ganzzahliges N; im Restgebiet hat man einfach die Euklidische Geometrie, bereichert durch die Nicht-Archimedischen Punkte im Endlichen und um 0, vor sich; die Summe der Winkel ist so hier gleich zwei Rechten (Semi-Euklidische Geometrie).

Eine andere Geometrie entsteht durch die Annahme eines endlichen projektiven Gebietes für den realen Raum durch die Bedingung: $x^2 + y^2 + z^2 < m^2$ für ein festes endliches m. Dies ist einfach die hyperbolische Geometrie, durch die Nicht-Archimedischen Punkte im Endlichen und um 0 bereichert; die entsprechende Metrik ist die hyperbolische, die Winkelsumme im Dreieck — kleiner als zwei Rechte.

Eine letzte Möglichkeit verbleibt, indem man nur das Gebiet des aktualen Unendlichkleinen um irgend einen Punkt im Endlichen nimmt: etwa um 0, durch die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{N^2}$ für beliebiges ganzzahliges N.

Dieses Gebiet ist bei allen Arten der Metrik in sich abgeschlossen, keine Streckenabtragung führt aus ihm heraus und jeder Punkt in ihm ist erreichbar; so ist hier bei der Gültigkeit aller gewöhnlichen Kongruenzsätze jede Art der Längenmessung möglich — daher auch eine Geometrie, in welcher trotz des Vorhandenseins beliebig vieler Nichtschneidender die Winkelsumme im Dreieck mehr als zwei Rechte beträgt — (Nicht-Legendresche Geometrie).

Auf noch kompliziertere Nicht-Archimedische Raumbildungen gehen wir hier nicht ein.

9. Geometrie und Erfahrung.

Vom Standpunkt der absoluten projektiven Geometrie gibt es nur eine einzige Form des Raumes, in der dann jede Art der Metrik nach Vereinbarung durchgeführt werden kann. Innerhalb eines angebbaren willkürlich begrenzten Teiles des Raumes (z. B. eines Tetraëders) werden alle Konstruktionen oder, wenn man will, Wahrnehmungen (die sich übrigens nur auf Ziehen bzw. Betrachten von Geraden beschränken), als *möglich und real gesetzt*; die Punkte außerhalb des gewählten Raumbereiches erhalten so von selbst, und mögen sie auch als wirklich gedacht werden, den Charakter der Idealität; jeder solche Punkt kann nur durch Angabe zweier nach ihm gehender Strahlen angedeutet und definiert werden: was genau der Weg ist, auf dem die uneigentlichen Punkte der parabolischen und hyperbolischen Geometrie eingeführt werden. Indem wir nun von vornherein alle Richtungen des dreidimensionalen Raumes um einen realen Punkt als zugänglich betrachten und daher für alle zugehörigen Winkel elliptische Metrik vorschreiben, führen wir den ersten Schritt aus, das mathematisch Zulässige vom erkenntnistheoretisch Notwendigen zu trennen. Der Raum der menschlichen Anschauung läßt wenigstens bei Winkeln keine uneigentlichen Elemente zu: nur diejenigen Geometrien sind daher als wirklich gelten zu lassen, die diesem Umstande zuallererst Rechnung tragen. So ist es auch zu erklären, daß sich die Geometer mit den anderen Arten der Winkelmessung fast nie beschäftigt haben. Beschränkt man sich nun auf die drei fundamentalen Grundformen, was durch die Wahl unserer Axiome, wozu nur noch die Forderung der Homogenität[1]) hinzutritt, ursprünglich geschehen ist, so liegen die Unterschiede der weiteren Behandlung nicht in der Natur des Raumes selbst, sondern in der Art und Weise, welche man dann für die Metrik vereinbart.

Innerhalb des als wirklich erreichbar abgegrenzten Teiles

[1]) Diese ist übrigens allgemein mit der der Gültigkeit aller Kongruenzsätze für die eigentlichen Elemente gleichbedeutend.

des Raumes mag dabei mögliche Übereinstimmung mit der Erfahrung als erwünscht betrachtet werden; auch läßt sie sich immer durch passende Wahl des fundamentalen metrischen Grundelementes erreichen. In der weiteren Ausdehnung des Raumes steht dagegen die Metrik frei, nur bei beliebig weit als tatsächlich erreichbar gesetzter Erweiterung könnten dann Abweichungen merklicher Natur entstehen, deren Prüfung indes durch keine Erfahrung ermöglicht werden kann. Eine Entscheidung durch die Erfahrung ist aber auch vom philosophischen Standpunkte nicht als möglich zu bezeichnen, da wir die räumlichen Verhältnisse erst der reinen inneren Anschauung entnehmen, und das sogenannte „Richtige" bei wirklicher Ausführung in unserem Belieben steht, was sich auch in der Möglichkeit einer willkürlichen Festsetzung der metrischen Basis des Raumes kundgibt.

Der mathematischen Theorie steht die Wahl offen, jede beliebige Art der Metrik durchzuführen. Aus methodologischen Gründen ergibt sich der Aufbau der Euklidischen Geometrie als der weitaus geeignetste: es bedarf bei ihm keiner besonderen Annahme über die projektive Lage des absoluten Gebildes, aus welchem Anlaß in der Nicht-Euklidischen Geometrie endliche Strecken absoluten Charakters auftreten. So ist in letzterer nach Wahl eines Nullpunktes auf einer Geraden die Lage der besonderen Punkte geometrisch eindeutig; die feste Krümmung wird jedesmal durch eine geometrisch eindeutig bestimmte Strecke (als Krümmungsradius) gekennzeichnet; es gehört dann beim gleichseitigen Dreieck eine geometrisch absolut bestimmte Seite dazu, um etwa in der elliptischen Raumform eine Winkelsumme von 270^0 hervorzubringen, in der hyperbolischen — eine solche von 90^0. Mathematisch äußert sich dieses Verhalten der Nicht-Euklidischen Raumformen in der Unmöglichkeit beliebiger ähnlicher Figuren innerhalb eines und desselben Raumes; während in der Euklidischen Geometrie unbeschränkte Ähnlichkeit im Großen und im Kleinen möglich ist. In der Euklidischen Geometrie gestaltet sich der Unterschied zwischen Groß und Klein nur relativ, die gleichen

Verhältnisse sind in beiden möglich; während in der Nicht-Euklidischen im Großen andere Verhältnisse entstehen, als im Kleinen: bei hinreichender Kleinheit ist bekanntlich beliebige Annäherung an parabolische Verhältnisse möglich, was nebenbei ebenfalls zur Folge hat, daß im erreichbaren Endlichen beliebige Übereinstimmung der metrischen Resultate mit der üblichen Erfahrung herbeigeführt werden kann, welche Art der Metrik auch angewandt wird. So ist der Euklidische Raum geometrisch immer sich selbst ähnlich und sich selbst kongruent; während die, verschiedenen Strecken als Krümmungsradien entsprechenden, hyperbolischen bzw. elliptischen Räume untereinander im Euklidischen Sinne ähnlich, aber nicht kongruent sind. So gibt es nur einen einzigen Euklidischen Raum, aber beliebig viele Nicht-Euklidische; und letztere sind erkenntnistheoretisch dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen mit jeder bestimmten Größe (Strecke) absolut bestimmte geometrische Eigenschaften verbunden werden.

Schon Gauß war durch das Auftreten des räumlich Absoluten in der von ihm untersuchten hyperbolischen Geometrie zu der Meinung veranlaßt, dies sei ein Grund, solche Geometrien nicht zuzulassen; jedenfalls hinderte ihn dieser Umstand, seine dahingehenden Untersuchungen zu veröffentlichen (Briefe an Schumacher). Diese Ansicht ist jedoch nicht so zu verstehen, daß im Nicht-Euklidischen Raume eine geometrische Größe auftrete, die im Euklidischen Raume Null sei — die Krümmung; durch eine solche Interpretation wird die Aussage von Gauß eher entkräftet. Vielmehr ist die direkte Existenz einer jeder besonderen Strecke zukommenden absoluten Bedeutung, und dies hat Gauß auch zweifelsohne gemeint, das wesentlichste Charakteristikum der Nicht-Euklidischen Raumformen. So kommt dort z. B. jeder besonderen Strecke ein ganz bestimmter Wert des zugehörigen Winkels in dem aus ihr gebauten gleichseitigen Dreieck zu; ebenso erhält das Verhältnis des zugehörigen Kreisumfanges zu dieser Strecke als Durchmesser einen bestimmten Wert u. s. f.

Die dabei auftretenden Hindernisse sind, freilich, nicht mehr mathematischer Natur, da sie keinen logischen Widerspruch enthalten. Wohl aber darf man mit Gauß die Ansicht teilen, daß ein räumlich Absolutes nicht in die Geometrie hineingehöre, solange nicht anderweitige Anlässe etwa zur Annahme eines solchen Absoluten zwingen: geht doch — wie wir aus den gegebenen Gründen glauben, mit Unrecht — die Annahme vieler Gelehrten dahin, daß solche Anlässe durch den wirklichen Raum auf dem Wege der Erfahrung würden entstehen können.

Der Raum der Geometrie ist aber nicht der der Erfahrung, sondern der der reinen Anschauung. Und für diesen idealen Raum fehlt jeder erkenntnistheoretisch zwingende Grund, eine geometrisch eindeutig bestimmte Strecke als Krümmungsradius und so ein absolutes Maß für die Größe aller räumlichen Dinge als existent anzunehmen; es ist vielmehr nicht erlaubt, dem Raume ein solches aufzudrängen — da der ideale Raum der reinen Anschauung, als reine Form des menschlichen Denkens, notwendig immer der gleiche sein muß, was nur beim Euklidischen Raume möglich ist.

Bei den Winkeln ist dies ganz anders, da eben die Verhältnisse im Endlichen um einen Punkt herum als das einzige wirklich und vollständig Erreichbare der räumlichen Wahrnehmung und Vorstellung gegeben sind; dem entspringt auch die Notwendigkeit, bei der elliptischen Metrik von Winkeln das absolute Maß in Form des rechten Winkels wirklich anzugeben: einmal für die Ebene, dreimal für den Raum, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$-mal bei n Dimensionen; man braucht sich aber auch hier nicht an die Erfahrung zu halten und darf ein beliebiges Dreikant als rechtwinklig der Metrik — an die man sich dann auch halten muß — zugrundelegen. Nicht durch die Erfahrung wird die rein intuitive Anschauung des Raumes gebildet: vielmehr setzt jede Erfahrung eine solche bereits grundsätzlich voraus und wird durch sie erst möglich (so wird aller-

dings der Raum der reinen Anschauung auch jeder Erfahrung zugrundeliegen).

Aus diesen Gründen metaphysischer Natur muß auch die Euklidische Geometrie als die einzige Form des Raumes angesehen werden, der die Bedeutung höherer Realität zukommt. Diese Realität ist nun selbstverständlich nicht empirischer Natur und kann es schon aus mathematischen Gründen nie werden; sie ist transzendental und wächst aus der abstrakten Notwendigkeit hervor, keine fremden unbegreiflichen Elemente in der reinen Anschauung zuzulassen. Solche Elemente treten aber durch den absoluten Unterschied zwischen den Verhältnissen im Großen und im Kleinen und noch mehr durch die Möglichkeit absoluter Strecken innerhalb einer jeden Nicht-Euklidischen Raumform notwendig auf. Und dies ist ein Grund, der Nicht-Euklidischen Geometrien, und sollte sie auch gerade vermöge solcher Eigenschaften den Anforderungen der Erfahrung besser entsprechen, eine nur mathematische Bedeutung beizumessen, sie nicht als eigentliche Formen der reinen Anschauung zu betrachten; wie eine solche Bedeutung allein auch den ausgeschiedenen übrigen 24 regulären Raumformen zukommt, um so mehr, als alle diese Geometrien in den Euklidischen Raum abgebildet werden können.

Der ideale Raum der Anschauung ist Euklidisch und darf nicht anders als Euklidisch gedacht werden. Mit der Erfahrung hat dies, freilich, nichts zu tun, wie denn auch die Geometrie ein für allemal keine Erfahrungswissenschaft ist.

Diesen Tatsachen eine vollständige mathematische Begründung gegeben zu haben, scheint uns wesentliches Resultat der vorangegangenen Ausführungen zu sein.

Der Euklidischen Geometrie gebührt danach, zwar nicht aus mathematischen, wohl aber aus höheren erkenntnistheoretischen und metaphysischen Gründen, tatsächlich diejenige unbestrittene einzigartige Stellung als der allein gültigen Geometrie, die sie vor Zeiten annahm, und die sie allein einzunehmen auch berechtigt ist.