Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Heineschen Reihe.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Februar 1911.

In meiner Abhandlung[1]) „Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche" habe ich gelegentlich darauf hingewiesen, daß die Heinesche Reihe eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion definiert, welche im Endlichen bis auf einfache Pole aus der Reihe der Zahlen $q^{-\nu}$ ($|q| < 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) regulär ist.[2]) Es war mir damals entgangen, daß man dieses Resultat, wie einer meiner Schüler, Herr Edwin R. Smith, bemerkt hat, ganz unmittelbar aus der Differenzengleichung entnehmen kann, welche Heine für jene Reihe abgeleitet hat. Dieselbe lautet in der ursprünglich von Heine gegebenen Darstellung[3]):

$$(1)\quad (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta-n}x)\cdot \Delta^2\varphi_n - (1 - q^{\gamma-1} - q^n(q^\alpha + q^\beta - 2q^{\alpha+\beta})x)\cdot \Delta\varphi_n - q^n(1-q^\alpha)(1-q^\beta)\cdot\varphi_n = 0,$$

wo:

$$\varphi_n = (\alpha, \beta, \gamma, q, q^n x)$$

$$\Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \qquad \Delta^2\varphi_n = \Delta\varphi_{n+1} - \Delta\varphi_n.$$

Wählt man speziell $n = 0$, so nimmt durch Substitution von:

$$\Delta\varphi = \varphi(qx) - \varphi(x)$$
$$\Delta^2\varphi = \varphi(q^2x) - 2\varphi(qx) + \varphi(x)$$

---

1) Diese Berichte, Jahrgang 1910, 6. Abhandlung.

2) A. a. O. p. 31.

3) Journ. f. Math. 34 (1847), p. 316.

die obige Differenzengleichung die einfachere Form an:

(2) $(q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta}x)\cdot\varphi(q^2x)-(1+q^{\gamma-1}-(q^\alpha+q^\beta)x)\cdot\varphi(qx)+(1-x)\cdot\varphi(x)=0,$

aus welcher dann in der Tat die oben bezeichneten Eigenschaften der durch das Funktionselement $\varphi(x)$ definierten analytischen Funktion ohne weiteres hervorgehen.

Auch diese Formel (2) findet sich schon bei Heine, jedoch nicht in der oben zitierten Abhandlung, sondern in der zweiten Auflage (1878) seines Handbuches der Kugelfunktionen. Sie erscheint aber dort[1]) ganz unterschiedlos in einer langen Serie anders gearterter und minder wichtiger Formeln gleichsam versteckt, überdies in einer Bezeichnungsweise, durch welche ihre eigentliche Tragweite gänzlich verwischt wird, nämlich:

(3) $q(1-x)\cdot\varphi(\xi)=\{c+q-(a+b)qx\}\cdot\varphi(\xi+1)-(c-abqx)\cdot\varphi(\xi+2)$

(wo: $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$, $c=q^\gamma$, $x=q^\xi$ und $\varphi(\xi)$ soviel wie in der früheren Bezeichnung $\varphi(q^\xi)$ bedeutet). Ob Heine die in Frage kommenden, für die genauere Erkenntnis der vorliegenden Funktion grundlegenden Schlüsse aus der obigen Formel gezogen hat, mag dahingestellt bleiben: jedenfalls muß es auffällig erscheinen, daß er weder über diese Möglichkeit, noch über deren Resultat auch nur die leiseste Andeutung macht.

Da die betreffende Fundamentalformel bei Heine durch eine verhältnismäßig künstliche und weitläufige Rechnung gewonnen wird, so erscheint es vielleicht nicht ganz überflüssig, zu zeigen, daß sie in der denkbar einfachsten und logisch natürlichsten[2]) Weise durch passende Umformung des Produktes $(1-x)\cdot\varphi(x)$ sich ergibt. Dabei mag statt der Reihe $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ zunächst wieder die etwas allgemeinere:

$$\Phi(x)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q,x)=\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu\cdot x^\nu$$

[1]) A. a. O. Bd. I, p. 104, letzte Zeile.

[2]) Insofern ja aus der Natur der Reihe $\varphi(x)$ unmittelbar erkannt werden kann, daß die betreffende analytische Funktion auf dem Einheitskreise keine andere Singularität, als den einfachen Pol $x=1$ besitzt, sodaß man also für die weitere Untersuchung von $\varphi(x)$ unmittelbar auf diejenige von $(1-x)\cdot\varphi(x)$ geführt wird. Vgl. meine oben zitierte Abhandlung p. 29.

wo:

$$f_0 = 1$$

$$f_{\nu+1} = \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

zu Grunde gelegt werden. Man hat sodann[1]:

$$(1-x) \cdot \Phi(x) = 1 + \sum_0^\infty{}^\nu (f_{\nu+1} - f_\nu) \cdot x^{\nu+1}$$

und:

$$f_{\nu+1} - f_\nu = \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu}) - (1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu$$

$$= \frac{Q_\nu}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu q^\nu,$$

wo:

$$Q_\nu = q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu} - (q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu}).$$

Nun ist identisch

$$0 = (q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu})(q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu}) - (q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu})(q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu})$$

$$= (q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu})(q^{\alpha+\nu} + q^{\beta+\nu} - q^{\alpha+\beta+2\nu})$$

$$-(q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu})(q^{\gamma+\nu} + q^{\delta+\nu} - q^{\gamma+\delta+2\nu}).$$

Subtrahiert man diese Identität von Q_ν und beachtet, daß:

$$1 - q^{\alpha+\nu} - q^{\beta+\nu} + q^{\alpha+\beta+2\nu} = (1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})$$

$$1 - q^{\gamma+\nu} - q^{\delta+\nu} + q^{\gamma+\delta+2\nu} = (1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu}),$$

so folgt:

$$Q_\nu = (q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu})(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})$$

$$-(q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu})(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu}),$$

also:

$$f_{\nu+1} - f_\nu = (q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu}) \cdot f_{\nu+1} q^\nu - (q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu}) \cdot f_\nu q^\nu$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu (f_{\nu+1} - f_\nu) \cdot x^{\nu+1} = (q^{\gamma-1} + q^{\delta-1}) \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_{\nu+1} \cdot (qx)^{\nu+1} - (q^\alpha + q^\beta) x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_\nu (qx)^\nu$$

$$- q^{\gamma+\delta-2} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_{\nu+1} \cdot (q^2 x)^{\nu+1} - q^{\alpha+\beta} x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_\nu (q^2 \cdot x)^\nu$$

---

[1]) Vgl. a. a. O., p. 30.

und daher schließlich:

$$(1-x)\cdot\Phi(x) = 1 - q^{\gamma-1} - q^{\delta-1} + \{q^{\gamma-1} + q^{\delta-1} - (q^{\alpha} + q^{\beta})x\}\ \Phi(qx)$$
$$+ q^{\gamma+\delta-2} - (q^{\gamma+\delta-2} - q^{\alpha+\beta}x)\cdot\Phi(q^2x),$$

eine Gleichung, welche speziell für $\delta = 1$ in die gesuchte übergeht:

$$(1-x)\cdot\varphi(x) = \{1 + q^{\gamma-1} - (q^{\alpha} + q^{\beta})x\}\cdot\varphi(qx) - (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta}x)\cdot\varphi(q^2x).$$

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf die in der oben zitierten Abhandlung (p. 5) von mir gemachte Bemerkung zurückkommen, daß mir die von Herrn van Vleck gegebene Beweisführung des in Frage kommenden Hauptsatzes „nicht recht verständlich" erscheine. Herr van Vleck hat mir inzwischen mündlich und schriftlich ergänzende Erläuterungen mitgeteilt, welche geeignet sind, den in jenen Worten enthaltenen Zweifel zu beseitigen. Er wird die betreffenden Ausführungen demnächst in den Transactions of the American Mathematical Society veröffentlichen.

Schließlich sei hier noch ein ziemlich umfangreicher und sinnstörender Druckfehler berichtigt. Auf p. 34 der genannten Abhandlung findet sich unter (18) und (19) zweimal dieselbe Formel; als Formel (18) muß es statt dessen heißen:

$$(18)\quad (q^{\delta-1} - q^{\alpha}x)\cdot\Phi(\alpha,1,1,\delta,qx) = q^{\delta-1} + \frac{q^{\delta} - q^{\alpha}}{1-q^{\delta}}\cdot\Phi(\alpha,1,1,\delta+1,qx).$$