

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft I

Januar- bis Märzszung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Untersuchungen von Cauchy und Poisson über Wasserwellen.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Februar 1912.

Die Untersuchungen der in der Überschrift genannten Mathematiker über die Wellen, die in einer Flüssigkeit von unbegrenzter Tiefe durch eine lokalisierte (unendlich kleine) Anfangsstörung erzeugt werden, finden sich zwar oft in der Literatur erwähnt, sind aber doch ziemlich wenig bekannt, und es ist kaum auf ihnen weiter gebaut worden. Es liegt das zum Teil an äußeren Ursachen: die beiden Gelehrten sind über einige übrigens nebensächliche Punkte in eine kleine Polemik geraten, in der Partei zu ergreifen der nächsten Generation vielleicht nicht angemessen erscheinen mochte. Später hat dann der Umstand das Studium erschwert, daß die mathematische Ausdrucks- und Bezeichnungsweise, auch wohl die Auffassung von der Zulässigkeit der oder jener Schlußweise sich inzwischen geändert hatte. Es sind aber auch innere, sachliche Schwierigkeiten vorhanden: die beiden Autoren mußten sich ihr mathematisches Rüstzeug erst selbst schaffen; die Folge davon ist, daß der eigentliche Gedankengang häufig durch längere mathematische Entwicklungen unterbrochen ist, die zum Teil jetzt allgemein geläufige Dinge, wie die Darstellung sogenannter willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Integrale, behandeln, zum Teil aber auch sehr eigentümliche und uns, die wir mit anderen Hilfsmitteln zu arbeiten gewohnt sind, fremdartig anmutende Entwicklungen darbieten. Auch ist die Darstellung unübersichtlich, namentlich bei Cauchy; aber auch bei Poisson ist nicht immer deutlich zu erkennen,

was durch einzelne im Laufe der Untersuchung eingeführte einschränkende Voraussetzungen bedingt ist und was nicht.

Die Resultate der ursprünglichen Untersuchung von Cauchy, die 1815 der Pariser Akademie zur Preisbewerbung eingereicht, aber infolge äußerer Hindernisse erst zwölf Jahre später¹⁾ veröffentlicht worden ist, sind von H. Lamb in seinem Antrittsvortrag zur Übernahme des Vorsitzes in der Londoner mathematischen Gesellschaft dargestellt worden²⁾, und diese Darstellung hat dann auch in sein Lehrbuch der Hydrodynamik Aufnahme gefunden³⁾. Dagegen verhält sich Lamb gegenüber den gleichzeitigen Untersuchungen von Poisson, soweit sie über die von Cauchy hinausgehen, sowie gegenüber den daran anschließenden späteren Untersuchungen Cauchys (in den der Preisschrift erst bei der Veröffentlichung zugefügten Noten, namentlich XVI und XVIII) ziemlich ablehnend. Es scheint mir aber doch, nicht nur daß die Resultate dieser Untersuchungen, wenn sie auch inzwischen zum Teil auf anderem Wege wiedergefunden sind, an und für sich ein gewisses Interesse darbieten, sondern auch daß die in ihnen benutzte eigentümliche Approximationsmethode sich vielleicht bei anderen Problemen der mathematischen Physik noch nützlich erweisen kann. Vielleicht lohnt es daher der Mühe, wenn ich im folgenden versuche, die entscheidenden Gedankenschritte aus dem Meer von Formeln herauszupräparieren; dabei wird es sich des Zusammenhanges wegen nicht vermeiden lassen, daß ich auch auf die von Lamb bereits besprochenen Teile noch einmal zurückkomme. Es sei dabei zur Vereinfachung der ohnedies umständlichen Formeln gestattet, über die Einheiten der Länge und der Zeit Verfügung zu treffen, und zwar so, daß als Einheit der Länge der (größte) Halbmesser des Bereichs der Anfangsstörung und als Einheit der Beschleunigung die Be-

¹⁾ Paris mém. prés. 1, 1827; jetzt *œuvres* (1) 1.

²⁾ Lond. math. proc. (2) 2, 1904, p. 371; mit Tabellen der numerischen Werte der auftretenden Transzendenten und Figuren, die ihren Verlauf veranschaulichen.

³⁾ Vgl. § 236–238 der deutschen Übersetzung, Leipzig 1907.

schleunigung der Schwere genommen wird. Wenn also im folgenden eine Länge als groß vorausgesetzt wird, so heißt das: sie soll groß sein gegen die Dimensionen des Bereichs der Anfangsstörung; und wenn ein Zeitraum als lang vorausgesetzt wird, so soll das heißen: er soll lang sein gegen diejenige Zeit, die ein fallender Körper brauchen würde, um eine jenem Halbmesser gleiche Strecke zu durchfallen.

Statt der verschiedenen und nicht konsequent beibehaltenen Bezeichnungen der beiden Autoren, durch die eine Vergleichung ihrer Resultate unnötig erschwert wird, benutze ich eine einheitliche, wobei ich mich möglichst dem jetzt herrschenden Gebrauch anschließe.

I. Die mathematischen Hilfsmittel der Untersuchung.

§ 1. Die Art der Behandlung der trigonometrischen Integrale bei den beiden Autoren. .

Poisson macht von Beginn seiner Untersuchung an¹⁾ von der für alle reellen Werte von x geltenden Integralformel

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\xi x - \xi a) f(a) da d\xi \quad (1)$$

Gebrauch, die er aus den beiden von Fourier gegebenen, nur für positive Werte von x geltenden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \xi x \cos \xi a f(a) da d\xi \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin \xi x \sin \xi a f(a) da d\xi \quad (3)$$

abgeleitet hatte²⁾.

¹⁾ Paris mém. 1, 1816 [18], p. 85.

²⁾ So gibt Poisson selbst *théorie de la chaleur*, Paris 1835, p. 205 zu verstehen; vorher hatte er die Formeln immer ohne Angabe eines

Cauchy dagegen scheint zu Beginn seiner Untersuchungen diese allgemeinen Integralsätze nicht gekannt zu haben; er hat vielmehr ursprünglich, wie er später selbst mitteilt¹⁾, ein anderes Verfahren benutzt, das sich ungefähr folgendermaßen darstellen läßt: Einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und den beiden unabhängigen Variablen x, t kann durch eine „Elementarlösung“²⁾ der Form

$$E(\xi, t) \cos \xi x$$

genügt werden; die Funktion E von t bestimmt sich dabei durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, läßt sich also durch eine Summe von Exponentialfunktionen reellen oder komplexen Arguments ausdrücken. Die Summe beliebig vieler, mit beliebigen Konstanten multiplizierter solcher Elementarlösungen ist dann selbst eine Lösung; also auch das nach dem Parameter genommene, über ein beliebiges Intervall erstreckte Integral der mit einer willkürlichen Funktion des Parameters multiplizierten Elementarlösung:

$$u = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) E(\xi, t) \cos \xi x \, d\xi. \quad (4)$$

Soll diese Lösung so bestimmt werden, daß sie sich für $t = 0$ — wo $E(\xi, t) = 1$ werden soll — auf eine gegebene Funktion $f(x)$ reduziert, daß also

Autors benutzt. In der Tat steht die Formel (1) noch nicht in Fouriers Preisschrift von 1811 (Paris mém. 4, 1819/20 [24]), sondern erst in der *théorie de la chaleur*, Paris 1822, no. 354 = *œuvres* 1, p. 402.

¹⁾ Paris mém. pres. 1, 1827 = *œuvres* (1) 1. p. 295 (von 1827); vgl. auch p. 152 (von 1815).

²⁾ Ich entnehme diesen Terminus, wie auch weiter unten „Hauptlösung“ den Vorlesungen von F. Klein; vgl. A. Sommerfeld, *Math. Ann.* 45, 1894, p. 263. Eine „Elementarlösung“ ist noch keine „ausgezeichnete Lösung“; dazu wird sie erst durch spezielle, den etwaigen Randbedingungen angepaßte Wahl des Parameters ξ . — Die Terminologie von Boussinesq, der „ausgezeichneten Lösungen“ und „Hauptlösungen“, beide als „solutions simples naturelles“ bezeichnet, scheint mir weniger zweckmäßig.

$$\int_0^x \varphi(\xi) \cos x \xi d\xi = f(x) \quad (x > 0) \quad (5)$$

wird, so verfährt Cauchy folgendermaßen¹⁾: Er drückt zunächst die Funktion $E(\xi, t)$ durch ein bestimmtes Integral aus — in dem hier zu besprechenden Falle der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

vermittelt der Relation

$$\cos(tV\xi) = \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \quad (7)$$

— und nimmt dann folgende Umformungen vor:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{V\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4} + x\xi\right) + \cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4} - x\xi\right) \right] \varphi(\xi) d\xi d\mu \\ &= \frac{1}{V\pi} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^x \left[\cos\left(x\xi + \frac{t^2\xi}{4\mu^2}\right) + \cos\left(x\xi - \frac{t^2\xi}{4\mu^2}\right) \right] \varphi(\xi) d\xi d\mu \\ &\quad - \frac{2}{V\pi} \int_0^x \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^\infty \cos x\xi \sin \frac{t^2\xi}{4\mu^2} \varphi(\xi) d\xi d\mu. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ist wegen der vorausgesetzten Gleichung (5) gleich²⁾)

$$\frac{1}{V\pi} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \left[f\left(x + \frac{t^2}{4\mu^2}\right) + f\left(x - \frac{t^2}{4\mu^2}\right) \right] d\mu;$$

1) Paris mém. prés. 1827 = œuvres (1) 1, p. 295. Er gibt hier und ann. de math. 17, 1827, p. 110 an, daß das der ursprünglich von ihm eingeschlagene Weg gewesen sei; in der Preisschrift selbst bedient er sich der trigonometrischen Integrale.

2) Cauchy übersieht hier, daß in dem zweiten Summanden der absolute Betrag des Arguments zu nehmen ist; das gleicht sich weiter unten (vgl. Note 1, p. 103) durch ein zweites Versehen wieder aus.

um die zweite in entsprechender Weise umformen zu können, zieht Cauchy¹⁾ noch die weitere Relation

$$\sin |a| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos r a \, dr}{1 - r^2} \quad (8)$$

heran, in der das Integral als Hauptwert zu verstehen ist; so erhält er für diesen zweiten Bestandteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{\pi \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\infty} \eta(\xi) \cos x \xi \int_0^{\infty} \cos \frac{r \xi t^2}{4 \mu^2} \frac{dr}{1 - r^2} d\xi d\mu \\ & = -\frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\infty} \left[f\left(x + \frac{r t^2}{4 \mu^2}\right) + f\left(x - \frac{r t^2}{4 \mu^2}\right) \right] \frac{dr}{1 - r^2} d\mu. \end{aligned}$$

Um diese beiden Bestandteile zusammenziehen zu können, macht er im ersten von der Gleichung

$$\cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 r^2 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dr}{1 - r^4} \quad (9)$$

Gebrauch, die sich durch Integration der Funktion

$$\frac{\exp(\mu^2 z^2 i)}{1 - z^2}$$

um den ersten Quadranten der z -Ebene ergibt²⁾; im zweiten ersetzt er μ durch μr und r durch r^2 ; das gibt:

$$u = \frac{-4}{\pi \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 r^2 - \frac{\pi}{4}\right) \left[f\left(x + \frac{t^2}{4 \mu^2}\right) + f\left(x - \frac{t^2}{4 \mu^2}\right) \right] \frac{dr}{1 - r^2} d\mu$$

oder wenn noch von der Umformung

¹⁾ Cauchy nimmt diese Umformung erst nach der Einführung der neuen Variablen a (p. 103) vor; das ist etwas umständlicher.

²⁾ Auch hier ist unter dem Integral der Hauptwert zu verstehen.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin \left(\mu^2 v^2 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{dv}{1-v^2} &= \frac{-2}{V\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin \omega^2 \cos 2\mu v \omega \, d\omega \frac{dv}{1-v^2} \\ &= -V\pi \int_0^{\infty} \sin \omega^2 \sin 2\mu \omega \, d\omega \end{aligned} \quad (10)$$

Gebrauch gemacht wird:

$$u = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[f \left(x + \frac{t^2}{4\mu^2} \right) + f \left(x - \frac{t^2}{4\mu^2} \right) \right] \sin \omega^2 \sin 2\mu \omega \, d\omega \, d\mu.$$

Werden hier die verschiedenen Bestandteile durch je eine der Substitutionen

$$\begin{aligned} x + \frac{t^2}{4\mu^2} &= a, \quad (\mu=0, \quad a=\infty; \quad \mu=\infty, \quad a=x), \quad d\mu = -\frac{t}{4} \frac{da}{(a-x)^{\frac{3}{2}}} \\ -x + \frac{t^2}{4\mu^2} &= a, \quad \left(\mu=0, \quad a=\infty; \quad \mu = \frac{t}{2Vx}, \quad a=0 \right), \quad d\mu = -\frac{t}{4} \frac{da}{(x+a)^{\frac{3}{2}}} \\ x - \frac{t^2}{4\mu^2} &= a, \quad \left(\mu = \frac{t}{2Vx}, \quad a=0; \quad \mu=\infty, \quad a=x \right), \quad d\mu = \frac{t}{4} \frac{da}{(x-a)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

umgeformt¹⁾, so wird erhalten:

$$u = \frac{t}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega^2 \int_0^{\infty} f(a) \left[\frac{1}{V(x+a)^3} \sin \frac{t\omega}{Vx+a} + \frac{1}{V|x-a|^3} \sin \frac{t\omega}{V|x-a|} \right] da \, d\omega,$$

also:

$$\int u \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega^2 \int_0^{\infty} f(a) \left[\cos \frac{t\omega}{Vx+a} + \frac{x-a}{|x-a|} \cos \frac{t\omega}{V|x-a|} \right] da \, \frac{d\omega}{\omega}$$

und wenn hier endlich noch

$$\omega = V|x \pm a| V\xi, \quad \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d\xi}{\xi}$$

¹⁾ Cauchy läßt die Glieder mit $f \left(x + \frac{t^2}{4\mu^2} \right)$, als für seine späteren Zwecke entbehrlich, hier schon weg und bestimmt die auf die neue Integrationsvariable sich beziehenden Grenzen falsch; das gleicht sich dann gerade mit dem in Note 2, p. 101 erwähnten Versehen aus.

substituiert wird

$$\int u dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(a) [\sin \xi(x+a) + \sin \xi(x-a)] \cos(tV\xi) \frac{d\xi}{\xi} da$$

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(a) [\cos(\xi x + \xi a) + \cos(\xi x - \xi a)] \cos(tV\xi) d\xi da,$$
(11)

wie es die Anwendung der Fourierschen Integralsätze direkt geben würde. Von da aus scheint dann Cauchy auch seinerseits zu diesen allgemeinen Sätzen gelangt zu sein¹⁾.

§ 2. Die Verwendung der Integration um die Begrenzung eines sich ins Unendliche erstreckenden Bereiches zur Verwandlung von Integralen über oszillierende in solche über abklingende Funktionen.

Führt man in ein Integral einer oszillierenden Funktion einer reellen Variablen an deren Stelle eine rein imaginäre ein, so erhält man ein Integral einer abklingenden Funktion, das zu Abschätzungen sich besser eignet.²⁾ Die Bedingungen für

¹⁾ Ob Cauchy dabei ganz unabhängig von Fourier war, läßt sich nicht mehr feststellen. Bull. philomat. 1818, p. 179 und Paris mém. prés. 1, 1827 = œuvres (I) 1, p. 300 berichtet er: zur Zeit der Abfassung seines bull. philomat. 1817, p. 121 erschienenen Artikels über reziproke Funktionen habe er keine andere Abhandlung [auch keine mündliche Mitteilung?] gekannt, in der die Formeln vorkämen, als seine eigenen und die Poissons über die Wasserwellen; seitdem habe ihm Fourier von seinen Untersuchungen aus den Jahren 1807 und 1811 Kenntnis gegeben und er habe in diesen dieselben Formeln erkannt. — Später nennt er die Formeln stets nach Fourier.

²⁾ Diese Auffassung solcher Umformungen ist von Cauchy selbst in einer späteren Abhandlung ausgesprochen, mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 30. Ob Cauchys Untersuchungen über „les équations qui autorisent le passage du réel à l'imaginaire“ erst durch die Bedürfnisse seiner Wellenuntersuchung veranlaßt sind oder ob sie einen Teil der nach dem Bericht von C. A. Valson, la vie et les travaux du baron Cauchy, 1, Paris 1868, p. 29, um 1810 von ihm unternommenen Durchmusterung der Mathematik bilden, wird sich nicht mehr ausmachen lassen.

die Zulässigkeit einer solchen Umformung sind freilich, sofern es sich um Integrale über ein unendliches Intervall handelt, von Cauchy in seinen früheren Abhandlungen nur ungenügend angegeben worden; und die später von ihm angegebenen sind in seinen Beispielen nicht immer erfüllt. Die für uns in Betracht kommende Relation ist in der Preisarbeit nur verifiziert, nicht abgeleitet; dagegen gibt er in einer späteren Abhandlung¹⁾ eine Ableitung, die jedenfalls als seine ursprüngliche anzusehen ist. Man kann ihren wesentlichen Inhalt folgendermaßen darstellen:

1. Wird der Integralsatz auf die Funktion

$$f(z) = \exp(i x z + t \sqrt{z}),$$

in der x und t positive Parameter bedeuten sollen und der Quadratwurzel ihr Hauptwert beizulegen ist, und die Halbebene der z mit positiv imaginärem Bestandteil angewendet, so wird erhalten:

$$\int_0^{\infty} e^{i(x\xi + t\sqrt{\xi})} d\xi = - \int_0^{\infty} e^{-i(x\xi + t\sqrt{\xi})} d\xi$$

oder nach Trennung des reellen und imaginären Bestandteils:

$$\int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (x\xi + t\sqrt{\xi}) d\xi = \mp \int_0^{\infty} e^{-t\sqrt{\xi}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} x\xi d\xi. \quad (12)$$

2. Anwendung des Integralsatzes auf den ersten Quadranten gibt, wenn den vorkommenden Quadratwurzeln ihre Hauptwerte beigelegt werden:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = Vi \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta}} d\eta = Vi \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

¹⁾ Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 59. Daß hier in der Tat Cauchys ursprüngliche Ableitung vorliegt, dafür scheint mir auch der Umstand zu sprechen, daß die Rechnung weit hinter den sonst um diese Zeit von Cauchy an sich selbst gestellten Anforderungen an Strenge zurückbleibt.

Statt dessen kann man schreiben¹⁾:

$$\int \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = 2Vi \sqrt{\frac{\pi}{x}},$$

wenn das Integral von $+\infty$ in negativem Sinne um den Nullpunkt herum nach $+\infty$ zurück genommen wird und dabei auf dem ersten Teil des Weges der Quadratwurzel aus ξ der negative, auf dem zweiten der positive Wert beigelegt wird.

Wird hier $\sqrt{\xi}$ durch $\sqrt{\xi} + \frac{t}{2x}$ ersetzt, so wird erhalten:

$$\int \exp i(x\xi + t\sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2Vi \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right);$$

das Integral ist jetzt von $+\infty$ um $\frac{-t}{2x}$ in negativem Sinne herum nach $+\infty$ zurück zu nehmen, der Integrationsweg kann aber bis auf den Nullpunkt zusammengezogen werden. Wird er dann wieder in zwei Teile zerlegt und beachtet, daß für den zweiten Teil die Quadratwurzel auch im Exponenten mit dem umgekehrten Zeichen zu nehmen ist, so wird erhalten:

$$\int_0^\infty \exp ix\xi \cos(t\sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -iVi \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right)$$

und durch Differentiation nach t :

$$\int_0^\infty \exp ix\xi \sin(t\sqrt{\xi}) d\xi = \frac{1}{2} Vi \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \cdot t \cdot \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right)$$

¹⁾ Die von Cauchy benutzte Integrationsvariable ist nicht die hier gewählte, sondern ihre Quadratwurzel; ich sehe nicht, wie man für die so entstehenden Funktionen die Zulässigkeit der Schlüsse beweisen kann, ohne eben die hier gewählte Integrationsvariable einzuführen. Aber auch bei dieser Wahl der Integrationsvariablen sind die von Cauchy selbst angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, nicht einmal die weitesten (*exerc. de math.* 2, 1827 = *oeuvres* (2) 7, p. 302); man muß eine erst von C. Jordan (*cours d'analyse* 2, Paris 1883, p. 290; vgl. auch W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig 1907, p. 246) angegebene Schlußweise benutzen.

oder nach Trennung von Reellem und Imaginärem:

$$\int_0^x \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} x \xi \sin(t \sqrt{\xi}) d\xi = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (13)$$

3. Verbindung von (12) und (13) gibt die gewünschte Relation:

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int_0^x \cos x \xi \cos(t \sqrt{\xi}) d\xi \\ &= - \int_0^x e^{-ix\xi} \cos x \xi d\xi - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \sin \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Poisson kommt zu entsprechenden Resultaten auf anderem Wege¹⁾. Er leitet zunächst für die Funktion

$$H = \int_0^x e^{ix\xi} \cos(t \sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (15)$$

durch partielle Integration die lineare Differentialgleichung mit zweitem Glied ab:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{t}{2ix} H = \frac{1}{2ix}. \quad (16)$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$H = 0 \text{ für } t = 0 \text{ (außer wenn zugleich } x = 0)$$

ergibt sich daraus:

$$H = \frac{t^2}{2ix} \int_0^1 \exp \frac{it^2(1-v^2)}{4x} dv. \quad (17)$$

¹⁾ Paris mém. 1, p. 94. Poisson hat hier, da er nicht nur die Bewegung an der Oberfläche, sondern auch die in der Tiefe betrachtet, an Stelle der rein imaginären Größe ix eine komplexe mit negativ reellem Bestandteil; infolgedessen unterliegt bei ihm die Differentiation unter dem Zeichen keinem Bedenken. Aber auch für den im Text allein genannten Fall läßt sie sich rechtfertigen. Tritt an Stelle von ix eine reelle Größe (Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe senkrecht unter dem Störungszentrum), so erscheint H als eine Krampfsche Transzendente (error-function) (Poisson, p. 127).

Wird dieses Integral als Differenz der entsprechenden von 0 bis ∞ und von 1 bis ∞ genommenen Integrale angesehen, so gibt der Minuend die in Cauchys Formel (14) vom Integralzeichen freien Glieder¹⁾; für den Subtrahenden erhält Poisson durch partielle Integrationen (die bei 0 als unterer Grenze nicht möglich sein würden) eine [asymptotische] Entwicklung nach fallenden Potenzen von $\frac{t^2}{x}$.

§ 3. Zurückführung der Hauptlösung des zweidimensionalen Problems auf die des eindimensionalen.

Eine Hauptlösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

erscheint zunächst in der Form

$$H(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \cos x\xi \cos y\eta d\xi d\eta, \quad (19)$$

die nicht unmittelbar erkennen läßt, daß sie eine Funktion von t und

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

allein ist, wie doch physikalisch evident ist. Cauchy²⁾ ersetzt in ihr den als Funktion von $\xi^2 + \eta^2$ betrachteten Faktor

$$\cos(t\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

durch seine Fouriersche Integraldarstellung:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos m(\xi^2 + \eta^2) \cos mn \cos(t\sqrt{n}) dm dn;$$

¹⁾ Poisson führt statt ∞ einen willkürlichen Hilfspunkt $t = a$ ein; daß man zweckmäßigerweise $a = \infty$ nimmt, bemerkt G. Plana, Torino mem. 25, 1820, p. 128.

²⁾ Paris mém. prés. 1, 1827 = œuvres (1) 1, p. 160 (von 1815).

dann lassen sich die Integrationen nach ξ und η ausführen und es bleibt:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos m n \cos (t \sqrt{m^2 + n^2}) \sin \frac{r_0^2}{4 m n} d m d n$$

oder wenn hier

$$\text{einmal } m = \frac{r_0}{2\mu}, \quad n = \mu r, \quad \text{dann } m = \frac{r_0}{2r}, \quad n = \mu r$$

gesetzt wird und die beiden so erhaltenen Resultate addiert werden:

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos (t \sqrt{\mu^2 + r^2}) \sin \frac{(\mu + r) r_0}{2} d \mu d r. \quad (20)$$

Hier entwickelt Cauchy unter dem Integralzeichen nach Potenzen von t und integriert gliedweise, indem er die Integrale durch Einführung eines Exponentialfaktors konvergent macht; die Vergleichung der so entstehenden Entwicklung mit der entsprechenden Entwicklung von (14) gibt¹⁾:

$$H(x, y, t) = - \frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{2\pi} H(r_0 \cos \psi, t) d \psi. \quad (21)$$

Poisson gelangt zu diesem Resultat einfacher, indem er Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \psi, & \eta &= \varrho \sin \psi \\ x &= r_0 \cos \varphi, & y &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

einführt²⁾.

Um von dieser Form aus zu einem brauchbaren asymptotischen Ausdruck vorzudringen, benutzt Poisson³⁾ den asym-

¹⁾ Bei Cauchy (œuvres (1) 1, p. 126), bei dem sie übrigens etwas anders formuliert ist, erscheint diese Gleichung als Spezialfall eines allgemeineren Satzes, der bei Anwendung derselben Rechnung auf irgend eine Funktion $f(t \sqrt{\xi})$ statt auf die Funktion $\cos(t \sqrt{\xi})$ sich ergibt.

²⁾ Paris mém. 1, p. 139, 148.

³⁾ p. 157.

ptotischen Ausdruck (14) der Funktion H und führt durch die Gleichung

$$\cos \psi' = \frac{1}{1 + w^2}$$

eine neue Integrationsvariable ein; dabei wird

$$\frac{d\psi'}{(\cos \psi')^{\frac{3}{2}}} = (\sqrt{2} + wW) dw,$$

wo W die an beiden Integrationsgrenzen $w = 0$ und $w = \infty$ verschwindende Funktion

$$W = \frac{2w}{(2\sqrt{1+w^2} + \sqrt{2}\sqrt{2+w^2})\sqrt{2+w^2}}$$

bedeutet. Infolgedessen wird durch partielle Integration erhalten:

$$- \frac{d^2}{dt^2} \frac{\pi \sqrt{2}}{2r_0} \cos \frac{t^2}{4r_0} \propto \frac{\pi t^2 \sqrt{2}}{8r_0^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{t^2}{4r_0} \quad (23)$$

+ Glieder höherer Ordnung¹⁾. Cauchy dagegen führt²⁾

$$\mu = \frac{1}{4} \frac{t^2}{r_0} (1 - \cos \theta)$$

als neue Integrationsvariable ein und setzt zur Abkürzung

$$\frac{t^2}{4r_0} = s, [\sin(s - \mu) + \cos(s - \mu)] \frac{\left(1 - \frac{\mu}{s}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{s}\right)^{\frac{1}{2}}} = f(\mu);$$

damit erhält er zunächst:

$$\frac{1}{\sqrt{2}s} \int_0^s \mu^{-\frac{1}{2}} f(\mu) d\mu.$$

¹⁾ Poisson entwickelt dieses Glied durch weitere partielle Integrationen, unter jedesmaliger Einführung einer neuen Integrationsvariablen, noch in eine asymptotische Reihe nach fallenden Potenzen von $\frac{t^2}{r_0}$; doch macht er von dieser Entwicklung keinen weiteren Gebrauch.

²⁾ (Œuvres (I), 1, p. 243 (von 1827).

Hier schaltet er $\sqrt{s}$ als Zwischengrenze ein; zwischen 0 und $\sqrt{s}$ ist der zweite Faktor von $f(\mu)$ nahezu gleich 1, also das Integral nahezu:

$$\int_0^{\sqrt{s}} \mu^{-\frac{1}{2}} [\sin(s - \mu) + \cos(s - \mu)] d\mu = \sqrt{2\pi} \sin s;$$

das Integral von $\sqrt{s} + \pi$ bis s ist nahezu entgegengesetzt gleich dem von $\sqrt{s}$ bis $s - \pi$, das von $s - \pi$ bis s nahezu gleich Null, das von $\sqrt{s}$ bis $\sqrt{s} + \pi$ ist von der Ordnung s^{-1} , also kann das Integral von $\sqrt{s}$ bis s vernachlässigt werden, und es bleibt

$$\frac{2\sqrt{2\pi}r^{\frac{3}{2}}}{\pi t^3} \int H(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sin s$$

und mit demselben Grad der Annäherung

$$H \propto \frac{\pi t^2 \sqrt{2}}{8 r_0^3} \cos \frac{t^2}{4 r_0}$$

übereinstimmend mit dem Resultat von Poisson.

II. Die Approximation der allgemeinen Lösung durch die Hauptlösung.

§ 4. Erste Annäherung.

Die den Anfangsbedingungen

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad (24)$$

genügende Lösung des eindimensionalen Problems läßt sich vermittelt der zugehörigen Hauptlösung durch ein einfaches bestimmtes Integral darstellen:

$$u = \int_{-x}^{+x} f(a) H(x - a, t) da. \quad (25)$$

Ist die Funktion $f(x)$ nur im Intervall von -1 bis $+1$ von Null verschieden, so braucht die Integration auch nur

über dieses Intervall erstreckt zu werden; für große Werte von x kann dann in H das a neben dem x vernachlässigt werden, so daß man einfach erhält:

$$u = H(x, t) \int_{-1}^{+1} f(a) da, \quad (26)$$

d. h. die diesen Bedingungen genügende Lösung unterscheidet sich von der Hauptlösung nur durch einen von Ort und Zeit unabhängigen Faktor, der auch nur von dem Gesamtbetrag der Anfangsstörung (dem Volumen der zu Anfang verdrängten Flüssigkeit), nicht von ihrer Verteilung abhängt. Ersetzt man noch die Hauptlösung durch ihren asymptotischen Ausdruck (14), so erkennt man, daß unter den genannten Bedingungen Wellen auftreten, die mit konstanter Beschleunigung $1/2$ fortschreiten und deren Amplitude in aus der Formel ersichtlicher Weise von Ort und Zeit abhängt.

Für das zweidimensionale Problem gilt entsprechendes.

Diese Resultate haben Cauchy¹⁾ und Poisson²⁾ übereinstimmend erhalten.

§ 5. Zweite Annäherung für das eindimensionale Problem.

Darüber hinaus hat Poisson noch Fälle untersucht, in welchen diese erste Annäherung nicht mehr ausreicht. Wenn nämlich $\frac{t^2}{x}$ groß ist³⁾, kann man zwar noch außerhalb der Zeichen der trigonometrischen Funktionen für große x

¹⁾ Œuvres (I) 1, p. 61.

²⁾ Paris mém. 1, p. 97.

³⁾ Hier liegt noch eine weder von Cauchy noch von Poisson besprochene Schwierigkeit vor. Wie aus den im Text wiedergegebenen Überlegungen hervorgeht, kann die allgemeine Lösung für lokalisierte Anfangsstörung nur dann in hinlänglicher Entfernung von der Störungsstelle durch die noch mit einer Konstanten multiplizierte Hauptlösung ersetzt werden, wenn t nicht zu groß ist; andererseits kann die Hauptlösung nur dann durch ihren asymptotischen Wert ersetzt werden, wenn t nicht zu klein ist. Es fehlt der Beweis, daß es überhaupt Werte von t gibt, die beiden Bedingungen zugleich genügen. Man kann sich die

$$\frac{t^2}{4(x-a)} \quad \text{durch} \quad \frac{t^2}{4x} \quad (27)$$

ersetzen, da der Quotient dieser beiden Größen wenig von 1 verschieden ist; aber unter den Zeichen der trigonometrischen Funktionen ist das nur so lange erlaubt, als die Differenz dieser beiden Größen, also

$$\frac{t^2}{4(x-a)} - \frac{t^2}{4x} = \frac{t^2}{4x} \cdot \frac{a}{x-a} \quad (28)$$

klein gegen π ist. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn $\frac{t^2}{x}$ von derselben Größenordnung ist, wie x selbst. Poisson¹⁾ ersetzt in diesem Falle die Größe (27) unter den Zeichen der trigonometrischen Funktionen in zweiter Annäherung durch

$$\frac{t^2}{4x} + \frac{t^2}{4x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{t^2}{4x} + va, \quad v = \frac{t^2}{4x^2}, \quad (29)$$

während er außerhalb dieser Zeichen nach wie vor a gegenüber x vernachlässigt. Indem er dann die Hauptlösung durch ihren aus (14) sich ergebenden asymptotischen Wert ersetzt, erhält er zunächst:

$$u \propto \frac{t}{4} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \left[\cos \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right) \int_{-1}^{+1} f(a) \cos va \, da \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right) \int_{-1}^{+1} f(a) \sin va \, da \right]. \quad (30)$$

Er meint²⁾, da es sich doch nur um kleine Schwingungen

Sache wohl so plausibel machen: eine Exponentialfunktion von t kann man schon vernachlässigen, wenn man das Produkt einer Potenz von t mit einer kleinen Größe noch vernachlässigen kann; indessen wäre doch eine genauere Untersuchung erwünscht.

¹⁾ Paris mém. 1, p. 117.

²⁾ Paris mém. 1, p. 103. Poisson führt diese Annahme gleich zu Beginn seiner Untersuchungen ein, so daß man bei ihm den Eindruck erhalten kann, als ob schon die hier in § 2–4 besprochenen Resultate von ihr abhängig seien, was nicht der Fall ist.

handeln könne, genüge es die Kurve der Anfangsstörung, die er als symmetrisch gegen ihre Mittellinie voraussetzt, durch ihre oskulierende Parabel zu ersetzen, also

$$f(a) = 1 - a^2 \quad (31)$$

zu nehmen; dann lassen sich die Integrationen ausführen und man erhält:

$$u \propto \frac{2^6 \sqrt{x^9 \pi}}{t^5} (\sin v - v \cos v) \cos \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (32)$$

Der erste Faktor allein würde Wellen geben, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $1/2$ fortschreiten und deren Wellenlänge durch die Gleichung

$$\frac{t^2}{4x^2} - \frac{t^2}{4(x+\lambda)^2} \propto 2\pi,$$

also

$$\lambda \propto \frac{4x^3 \pi}{t^2} \quad (33)$$

bestimmt ist; sie werden von beiden Autoren als „ondes“ bezeichnet. Der zweite Faktor allein würde Wellen von der Art geben, wie sie bei der Hauptlösung allein auftreten; die also mit der Beschleunigung $1/2$ über die ersteren weggehen und deren Wellenlänge durch

$$\frac{t^2}{4x} - \frac{t^2}{4(x+\lambda)} = 2\pi,$$

also

$$\lambda \propto \frac{4x^2 \pi^2}{t^2} \quad (34)$$

bestimmt ist. Diese Wellen werden von Poisson als „dents“, von Cauchy als „sillons“ bezeichnet. Die beiden Wellensysteme sind nun multiplikativ, nicht etwa additiv superponiert; man darf sich also, worauf Lamb¹⁾ mit Recht hinweist, nicht etwa durch die erwähnte Ausdrucksweise zu der Vorstellung

¹⁾ Lond. math. proc. (2) 2. p. 382.

verleiten lassen, als handle es sich um gezähnelte Wellen der Art, wie sie auftreten, wenn Kapillarwellen über Gravitationswellen gelagert sind. Vielmehr ähnelt die Erscheinung in jedem Augenblick der graphischen Darstellung einer Schwebung.

Cauchy hat dann in den Nachträgen zu seiner Abhandlung die Untersuchung von Poisson noch in der Richtung ergänzt, daß er auch andere Annahmen über die Gestalt der Anfangsstörung in Betracht gezogen hat¹⁾. Man erhält auch dann, wenn man den asymptotischen Ausdruck der Hauptlösung benutzt, eine Gleichung der Form

$$u \propto \frac{t}{4} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \left[\varphi(v) \cos\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) + \psi(v) \sin\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) \right];$$

aber die Funktionen φ und ψ hängen wesentlich von der Natur der Funktion f ab, und zwar erhält man ganz andere Näherungswerte für die Wellenlängen, wenn man von der Parabel merklich abweichende Gestalten der Anfangsstörung einführt²⁾. Poisson hat dem zwar entgegengehalten³⁾, daß für derartige Annahmen die ganzen physikalischen Voraussetzungen der Untersuchung nicht mehr erfüllt seien, und wird damit für das Wellenproblem wohl physikalisch recht haben; immerhin wird Cauchys Bemerkung für etwaige Verwendung der Resultate bei Untersuchungen anderer Art im Auge zu behalten sein.

Was die von Cauchy bei dieser Untersuchung angewendeten Hilfsmittel betrifft, so gibt Entwicklung der Funktion f nach Potenzen von α bzw. von $|a|$ [asymptotische] Entwicklungen von φ und ψ nach fallenden Potenzen von v ⁴⁾; solche Entwick-

¹⁾ Œuvres (1) 1, p. 191 (erst beim Druck 1827 hinzugefügt). Cauchy bemerkt, er habe derartige Formeln schon während der Ausarbeitung der Preisschrift erhalten, sie aber aus Zeitmangel und in der Annahme, die durch sie dargestellten Bewegungen seien unmerklich, nicht weiter verfolgt.

²⁾ Wie bereits Fourier bemerkt hatte, bull. philomat. 1818, p. 133 = Œuvres 2, p. 262. Auch Paris mém. 8, 1829, p. 620 = Œuvres 2, p. 179 hält Fourier diese Auffassung gegen Poisson aufrecht.

³⁾ Paris mém. 8, 1829, p. 573.

⁴⁾ Œuvres (1) 1, p. 200, 203.

lungen werden auch erhalten, wenn man wiederholt partiell integriert und dabei vor jeder partiellen Integration den wenig von 1 verschiedenen Faktor

$$\frac{x^2}{(x-a)^2}$$

unter dem Integralzeichen hinzufügt¹⁾; am bequemsten, wenn man dabei

$$\frac{x^2}{x-a} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \right)$$

als neue Integrationsvariable einführt²⁾. Im Falle

$$f(a) = e^{a(1-a)} - 1$$

ergibt sich eine konvergente Reihe, die sich elementar summieren läßt³⁾. Für den Fall, daß die Funktion f oder ihre Ableitungen an der Grenze des Intervalls nicht mehr endlich bleiben, ersetzt Cauchy die Integration von -1 nach $+1$ durch eine solche von -1 nach $-1 + i\infty$ und von $+1$ nach $+i\infty$ ⁴⁾; d. h. er gewinnt die asymptotischen Entwicklungen mit Hilfe der Umformung:

$$\int_{-1}^{+1} f(a) e^{v a i} da = \frac{1}{vi} \int_0^\infty \left[e^{vi} f\left(1 + \frac{\mu i}{v}\right) - e^{-vi} f\left(-1 + \frac{\mu i}{v}\right) \right] e^{-\mu} d\mu. \quad (35)$$

§ 6. Zweite Annäherung für das zweidimensionale Problem.

Analog kann man nun auch im Falle des zweidimensionalen Problems verfahren. Wird auch hier die Hauptlösung durch ihren asymptotischen Wert (23) ersetzt und werden durch die Gleichungen (22) Polarkoordinaten eingeführt, so wird erhalten⁵⁾:

$$\frac{\pi t^2}{8 r_0^2} \iint \cos \frac{t^2}{4r} f(\varrho \cos \psi, \varrho \sin \psi) \varrho d\varrho d\psi, \quad (36)$$

wo

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-\beta)^2$$

und

¹⁾ p. 231.

²⁾ p. 232.

³⁾ p. 218.

⁴⁾ p. 236.

⁵⁾ p. 251.

$$\frac{1}{r} \propto \frac{1}{r_0} + \frac{\varrho \cos(\psi - \theta)}{r_0^2}. \quad (37)$$

Sind die Funktion f und die Grenzen für ϱ von ψ unabhängig, so wird der Wert des Integrals von φ unabhängig; und wenn f sich nach Potenzen von ϱ entwickeln läßt, lassen sich die Integrationen an den einzelnen Gliedern dieser Entwicklung ausführen und man erhält eine [asymptotische] Entwicklung nach fallenden Potenzen von v . Unter Umständen läßt sich diese Entwicklung bequemer erhalten, wenn man die folgende Darstellung benutzt¹⁾:

$$\int_0^1 \cos v \beta \int_0^{\sqrt{1-\beta^2}} f(\sqrt{a^2 + \beta^2}) da d\beta, \quad v = \frac{t^2}{4r_0^2} \quad (38)$$

oder wenn man analog wie durch die Gleichung (35) den Integrationsweg ins Komplexe verlegt²⁾.

Analoge Resultate hatte vorher³⁾ Poisson für den von ihm allein behandelten Fall

$$f(a, \beta) = 1 - \frac{a^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \quad (39)$$

erhalten, indem er an Stelle der Gleichungen (22) die folgenden benutzte:

$$a = a_0 \cos \psi, \quad \beta = b_0 \sin \psi. \quad (40)$$

Werden dann die auftretenden Integrale in der Form geschrieben:

$$\iint \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \left(v \varrho \left\{ \begin{matrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{matrix} \right\} \right) (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho d\psi, \quad (41)$$

so läßt sich die eine Intergration ausführen; für das dann noch übrig bleibende Integral begnügt sich Poisson damit, zu zeigen, daß es mit wachsendem t nicht über alle Grenzen wächst.

Cauchy behandelt von Fällen ohne Rotationssymmetrie nur den der Scheibe mit rechteckiger Basis:

¹⁾ p. 256, 266.

²⁾ p. 269.

³⁾ Paris mém. 1, p. 161.

$$f(a, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| < a \text{ und } |\beta| < b, \\ 0 & \text{für } |a| > a \text{ oder } |\beta| > b; \end{cases} \quad (42)$$

die Integrationen lassen sich dann ausführen und es kommt¹⁾:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\sin(av \cos \varphi)}{\cos \varphi} \frac{\sin(bv \sin \varphi)}{\sin \varphi}. \quad (43)$$

§ 7. Ansatz zu einer dritten Annäherung.

In den beiden letzten Paragraphen war vorausgesetzt, daß die mit v bezeichnete, durch die Gleichungen (29) bzw. (38) definierte Größe endlich sei. Ist sie auch groß, so reicht, wie Cauchy²⁾ bemerkt, die bisher benutzte Annäherung nicht mehr aus; man muß dann noch ein weiteres Glied in der Entwicklung von (27) nach Potenzen von $\frac{a}{x}$ mitnehmen. Dann geben zu den Integralen (30) nur die Umgebungen der Endpunkte -1 und $+1$ merkliche Beiträge, für die dazwischenliegende Strecke ist die zu integrierende Funktion abwechselnd positiv und negativ, und zwar so, daß die entsprechenden Teile des Integrals sich größtenteils gegeneinander wegheben. Damit ist eine Abschätzung ermöglicht, auf Grund deren Cauchy zu dem Schluß kommt, die hierher gehörenden Wellen seien sehr schwach, im Falle $f(-1) = f(1) = 0$ sogar „tout-à-fait insensibles“.

§ 8. Anhang: Über einen Abschnitt von Fouriers Théorie de la Chaleur.

Wird für die Integration der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

die Hauptlösung

$$H(x, t) = \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \cos \xi x d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

¹⁾ (Euvres (I) 1, p. 284.

²⁾ p. 231.

benutzt, so erscheint das allgemeine Integral in der von Laplace auf anderem Wege abgeleiteten Form

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) f(a) da.$$

Poisson¹⁾ hat bemerkt, daß man, wenn $f(a)$ nur im Intervall $(-1 \dots +1)$ von Null verschieden ist, für große x im Exponenten a gegen x vernachlässigen und schreiben könne:

$$u = H(x, t) \int_{-1}^{+1} f(a) da.$$

Später²⁾ fügt er ergänzend bei, daß dieser Schluß nur für große Werte von t zulässig ist, indem es im Exponenten von e nicht darauf ankommt, ob ein Bestandteil gegen den anderen klein ist, sondern nur darauf, ob er an und für sich klein ist. Das ist dann von Fourier in einem derjenigen Abschnitte seiner *Théorie de la chaleur*³⁾ des breiteren ausgeführt worden, die erst in dieser gegenüber der Preisschrift von 1811 neu hinzugekommen sind. Fourier hat aber zu Anfang übersehen, ausdrücklich zu sagen, daß die ganze Überlegung nur für große Werte von x gelten soll; und das allein ist die Ursache dafür, daß der Herausgeber der *œuvres*, G. Darboux, die betreffende Stelle⁴⁾ für unverständlich erklären konnte. Es ist aber, wenn man nur diese Bedingung — die übrigens im weiteren Verlauf der Untersuchung von Fourier festgehalten wird — nicht wegläßt, alles in Ordnung; und man könnte auch auf

1) Bull. philomat. 1815, p. 87.

2) Ib. 1816, p. 12.

3) Chap. IX, sect. 2 = *œuvres* 1, p. 427—448.

4) p. 437. Auch in der Übersetzung von Weinstein, Berlin 1884, p. 358 (die übrigens gerade in diesem Abschnitt mit Fouriers Text ziemlich frei umgeht, auch ihn durch numerische Beispiele ergänzt) ist die Darstellung unzureichend: wenn $\frac{x^2}{4t}$ endlich und $\frac{ax}{2t}$ klein sein soll, muß $\frac{2a}{x}$ klein sein.

demselben Weg wie bei den Untersuchungen über die Differentialgleichung der Wasserwellen zu einer zweiten Annäherung gelangen, da sich die Integrale

$$\int \exp\left(-\frac{\alpha x}{2t}\right) \alpha^n d\alpha$$

ja elementar auswerten lassen¹⁾.

¹⁾ Das von Darboux vorgeschlagene Näherungsverfahren gilt nur für kleine Werte von $\frac{x^2}{t}$.
