Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über einige Integralinvarianten, die bei Flächenabbildungen auftreten.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt von Herrn R. Baldus am 7. Juli 1944.

In einer im vorigen Jahr erschienenen Arbeit[1] wurden reelle singularitätenfreie Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(\bar{u}, \bar{v})$ des euklidischen Raumes, deren Punkte einander durch die Gleichungen $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ umkehrbar eindeutig zugeordnet waren, in den Umgebungen einzelner Paare entsprechender Punkte mit Hilfe von Differentialinvarianten gegenüber der Gruppe Γ der gemeinsamen Parametertransformationen der beiden Flächen, nämlich mittels der Funktionen

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u,$$
$$j = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u$$

untersucht. Da diese Invarianten das Gewicht 1 haben, sich also bei Änderung der Variabeln u und v ebenso transformieren wie der Integrand eines Doppelintegrales $\iint f(u, v)\, du dv$, so liegt der Gedanke nahe, aus ihnen Integralinvarianten gegenüber Γ zu bilden, die Paaren entsprechender Bereiche der beiden Flächen zugehören.

Dies soll im folgenden durchgeführt werden, und es sollen einige Eigenschaften der so gewonnenen Skalare und Vektoren entwickelt werden; dabei werden sich zugleich anschauliche Deutungen der früher eingeführten Differentialinvarianten ergeben.

1. Flächenvektor und Flächeninhalt.

Die Invariante $\mathfrak{j}_1(u, v)$ ermöglicht es, wie man weiß, zwei Integralinvarianten des dem beschränkten, meßbaren Be-

[1] Über Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen. Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., Jahrgang 1943, S. 217–237.

reich $\mathfrak{G}$ der u-v-Ebene entsprechenden Stückes $\mathfrak{B}_1$ der Fläche $\mathfrak{x}$ herzustellen,
den *Flächenvektor* dieses Flächenstückes [2]

$$(1) \qquad \mathfrak{F}_1 = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{j}_1 \, du dv$$

und, wenn noch ein beliebiger der beiden stetig von u und v abhängenden, gegenüber Γ absolut invarianten Einheitsvektoren $\mathfrak{c}_1$ von $\mathfrak{j}_1$, durch dessen Wahl man der Fläche $\mathfrak{x}$ eine bestimmte Orientierung aufprägt, herangezogen wird,
den *Flächeninhalt* von $\mathfrak{B}_1$

$$(1) \qquad F_1 = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{c}_1 \mathfrak{j}_1 \, du dv.$$

Unabhängig davon erhält man, ausgehend von $\mathfrak{j}_2$ und $\mathfrak{c}_2$ ($\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{j}_2 = 0$, $\mathfrak{c}_2^2 = 1$, $\mathfrak{c}_2$ stetig) den Flächenvektor und den Flächeninhalt des $\mathfrak{G}$ entsprechenden Stückes $\mathfrak{B}_2$ der Fläche $\mathfrak{y}$.

Im Hinblick auf später vorzunehmende Verallgemeinerungen wollen wir uns die Beziehungen in Erinnerung bringen, die zwischen diesen beiden Arten von Integralinvarianten bestehen:

a) Die Fläche $\mathfrak{x}$ werde auf die orientierte Ebene, deren Stellung durch den konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ gegeben ist und die durch den Bezugspunkt O geht, senkrecht projiziert; der Riß des Punktes $\mathfrak{x}$ hat den Ortsvektor

$$(2) \qquad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x} - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{x} \times \mathfrak{e}.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{e}\mathfrak{x}'_u\mathfrak{x}'_v = \mathfrak{e}\,(\mathfrak{x}_u - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{e})\;(\mathfrak{x}_v - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v,$$

d. h., wenn wir alle der Rißfläche zugehörigen Größen durch Striche bezeichnen,

$$(3) \qquad \mathfrak{e}\mathfrak{j}'_1 = \mathfrak{e}\mathfrak{j}_1,$$

mithin, weil der Vektor $\mathfrak{j}'_1$, der übrigens auch verschwinden kann, auf der Rißebene senkrecht steht,

$$(3') \qquad \mathfrak{j}'_1 = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{j}_1\mathfrak{e};$$

[2] Hierzu vergleiche man A. Lotze, Systeme geometrischer Analyse II, Enz. d. math. Wiss. III, 1, 2, S. 1535 u. S. 1536; dort ist namentlich auch auf das im folgenden auf S. 111 hergeleitete Randintegral (6) hingewiesen. Herr Lotze macht auch auf physikalische Deutungen aufmerksam.

also ist der Flächeninhalt des Risses $\mathfrak{B}_1'$ von $\mathfrak{B}_1$

$$F_1' = \mathfrak{e}\mathfrak{F}_1 \tag{4}$$

und sein Flächenvektor

$$\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{c}_1' F_1' = \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{F}_1\mathfrak{e}. \tag{4'}$$

Während, wie man aus diesen Ausdrücken ersieht, das Vorzeichen von F_1' von der Richtung von $\mathfrak{e}$, d. h. dem Drehsinn der Rißebene abhängt, ist die Richtung von $\mathfrak{F}_1'$ davon unabhängig, nämlich allein durch den Umlaufsinn des Randes von $\mathfrak{B}_1'$ oder auch von $\mathfrak{B}_1$ bestimmt.

Es gibt somit, falls $\mathfrak{F}_1 \neq 0$, zwei sich nur durch die Orientierung unterscheidende Stellungen der Rißebene, in die sich das Flächenstück $\mathfrak{B}_1$ mit extremen Flächeninhalten projiziert, nämlich die Stellungen senkrecht zu $\mathfrak{F}_1$; in die unendlich vielen zu $\mathfrak{F}_1$ parallelen Ebenen projiziert sich $\mathfrak{B}_1$ als Fläche vom Inhalt Null. Ist $\mathfrak{F}_1$ der Nullvektor, so hat die Projektion von $\mathfrak{B}_1$ in jeder Richtung verschwindenden Flächeninhalt. Allgemein gilt:

Der Flächenvektor des Risses eines Flächenstückes $\mathfrak{B}_1$ ist die in die Projektionsrichtung fallende Komponente des Flächenvektors von $\mathfrak{B}_1$.

b) Da für jeden Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ und jeden Vektor $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{v} \leqq |\mathfrak{v}| \qquad (\mathfrak{e} \text{ und } \mathfrak{v} \text{ reell})$$

ist, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\mathfrak{e}$ die gleiche Richtung wie $\mathfrak{v}$ hat, was speziell für $\mathfrak{v} = 0$ eintritt, so folgt, wenn $\mathfrak{v}$ eine stetige Funktion von u und v ist, durch Integration bei konstant gehaltenem $\mathfrak{e}$

$$\mathfrak{e}\iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{v}\, du\, dv \leqq \iint_{\mathfrak{G}} |\mathfrak{v}|\, du\, dv;$$

gibt man $\mathfrak{e}$ die Richtung des links stehenden Integrals, so erhält man

$$\left|\iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{v}\, du\, dv\right| \leqq \iint_{\mathfrak{G}} |\mathfrak{v}|\, du\, dv. \tag{5}$$

Die Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{v}$ eine konstante Richtung hat.

Wir wenden die Ungleichung auf $\mathfrak{v} = \mathfrak{j}_1$ an; das Gleichheitszeichen gilt dann für ebene Flächen $\mathfrak{x}$ mit einfachem Rand. Man erkennt auf Grund der additiven Eigenschaft des Integrals:

Wenn das Flächenstück $\mathfrak{B}_1$ auf irgendeine Weise in Teile $\mathfrak{B}_{1k}$ zerlegt wird, für die die Flächenvektoren existieren, so wird das Integral $\iint_{\mathfrak{G}} |\mathfrak{j}_1|\, du\, dv$, die „Oberfläche" von $\mathfrak{B}_1$, stets größer als die Summe der Beträge der Flächenvektoren der Teile oder allenfalls ihr gleich. Aus der Stetigkeit der Funktion $\mathfrak{c}_1(u, v)$ folgt nun, daß sich die Einheitsvektoren der Vektoren $\mathfrak{j}_1$ in jedem genügend kleinen Teilbereich $\mathfrak{B}_{1k}$ von $\mathfrak{B}_1$ untereinander und daher auch vom Einheitsvektor $\mathfrak{e}_k$ ihres Integrales, des Flächenvektors dieses Teilbereichs, beliebig wenig, d. h. um einen beliebig kleinen Vektor $\mathfrak{o}$ unterscheiden; daher kann man für je zwei Punkte des Teilstückes die Differenz zwischen $|\mathfrak{j}_1|$ und $|\mathfrak{e}_k \mathfrak{j}_1|$ und daher auch den Unterschied zwischen den über den Teilbereich $\mathfrak{B}_{1k}$ erstreckten Integralen $\iint |\mathfrak{j}_1|\, du\, dv$ und $\iint |\mathfrak{e}_k \mathfrak{j}_1|\, du\, dv = |\iint \mathfrak{j}_1\, du\, dv|$ relativ zur Oberfläche dieses Teilbereiches beliebig klein machen. Da nach dem Heine-Borelschen Satz diese beliebig starke relative Annäherung stets mit einer endlichen Anzahl von Teilen $\mathfrak{B}_{1k}$ erreicht werden kann,[3] sofern nur $\mathfrak{G}$ und somit auch $\mathfrak{B}_1$ als abgeschlossener Bereich angenommen war, so bedeutet dies:

Die Oberfläche eines Flächenstückes ist die obere Grenze für die Summe der Beträge der Flächenvektoren seiner bei beliebiger Unterteilung sich ergebenden Teile.[4]

---

[3] Man vergleiche Fußnote 5.

[4] Selbstverständlich sind in dieser Aussage nur Zerlegungen in solche Teile gemeint, für die die Doppelintegrale existieren. — Für die Summe der Seitenflächen der einbeschriebenen Polyeder des Flächenstückes gilt bekanntlich der Lehrsatz des Textes nicht, wie wohl als erster O. Hölder 1882 bemerkt hat, aber erst durch H. A. Schwarz allgemeiner bekannt wurde. Wir haben oben das natürliche Seitenstück zu dem Satze vor uns, daß die Bogenlänge einer Raumkurve die obere Grenze für die Gesamtlängen der ihr eingeschriebenen Sehnenzüge ist, wobei unter der Bogenlänge das Integral $\int |d\mathfrak{r}|$ zu verstehen ist, in dem $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor der Kurve bedeutet; das Analogon des Flächenvektors ist nämlich bei der Raumkurve der Sehnenvektor $\int d\mathfrak{r}$, das des Flächeninhalts die Länge $\int \mathfrak{t}\, d\mathfrak{r}$, wo die stetige Funktion $\mathfrak{t}$ einen der beiden berührenden Einheitsvektoren bedeutet. — Während es bei den Raumkurven möglich ist, die Bogenlänge als obere Grenze der Umfänge der einbeschrie-

Bei einem überall regulären Flächenstück kann $\mathfrak{c}_1$ durchweg mit der Richtung von $\mathfrak{j}_1$ festgesetzt werden, so daß $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{j}_1 > 0$ wird; dann ist die Oberfläche gleich dem Flächeninhalt.

c) Der am Schluß des Abschnittes 1, a stehende Satz veranlaßt uns zu folgender Überlegung: Der Flächeninhalt des Risses $\mathfrak{B}_1'$ ist nur von der Randkurve von $\mathfrak{B}_1$ abhängig, nicht von der Form der eingespannten Fläche; da also für jede Richtung $\mathfrak{e}$ die Komponente von $\mathfrak{F}_1$ nach $\mathfrak{e}$ durch den Rand b_1 von $\mathfrak{B}_1$ allein bestimmt ist, so schließen wir, daß $\mathfrak{F}_1$ schon durch die Kurve b_1 allein festgelegt ist, also das Flächenintegral über $\mathfrak{j}_1$ sich als Randintegral ausdrücken lassen muß. Dieses erhalten wir am einfachsten, wenn wir den Flächenvektor für den durch die Punkte $\mathfrak{x}(s)$ der als stetig nach s differenzierbar angenommenen Kurve b_1 gelegten Kegel mit der Spitze O berechnen, der sich mit Hilfe der beiden Parameter t und s folgendermaßen darstellen läßt:

$$\mathfrak{r} = t\,\mathfrak{x}(s) \qquad (0 \leqq t \leqq 1);$$

wegen $\mathfrak{r}_t = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{r}_s = t\,\mathfrak{x}_s$ ergibt sich, wenn s die Bogenlänge der Randlinie b_1 und l ihren Umfang bedeutet:[5]

$$(6) \quad \mathfrak{F}_1 = \int\limits_{t=0}^{1}\int\limits_{s=0}^{l} \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_s t\, dt\, ds = {}^1\!/_2 \int\limits_0^l \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_s ds = {}^1\!/_2 \int\limits_{b_1} \mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}.$$

benen Polygone auch in gewissen Fällen noch zu definieren, in denen die Kurve nicht den Differenzierbarkeitsanforderungen genügt, die in der Differentialgeometrie gestellt werden müssen, scheint ein entsprechendes Vorgehen bei den Flächen nicht so einfach durchführbar zu sein.

[5] Soll der im Text nur in seinen einfachen Grundgedanken skizzierte Beweis in allen seinen Einzelheiten durchgeführt werden, so ist zunächst nicht nur die Kegelspitze als singulärer Punkt ebenso wie ihr Riß durch eine beliebig kleine Kugel, deren Radius man dann gegen 0 konvergieren läßt, und den Riß ihrer Schnittkurve mit dem Kegel von der Integration auszuschließen, sondern es muß vor allem auch vorausgesetzt werden, daß b_1 ein Flächenstück umgrenzt, das in drei nicht komplanaren, nirgends die Fläche berührenden Richtungen so projiziert werden kann, daß die Beziehung zwischen Fläche und Rißebene umkehrbar eindeutig ist. Bei jedem regulären Flächenstück $\mathfrak{B}_1$ läßt sich um jeden Punkt eine Umgebung angeben, für die das möglich ist. Nach dem Heine-Borelschen Theorem kann $\mathfrak{B}_1$, wenn $\mathfrak{G}$ ein abgeschlossener Bereich ist, in eine endliche Anzahl solcher Flächenstücke zerlegt werden; in deren übereinandergreifenden Teilen lassen sich schließlich Trennungslinien ziehen, für die die Kurvenintegrale existieren. Diese heben sich längs gemeinsamer Randstücke gegenseitig auf.

2. Spreizvektor, Spreizwert und Schiefe.

Die mehr oder weniger bekannten Tatsachen, die auf den vorhergehenden Seiten zusammengestellt wurden, regen zu dem Versuch an, ähnlich aus den Funktionen $\mathfrak{j}$ und j aufgebaute Integralinvarianten zu untersuchen, nämlich

den *Spreizvektor* des dem Integrationsbereich $\mathfrak{G}$ entsprechenden Paares von Flächenstücken $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$

$$(7) \qquad \mathfrak{E} = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{j} \; du\,dv,$$

und unter Zuhilfenahme eines beliebigen der stetigen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}(u, v)$ von $\mathfrak{j}$, für die also $\mathfrak{e}^2 = 1$ und $\mathfrak{e} \times \mathfrak{j} = 0$, folglich $\mathfrak{j} = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{j}\,\mathfrak{e}$ und $(\mathfrak{e}\mathfrak{j})^2 = \mathfrak{j}^2$ gilt,

den *Spreizwert* des Paares $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$

$$(7') \qquad E = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{e}\mathfrak{j} \; du\,dv;$$

ferner führen wir noch ein

die *Schiefe* des Paares der Flächenstücke

$$(8) \qquad G = \iint_{\mathfrak{G}} j \; du\,dv.$$

Die hier vorgeschlagenen Benennungen sollen später (in Nr. 4) gerechtfertigt werden.

Durch die Entscheidung für eine der beiden Vektorfunktionen $\mathfrak{e}$ ist, wie wir sagen können, die Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ orientiert; ist $\mathfrak{j} \equiv 0$, so sei $\mathfrak{e}$ eine willkürliche Einheitsvektorfunktion.

Wenn $\mathfrak{x}(u, v) \equiv \mathfrak{y}(u, v)$ ist, d. h. je zwei entsprechende Punkte der Flächen sich decken, gehen Spreizvektor und Spreizwert in den doppelten Flächenvektor und den doppelten Flächeninhalt über, die Schiefe aber verschwindet.

a) Werden die beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auf eine und dieselbe Ebene durch O senkrecht projiziert, und zwar in der Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{e}$, so ergibt sich für die Ortsvektoren der Risse

$$(2') \qquad \mathfrak{x}' = \mathfrak{e} \times \mathfrak{x} \times \mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{y}' = \mathfrak{e} \times \mathfrak{y} \times \mathfrak{e}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}\,(\mathfrak{x}'_u \times \mathfrak{y}'_v - \mathfrak{x}'_v \times \mathfrak{y}'_u) = \\ &\mathfrak{e}\,(\mathfrak{x}_u - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_u \mathfrak{e})\,(\mathfrak{y}_v - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{y}_v \mathfrak{e}) - \mathfrak{e}\,(\mathfrak{x}_v - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_v \mathfrak{e})\,(\mathfrak{y}_u - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{y}_u \mathfrak{e}) \\ &\qquad = \mathfrak{e}\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) \end{aligned}$$

oder

$$(9) \qquad \mathfrak{e}\mathfrak{j}' = \mathfrak{e}\mathfrak{j},$$

folglich, weil $\mathfrak{j}'$ zur Rißebene senkrecht sein muß,

$$(9') \qquad \mathfrak{j}' = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{j}\mathfrak{e}.$$

Demnach wird der Spreizwert und der Spreizvektor des Paares der Rißflächen $\mathfrak{x}' \to \mathfrak{y}'$

$$E' = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{e}\mathfrak{j}'\, du\, dv = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{e}\mathfrak{j}\, du\, dv,$$

d. h.

$$(10) \qquad E' = \mathfrak{e}\mathfrak{E},$$

und

$$(10') \qquad \mathfrak{E}' = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{e}.$$

Dies zeigt, daß es, falls $\mathfrak{E} \neq 0$ ist, zwei nur im Drehsinn verschiedene Stellungen der Rißebene gibt, für die der Spreizwert des Rißpaares eine extreme Größe besitzt, nämlich die senkrecht zu $\mathfrak{E}$, und unendlich viele Projektionsrichtungen, für die der Spreizwert der Risse verschwindet, nämlich die senkrecht zu $\mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{E} = 0$, so ist der Spreizwert des Rißpaares für jede Projektionsrichtung null; dies gilt speziell für jedes Paar von entsprechenden Stücken relativer Minimalflächen, da für solche $\mathfrak{j} = 0$, also stets $\mathfrak{E} = 0$ ist. Nach (10) und (10′) gilt:

$$|\mathfrak{E}'| = |E'|.$$

Bei schräger Parallelprojektion des Flächenpaares in der Richtung $\mathfrak{e}$ auf eine Ebene mit dem Normalvektor $\mathfrak{e}'$ ($\mathfrak{e}'^2 = 1$) wird demnach der Spreizvektor $\overline{\mathfrak{E}}$ ein Vektor senkrecht zu dieser Ebene, dessen Komponente in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Größe $\mathfrak{e}\mathfrak{E}$ hat, also $\overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{e}' \cdot \dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}'\mathfrak{e}}$; der Spreizwert wird also dann $\overline{E} = \dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}'\mathfrak{e}}$.

b) Die Ungleichung (5) auf S. 109 liefert für $\mathfrak{v} = \mathfrak{j}$

$$(5') \qquad |\mathfrak{E}| \leqq \iint_{\mathfrak{G}} |\mathfrak{j}|\, du\, dv;$$

dabei findet die Gleichheit dann und nur dann statt, wenn $\mathfrak{j}$ konstante Richtung hat. Hieraus ergibt sich folgendes:

Wenn der Bereich $\mathfrak{G}$ irgendwie unterteilt wird, derart, daß für jeden der Teilbereiche der Spreizvektor existiert, so wird der

„Spreizbetrag" $\iint_{\mathfrak{S}} |\mathfrak{j}|\, du\,dv$ nie kleiner sein können als die Summe der Beträge der Spreizvektoren der den Teilbereichen entsprechenden Paare von Flächenstücken. Macht man aber die Teile nur genügend klein, so werden sich wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{c}(u, v)$ diese Vektorenbeträge den Teilintegralen $\iint |\mathfrak{j}|\, du\,dv$ beliebig annähern, und zwar relativ. Daraus ist, wieder unter Beiziehung des Heine-Borelschen Satzes, zu folgern:

Der Spreizbetrag eines Paares von Flächenstücken ist die obere Grenze der Summe der Beträge der Spreizvektoren der irgendeiner Unterteilung von $\mathfrak{S}$ entsprechenden Flächenstückpaare.

Man bemerke, daß immer dann, wenn $\mathfrak{j}$ in $\mathfrak{S}$ nirgends verschwindet, wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{j}$ die Richtung von $\mathfrak{c}$ überall übereinstimmend mit der von $\mathfrak{j}$ festgelegt werden kann, so daß $\mathfrak{j}\mathfrak{c} = |\mathfrak{j}| = \sqrt{\mathfrak{j}^2}$ wird; dann ist also der Spreizbetrag einfach gleich dem Spreizwert:

$$(11 \qquad \iint_{\mathfrak{S}} \mathfrak{j}\,\mathfrak{c}\, du\,dv = \iint_{\mathfrak{S}} \sqrt{\mathfrak{j}^2}\, du\,dv,$$

wo sich der Radikand in folgender Weise durch die zehn Fundamentalgrößen 1. O. des Flächenpaares[6] ausdrückt:

$$\mathfrak{j}^2 = \mathfrak{x}_u^2 \cdot \mathfrak{y}_v^2 - 2\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v^2 \cdot \mathfrak{y}_u^2 + 2\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v - (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v)^2 - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u)^2.$$

c) Kann man auch eine Beziehung zwischen den Schiefen eines Paares von Flächenstücken und des Paares ihrer Risse in der Ebene $\mathfrak{e}$ aufstellen?

Nach (2′) ergibt sich

$$j' = \mathfrak{x}_u'\mathfrak{y}_v' - \mathfrak{x}_v'\mathfrak{y}_u' =$$
$$(\mathfrak{x}_u - \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{e})(\mathfrak{y}_v - \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{y}_v\mathfrak{e}) - (\mathfrak{x}_v - \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{x}_v\mathfrak{e})(\mathfrak{y}_u - \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{y}_u\mathfrak{e})$$
$$= j - \mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_u\cdot\mathfrak{y}_v\mathfrak{e} + \mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{y}_u\mathfrak{e};$$

dies kann man mit Hilfe des Affinors

$$(12) \qquad \iota = \mathfrak{x}_u\cdot\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{y}_u,$$

einer dyadischen Differentialinvariante gegenüber Γ vom Gewicht 1, so ausdrücken:

$$(13) \qquad j' = j - \mathfrak{e}\,\iota\,\mathfrak{e}.$$

[6] Vgl. Math. Zeitschr. 49 (1943) S. 428.

Demgemäß ist die Schiefe des Rißpaares, wenn die *dyadische Integralinvariante* des Paares der Flächenstücke $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$

$$\iint_{\mathfrak{S}} \iota \, du dv = \mathrm{H} \tag{12'}$$

gesetzt wird,

$$G' = G - \mathfrak{e} \, \mathrm{H} \, \mathfrak{e}. \tag{13'}$$

Die Beziehung (13) läßt erkennen, daß für jede zu einer der Flächen $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) normale Richtung $\mathfrak{e}$ im besonderen

$$j' = j$$

wird, da ersichtlich für $\mathfrak{e} \perp \mathfrak{x}$ $\quad \mathfrak{e}\iota = 0$, für $\mathfrak{e} \perp \mathfrak{y}$ $\quad \iota\mathfrak{e} = 0$ ist.

Während ι nach (12) stets eine unvollständige Dyade ist, wird H im allgemeinen vollständig sein.[7]

3. Integralbeziehungen.

Man wird sich fragen, ob der Spreizvektor und die Schiefe sich wie der Flächenvektor durch Linienintegrale ausdrücken lassen. Die Schlußweise, die bei diesem im Abschnitt 1, c angewandt wurde, versagt hier aber, weil wir nicht von vornherein wissen, ob der Spreizvektor eines Paares von Flächenstücken einer Ebene nur von ihren, in bestimmter Weise aufeinander bezogenen Rändern abhängt und nicht auch von der wechselseitigen Zuordnung der inneren Punkte; dasselbe gilt von der Schiefe. Wir können aber versuchen, den verallgemeinerten Gauß-Stokesschen Integralsatz für die Ebene anzuwenden, der lautet:

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v} \right) du dv = \int_b (\mathfrak{U} \, du + \mathfrak{V} \, dv),$$

wo b die im positiven Sinn durchlaufene Randlinie des einfach

---

[7] Den Beweis für diese Behauptung liefert das Beispiel der beiden Paraboloide $\mathfrak{x} = u\mathfrak{e}_1 + v\mathfrak{e}_2 + 2uv\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{y} = u\mathfrak{e}_1 + v\mathfrak{e}_2 + (u^2 + v^2)\,\mathfrak{e}_3$, wo $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ untereinander senkrechte Einheitsvektoren bedeuten; zum Integrationsbereich $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$ gehört dann der Affinor $\mathrm{H} = 2\big((\mathfrak{e}_1 + 2\mathfrak{e}_3)\cdot(\mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_3) - (\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3)\cdot(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_3) + \mathfrak{e}_3\cdot\mathfrak{e}_3\big)$, dessen drei linke Vektoren und dessen drei rechte Vektoren je ein nicht verschwindendes dreifaches Produkt haben, woraus folgt, daß H eine komplette Dyade ist.

zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{G}$ der u-v-Ebene und $\mathfrak{U}(u, v)$ und $\mathfrak{V}(u, v)$ stetig differenzierbare Funktionen irgend welcher, aber gleicher Art, d. h. entweder Skalare oder Vektoren oder auch Affinoren bedeuten. Mit

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_u \text{ und } \mathfrak{V} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_v$$

ergibt sich

$$\mathfrak{U}_v = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_{uv} + \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u \text{ und } \mathfrak{V}_u = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_{vu} + \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v,$$

wenn wir voraussetzen, daß $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ gemischte Ableitungen 2. O. besitzen; setzen wir weiter voraus, daß diese stetig sind, so erhalten wir

$$\iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{i}\, du\, dv = \int_b \mathfrak{x} \times (\mathfrak{y}_u\, du + \mathfrak{y}_v\, dv) = \int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{x} \times d\mathfrak{y},$$

folglich, da

$$d(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = \mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} + d\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} \text{ und } \int_{b_1 \to b_2} d(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = 0$$

ist,

$$\mathfrak{E} = \int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} = \int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} = {}^1/_2 \int_{b_1 \to b_2} (\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}). \tag{14}$$

Nach diesem Verfahren könnte auch die Formel (6) bewiesen werden; jedoch ist zu beachten, daß dann höhere Differenzierbarkeitsanforderungen an die Funktion $\mathfrak{x}$ gestellt werden müßten, als es im Abschnitt 1 nötig war.

Auf die gleiche Weise finden wir, wenn wir überall skalare oder dyadische Produkte statt vektorieller bilden,

$$G = \int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = -\int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} = {}^1/_2 \int_{b_1 \to b_2} (\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}), \tag{15}$$

$$\mathrm{H} = \int_{b_1 \to b_2} \mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} = -\int_{b_1 \to b_2} d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = {}^1/_2 \int_{b_1 \to b_2} (\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}). \tag{16}$$

Diese Integralformeln enthalten den Lehrsatz:

Der Spreizvektor und die Schiefe eines Paares von Flächenstücken hängen nur von deren Rändern und ihrer gegenseitigen Zuordnung ab, nicht aber von der Art des wechselseitigen Entsprechens der in sie eingespannten Flächen, ja nicht einmal von deren Form.

Ferner zeigt sich:

Paare geschlossener zweiseitiger Flächen, die umkehrbar eindeutig und überall regulär aufeinander abgebildet sind, haben verschwindenden Spreizvektor und verschwindende Schiefe.

Deuten wir $\mathfrak{y}\,(u, v)$ als Kraft, die auf den Punkt $\mathfrak{x}\,(u, v)$ wirkt, so erkennen wir aus (15) G als die *Arbeit*, die beim Umfahren der Randlinie der Fläche $\mathfrak{x}$ zu leisten ist; die Bedingung dafür, daß das System der Kräfte $\mathfrak{y}$ konservativ sei, ist also, daß die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ an jeder Stelle verschwindende Schiefe hat: $j \equiv 0$.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ *Stücke von Ebenen gleicher Stellung* $\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{e}^2 = 1$), und führen wir in diesen rechtwinklige kartesische Koordinaten x, y und x', y' mit gleichgerichteten Abszissen- und gleichgerichteten Ordinatenachsen ein, so erhält man aus (14) eine Verallgemeinerung der Leibnizschen Formel für den Inhalt F_1 eines geschlossenen ebenen Flächenstückes, $2F_1 = \int_b (x\,dy - y\,dx)$:

$$(14') \qquad E = \int_{b_1 \to b_2} (x\,dy' - y\,dx').$$

Aus (15) entsteht die Gleichung

$$(15') \qquad G = \int_{b_1 \to b_2} (x\,dx' + y\,dy').$$

Die Integralformeln (14) bis (16) wollen wir anwenden, um auf kürzestem Wege die Betrachtungen in Abschnitt 2, c zu verallgemeinern:

Die beiden *Flächenstücke* $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mögen in verschiedenen, durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gegebenen Richtungen auf zwei durch O gelegte *Ebenen senkrecht projiziert* werden; dann wird für die Rißflächen, deren Ortsvektoren

$$(2') \qquad \mathfrak{x}' = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{x} \times \mathfrak{e}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{y} \times \mathfrak{e}_2$$

sind, wenn mit $\circ$ irgend eine distributive Verknüpfung bezeichnet wird,

$$\int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x}' \circ d\mathfrak{y}' = \int\limits_{b_1\to b_2} (\mathfrak{x} - \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{e}_1) \circ (d\mathfrak{y} - \mathfrak{e}_2 \cdot d\mathfrak{y}\mathfrak{e}_2)$$

$$= \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x} \circ d\mathfrak{y} - \mathfrak{e}_1 \circ \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x}\mathfrak{e}_1 \cdot d\mathfrak{y} - \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y}\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 \cdot \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y}\mathfrak{e}_2,$$

also

$$\int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x}' \circ d\mathfrak{y}' = \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{x} \circ d\mathfrak{y} - \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_1 \mathrm{H} - \mathrm{H}\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathrm{H}\mathfrak{e}_2.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir nacheinander die hier angewandte allgemeine Multiplikation durch die vektorielle, die skalare und die dyadische ersetzen:

(17) $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \mathfrak{e}_1 \mathrm{H} \times \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 \times \mathrm{H}\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathrm{H}\mathfrak{e}_2,$

(18) $G' = G - \mathfrak{e}_1 \mathrm{H}\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 \mathrm{H}\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathrm{H}\mathfrak{e}_2,$

(19) $\mathrm{H}' = \mathrm{H} - \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathrm{H} - \mathrm{H}\mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathrm{H}\mathfrak{e}_2.$

Aus (19) folgt:

$$\mathfrak{e}_1 \mathrm{H}' = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{H}'\mathfrak{e}_2 = 0.$$

Für $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}$ geht, da

$$\mathrm{H}\mathfrak{e} - \mathfrak{e}\mathrm{H} = \int\limits_{b_1\to b_2} (\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y}\mathfrak{e} - \mathfrak{e}\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y}) = \int\limits_{b_1\to b_2} \mathfrak{e} \times (\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}) = \mathfrak{e} \times \mathfrak{E}$$

ist, (17) in (10′) über, wie es sein muß; unter derselben Voraussetzung wird aus (18) ohne weiteres (13′), während wir nach (19) erhalten:

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} - \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}\mathrm{H} - \mathrm{H}\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}\mathrm{H}\mathfrak{e}.$$

In (17) bis (19) darf $\mathfrak{E}$, G, H durch $\mathfrak{j}$, j, ι ersetzt werden.

4. Anschauliche Deutungen.

Beim Aufbau der Differentialgeomertie sollte man sich folgerecht auf den Standpunkt stellen, daß der Flächeninhalt eines gewölbten Flächenstückes[8] durch das Integral (1′) zu definieren sei; man muß dann nachweisen, daß diese Definition dem Hankelschen Permanenzprinzip Genüge leistet, d. h. den Begriff des

[8] Herr S. Finsterwalder schlägt bei Flächen den Ausdruck „Wölbung“ statt Krümmung vor, so daß also von der „mittleren Wölbung“ und dem „Wölbungsmaß“ zu sprechen wäre.

Inhaltes eines ebenen, geradlinig begrenzten Flächenstücks im elementargeometrischen Sinn umfaßt. Unter einem ähnlichen Gesichtspunkt wollen wir die anschaulich geometrische Bedeutung der im Abschnitt 2 eingeführten Integralinvarianten dadurch zu erkennen suchen, daß wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als Ebenen annehmen, auf denen u und v allgemeine kartesische Koordinaten bedeuten, so daß sie dadurch affin aufeinander bezogen werden; wir können also, wenn wir die Ebenen so lagern, daß ein Paar entsprechender Punkte in O fällt, folgende Darstellung zugrunde legen:

$$\mathfrak{x} = u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{y} = u\mathfrak{a}' + v\mathfrak{b}', \tag{20}$$

wo die konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ allgemein nur den Bedingungen unterliegen:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq 0, \quad \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}' \neq 0.$$

Wegen

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{y}_u = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{y}_v = \mathfrak{b}'$$

wird

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}' - \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}', \quad j = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}. \tag{20'}$$

Wenn wir das Quadrat, das in der u-v-Ebene zwischen den Geraden $u = 0$, $v = 0$, $u = 1$, $v = 1$ liegt, als Integrationsbereich $\mathfrak{G}$ wählen, so finden wir

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{j}_1, \quad \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{j}_2, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{j}, \quad G = j; \tag{20''}$$

je nach der uns noch freistehenden Wahl des Einheitsvektors $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{E}$ ist

$$E = \pm |\mathfrak{E}|.$$

A. Spreizwirkung einer Affinität.

Wir müssen verschiedene Fälle gesondert behandeln:

a) Die Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien einander nicht parallel:

$$(\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0).$$

Wir wollen dann ihre Schnittgerade in beiden Ebenen als Koordinatenachse verwenden.

α) Die Schnittgerade von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ entspreche sich nicht selbst:[9]

$$(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j} \neq 0).$$

Ein Beispiel für diesen Fall erhalten wir, wenn wir setzen:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}.$$

Es wird dann wegen $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b} = 0$

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{E} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}'.$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'$ die beiden Vektoren sind, die vermöge der Affinitäten $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ dem in die Schnittgerade fallenden Vektor $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$ entsprechen – genauer gilt vermöge $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ und vermöge $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ $\mathfrak{b}' \to \mathfrak{b}$ –, so kann der Vektor oder, besser, die Plangröße $\mathfrak{E}$ als kennzeichnend für eine „spreizende“ Wirkung der Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ angesehen werden; natürlich muß man, um diese Wirkung auf Grund von Länge und Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ beurteilen zu können, die Größen und Stellungen der von den Vektorenpaaren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ aufgespannten Parallelogramme, d. h. die Flächenvektoren $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mit berücksichtigen. Da, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (nicht komplanar mit $\mathfrak{E}$) gegeben sind, die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'$, wie wir sogleich genauer sehen werden, durch $\mathfrak{E}$ bestimmt sind, so dürften damit, wenigstens für den bis jetzt betrachteten Fall, die Benennungen „Spreizvektor des Paares der Flächenstücke $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$“ für $\mathfrak{E}$ und „Spreizwert von $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$“ für E gerechtfertigt sein.

Erfassen wir aber alle zwischen zwei nicht parallelen Ebenen möglichen Affinitäten, bei denen sich die Schnittgerade nicht selbst entspricht, mit der oben gemachten Annahme $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$? Um die Antwort auf diese Frage zu finden, knüpfen wir an die bei früherer Gelegenheit[10] schon gegebene Darstellung der af-

---

[9] Siehe S. 223 f. der in Fußnote 1 angeführten Arbeit (die von jetzt an kurz mit 1 bezeichnet werde).

[10] Siehe 1 S. 222, (8a) und (8b). Aus den dort angestellten Überlegungen geht auch hervor, daß, wenn $\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \neq 0$, die Vektoren $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{E}$ die Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ eindeutig festlegen; dies kann man aber auch leicht dadurch bestätigen, daß man wie im Text $\mathfrak{a} = \zeta\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{b} = \zeta\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ annimmt, für $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ aber zunächst Linearkombinationen von $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}_2$ ansetzt, deren Koeffizienten sich dann aus den Forderungen (20′) und (20″) eindeutig so, wie oben (auf der nächsten Seite) angegeben, bestimmen lassen. $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ und j genügen einer Identität (vgl. 1, Gl. (9). S. 222).

finen Beziehung zwischen den Umgebungen entsprechender Punkte eines Flächenpaares durch die Invarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ an: Ist nicht nur die Affinität zwischen den Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben, sondern sind sogar die Vektoren $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{E}$ – und zwar, abgesehen von der einzigen einschränkenden Bedingung $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{E} \neq 0$, beliebig – vorgegeben, so entspricht

$$\text{dem Vektor } \mathfrak{a} = \zeta\,\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{E} \text{ der Vektor } \mathfrak{a}' = \zeta\,\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2,$$
$$\text{dem Vektor } \mathfrak{b} = \zeta\,\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2 \text{ der Vektor } \mathfrak{b}' = \zeta\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}_2;$$

in der Tat finden wir durch Anwendung der Zerlegungsformel der Vektorrechnung

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = -\zeta^2\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdot\mathfrak{F}_1, \qquad \mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}' = -\zeta^2\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdot\mathfrak{F}_2,$$
$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}' = -\zeta^2\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdot\mathfrak{E},$$

und wir brauchen nur

$$\zeta = 1 : \sqrt{-\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}$$

zu setzen, um zu erreichen, daß die Beziehungen (20′) und (20″) erfüllt werden. Dabei ist folgendes zu bedenken: Wenn wir wünschen, daß $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$ wird, so m ü s s e n wir den obigen Ansatz machen; die beiden Vorzeichenwahlen aber, die bei ζ getroffen werden können, führen zu derselben affinen Abbildung der Ebene $\mathfrak{x}$ auf die Ebene $\mathfrak{y}$. ζ wird jedoch nur dann reell, wenn $\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 < 0$ ist. Wollen wir aber auch dann, wenn $\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 > 0$ ist, reelle Vektoren $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}'$ bekommen, so brauchen wir nur die Bezeichnungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ untereinander zu vertauschen und als Folge davon auch die Bezeichnungen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$; es wird dann

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}',$$

und wir erhalten die Vektoren $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}'$ mit umgekehrtem Vorzeichen wie oben, so daß mit

$$\zeta = 1 : \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}$$

die Gleichungen (20′) und (20″) erfüllt werden. – Einen wesentlichen Unterschied gegenüber dem zuerst ausführlich betrachteten Fall $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$ bietet der Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}'$ nicht.

Soll die einer Abbildung zukommende Spreizwirkung an sich gekennzeichnet werden, so werden wir etwa vereinbaren, den Integrationsbereich $\mathfrak{G}$ so anzunehmen, daß der Betrag der Plangröße $\mathfrak{F}_1$ gleich der Einheit wird; da das gleiche Ergebnis durch Division der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ durch eine der Quadratwurzeln aus $|\mathfrak{F}_1|$ erreicht wird, weil sich dabei die Invarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$, j oder auch $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{E}$, G im Maßstab $1 : |\mathfrak{F}_1|$ ändern, so wird füglich, je nach der Wahl von $\mathfrak{c}_1$, $\pm\,\mathfrak{E} : |\mathfrak{F}_1|$ als „Spreizvektor der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$" schlechthin bezeichnet werden dürfen. Wollen wir dies auf die affine Beziehung zwischen den Berührebenen zweier regulär aufeinander abgebildeter, gewölbter Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in entsprechenden Punkten anwenden, die von dieser Abbildung induziert wird, so müssen wir den Vektor $\mathfrak{j}$ durch $W = \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{j}_1 = \pm\,|\mathfrak{j}_1|$ dividieren; so werden wir dazu geführt,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{j} : W \tag{21}$$

als *Spreizvektor* der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ im Punktepaar $(u,\ v)$ zu erklären.

β) Die Schnittgerade von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ entspreche sich selbst:[11]

$$(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j} = 0).$$

Es kann dann jedenfalls

$$\mathfrak{a}' = \lambda\,\mathfrak{a}$$

angenommen werden; wegen $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}') \neq 0$ (s. S. 119) wird $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \neq 0$ und $\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \neq 0$, also

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \lambda\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^2 \neq 0.$$

In diesem Fall können wir sagen, daß die Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ keine „entfaltende" Wirkung mehr habe wie im Fall α), da sie die der Schnittgeraden parallelen Vektoren nicht aus ihrer Richtung herausschwenkt; wir könnten demgemäß den hier verschwindenden Skalar $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}$ zur Bildung eines Maßes der „*Entfaltung*" heranziehen, zu welchem Zweck er nur durch eine skalare Differentialinvariante vom Gewicht 3 dividiert werden müßte, also etwa durch W^3. Eine „spreizende" Wirkung aber

---

[11] Siehe 1 S. 223 f.

können wir auch jetzt noch darin sehen, daß jeder Vektor $\mathfrak{s}$, der in die Schnittgerade fällt, in einen zu ihm zwar parallelen, aber im allgemeinen von ihm in der Länge, unter Umständen auch in der Richtung verschiedenen Vektor $\lambda\,\mathfrak{s}$ übergeht; der diese Wirkung kennzeichnende Skalar λ wird aber durch $\mathfrak{E}$ festgelegt, und umgekehrt $\mathfrak{E}$ durch ihn, weil ersichtlich gemäß (20″) und (20′) gilt:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F}_1 \cdot \lambda + \mathfrak{F}_2 : \lambda. \tag{22}$$

Auch hier erscheinen also die Benennungen „Spreizvektor" für $\mathfrak{E}$ und „Spreizwert" für E als begründet.

Und auch hier wird man in dem allgemeinen Falle gewölbter Flächen $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ die absolute Differentialinvariante $\mathfrak{J} = \mathfrak{j} : W$ als Spreizvektor der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) bezeichnen dürfen.

b) Die Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien parallel:

$$(\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0).$$

α) Besitzt die Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ auf demselben Träger genau zwei getrennte Fixrichtungen, so wählen wir die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in diese fallend ($\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq 0$) und erhalten

$$\mathfrak{a}' = \mu_1 \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{b}' = \mu_2 \mathfrak{b},$$

wo μ_1 und μ_2 die linearen Abbildungsmaßstäbe für die Fixrichtungen bedeuten; es ist $\mu_1 \mu_2 \neq 0$, ferner $\mu_1 \neq \mu_2$, weil sonst jede Richtung fix wäre.

Gemäß (20′) und (20″) wird

$$\mathfrak{F}_2 = \mu_1 \mu_2 \mathfrak{F}_1, \qquad \mathfrak{E} = (\mu_1 + \mu_2)\, \mathfrak{F}_1. \tag{23}$$

In ähnlichem Sinne wie im vorigen Abschnitt a, β der Skalar λ kann jetzt die Summe $\mu_1 + \mu_2$ als Mittelmaß für eine spreizende Wirkung der Affinität betrachtet werden. Mißlich ist nur, daß μ_1 und μ_2 imaginär werden können; jedoch könnten wir uns, wenn dies als störend empfunden wird, auch auf die Beziehungen

$$\mathfrak{F}_2 = m_1 m_2 \mathfrak{F}_1, \qquad \mathfrak{E} = (m_1 + m_2) \cos \delta\, \mathfrak{F}_1 \tag{23'}$$

stützen, die die stets reellen „Hauptmaßstäbe" m_1 und m_2 und den „Verdrehungswinkel“ δ enthalten[12], um auch im Falle imaginärer Fixrichtungen eine reelle Deutung des Spreizvektors vor uns zu sehen.

Auch hier möge, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gewölbte Flächen sind, die einander mit parallelen Flächenelementen entsprechen ($\mathfrak{c}_1 = \pm \mathfrak{c}_2 = (\pm)\, \mathfrak{c}$),

$$(24) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{j} : W = (\mu_1 + \mu_2)\, \mathfrak{c}_1 = (m_1 + m_2) \cos \delta\, \mathfrak{c}_1$$

der Spreizvektor des Flächenpaares für die Stelle (u, v) heißen.

Da das Verschwinden von $\mathfrak{j}$ kennzeichnend dafür ist, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in den Punkten (u, v) parallel sind und die von der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ auf der den Berührebenen in diesen Punkten gemeinsamen uneigentlichen Geraden induzierte Projektivität eine Involution ist[13], in diesem Falle aber je zwei entsprechende Strahlen durch die Fixstrahlen harmonisch getrennt werden, so kann man auf den Wunsch verfallen, allgemein $\mathfrak{J}$ durch das Doppelverhältnis d auszudrücken, das die Fixstrahlen mit irgendeinem Strahl und seinem Bildstrahl bestimmen; es ergibt sich $d = \mu_1 : \mu_2$, folglich, wenn noch der Flächenmaßstab der Abbildung $M = \mu_1 \mu_2 = m_1 m_2$ hinzugezogen wird, wegen $\mu_1 + \mu_2 = \sqrt{\mu_1 \mu_2}\left(\sqrt{\mu_1 : \mu_2} + \sqrt{\mu_2 : \mu_1}\right)$

$$(24') \quad \mathfrak{J} = \left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right)\sqrt{M}\, \mathfrak{c}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{-d}} - \sqrt{-d}\right)\sqrt{-M}\, \mathfrak{c}_1,$$

also

$$\mathfrak{J}^2 = \left(d + \frac{1}{d} + 2\right) M.$$

β) Wenn die Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ nur eine Fixrichtung hat, die dann immer reell ist, so ist sie die Verbindung einer Scherung mit einer reinen Streckung, und wir können

$$\mathfrak{a}' = \mu \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}' = \mu \mathfrak{b} + \nu \mathfrak{a} \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq 0,\ \mu \neq 0,\ \nu \neq 0)$$

annehmen. Hier wird

$$\mathfrak{F}_2 = \mu^2 \mathfrak{F}_1, \qquad \mathfrak{E} = 2\mu \mathfrak{F}_1;$$

$$(24'') \qquad \mathfrak{J} = 2\mu\, \mathfrak{c}_1.$$

---

[12] Siehe 1 S. 226 f.

[13] Siehe 1 S. 233.

γ) Diese Gleichungen gelten auch im Fall der reinen Streckung ($\nu = 0$) im Maßstab $\mu \neq 0$, speziell auch im Falle der Identität ($\mu = 1$), wenn also jede Richtung fix ist.

Alles in allem können wir die Namen Spreizvektor und Spreizwert auch in diesen Fällen als gerechtfertigt erkennen.

Daraus, daß $\mathfrak{j}$ nicht verschwinden kann, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht an entsprechenden Stellen parallel sind, darf übrigens nicht geschlossen werden, daß $|\mathfrak{j}|$, wenn dieser Parallelismus nicht statthat, ein von dem Winkel zwischen den entsprechenden Berührebenen abhängiges Minimum besitzen müßte; vielmehr hat, wie man im Fall A, a leicht geometrisch erkennen kann, wenn man die Länge von $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}'$ unbeschränkt wachsen läßt, sogar bei Beschränkung auf flächentreue Affinitäten $|\mathfrak{j}|$ stets die untere Grenze 0, die, außer eben in dem Falle paralleler Berührebenen, nie erreicht werden kann.

B. Schiefe einer Affinität.

Auch zur anschaulichen Deutung des Skalars G wollen wir zwei affine Ebenen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ in der Darstellung (20) heranziehen; es wird dann für den schon früher benützten quadratischen Integrationsbereich $\mathfrak{G}$, wie wir sahen,

$$G = j, \tag{20'''}$$

wobei $j = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}$ ist.

Eine irgendwie vorgegebene Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ kann nun mit Hilfe von zwei beliebig, nur linear unabhängig in $\mathfrak{x}$ angenommenen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dargestellt werden; $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{y}$ sind dadurch bestimmt, und zwar ebenfalls als linear unabhängige Vektoren, falls die Affinität $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ nicht entartet ist, was wir hier ja durchweg ausschließen. Wir können aber auch $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{x}$ und unabhängig davon $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{y}$ beliebig wählen, mit der einzigen Einschränkung, daß $\mathfrak{b}'$ nicht zu $\mathfrak{a}'$ parallel sein darf.

a) Zunächst entspreche nicht jedem Vektor von $\mathfrak{x}$ ein zu ihm senkrechter Vektor in $\mathfrak{y}$. Dann können wir ein Paar senkrechter Vektoren $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{y}$ finden, so daß wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}' = 0$

$$G = -\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}$$

wird. Das Verschwinden von G bedeutet hiernach, daß einem beliebigen derartigen Vektorenpaar $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vermöge der Affinität $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ stets wieder ein Paar senkrechter Vektoren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ entspricht. Nennen wir in diesem Fall die projektive Beziehung zwischen zwei durch die Affinität einander zugeordneten Strahlenbüscheln der Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ – bei der also jedem Paar senkrechter Strahlen, von denen der eine in $\mathfrak{x}$, der andere in $\mathfrak{y}$ liegt, wieder ein Paar senkrechter Strahlen entspricht, von denen der eine $\mathfrak{y}$, der andere $\mathfrak{x}$ angehört –, kurz „lotrecht" oder auch „gerade", so ist allgemein der Wert von G als ein Maß für die Abweichung von der „Geradheit" anzusprechen, und es wird nicht als fernliegend empfunden werden, wenn wir G die „Schiefe des Paares der Flächenstücke $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$" nennen; G ist das negative Skalarprodukt irgend zweier Vektoren, die zwei beliebigen senkrechten Vektoren entsprechen, die in den beiden Ebenen liegen, wobei nur die Vektoren so normiert zu denken sind, daß sie die vorgeschriebenen Invariantenwerte ergeben.

Um ein Schiefenmaß für eine beliebige reguläre Beziehung zwischen zwei gewölbten Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in den Umgebungen eines Paares entsprechender Punkte zu erhalten, werden wir wie früher durch Multiplikation der Berührvektoren mit geeigneten Skalaren die Invarianten so reduzieren, daß $\mathfrak{j}_1$ ein Einheitsvektor wird; es heiße demgemäß

$$J = j : W \tag{25}$$

die *Schiefe* der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ in dem Punktepaar (u, v).

Besonders leicht zu überschauen ist die Bedeutung von G oder J dann, wenn es sich bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ um parallele affine Ebenen handelt; auf diesen Sonderfall aber läßt sich der allgemeine Fall affiner Ebenen, die nicht parallel sind, durch senkrechte Projektion der Ebene $\mathfrak{y}$ in die Ebene $\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{y}'$ zurückführen; denn nach der auf die Gleichung (13′) (S. 115) folgenden Bemerkung, die sich zwar auf $\mathfrak{e}\iota\mathfrak{e}$ bezog, aber hier, weil $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ konstante Richtungen haben, auch für $\mathfrak{e}H\mathfrak{e}$ gilt, ändert sich dabei G nicht: es ist $G' = G$. Wenn δ' den Verdrehungswinkel und m_1', m_2' die Hauptmaßstäbe dieser Hilfsabbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}'$ bedeuten, so wird nach derselben Bemerkung, wie bei früherer Gelegenheit[12] gezeigt wurde, wegen (20'''), da W unverändert bleibt,

$$G = j = -(m_1' + m_2') \sin \delta' W; \tag{26}$$

das Verschwinden von G ist demnach charakteristisch dafür, daß der Affinor $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}'$ symmetrisch ist[14], so daß die Größe von G wesentlich als Maß für das Abweichen von der Symmetrie gewertet werden kann, wofür wir eben „Schiefe" sagen wollen.

Wir können auch hier die Maßstäbe μ_1 und μ_2 und dazu noch den Winkel φ der Fixrichtungen der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}'$ heranziehen; φ tritt nur in der Invariante $J' = J$ in Erscheinung, nicht aber in $\mathfrak{J}_1'$, $\mathfrak{J}_2'$ und $\mathfrak{J}'$, wie (23) zeigt: es wird nämlich

$$J = (\mu_2 - \mu_1) \operatorname{cotg} \varphi, \tag{27}$$

was man am einfachsten erkennt, wenn man vorübergehend die Einheitsvektoren $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ der Fixrichtungen einführt und $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}_2$ setzt, wodurch man zunächst mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2 : \sin \varphi$

$$\mathfrak{j}_1' = \sin \varphi\, \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{j}_2' = \mu_1 \mu_2 \sin \varphi\, \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{j}' = (\mu_1 + \mu_2) \sin \varphi\, \mathfrak{f},$$
$$j' = j = (\mu_2 - \mu_1) \cos \varphi$$

und dann nach Division durch $W = \sin \varphi$ den oben angegebenen Ausdruck für J erhält.

Wenn $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ist – diesem Fall ordnet sich auch der Fall $\mu_1 = \mu_2$ unter –, so verschwindet die Schiefe; das steht in Übereinstimmung damit, daß dann der Affinor $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}'$ symmetrisch ist. Die Abweichung des Winkels φ von $\pm \frac{\pi}{2}$ ist also in Verbindung mit der Größe der Differenz $\mu_1 - \mu_2$ ebenfalls ein Maß für das Abweichen von der Geradheit.

Ist aber $\mathfrak{f}_1 = \pm \mathfrak{f}_2$ ($\sin \varphi = 0$), so wählen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{f}_1$; dann finden wir, weil $\mathfrak{a}' = \mu \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \nu \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b}$ wird (vgl. S. 124 unten),

$$J = \nu. \tag{27'}$$

[14] Es handelt sich hier übrigens um die bekannte Tatsache, daß für die Symmetrie eines in einer Ebene wirkenden, aber auch eines räumlichen Affinors das Bestehen der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ für beliebige Paare entsprechender Vektoren $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}'$ notwendig und hinreichend ist; vgl. W. v. Ignatowski, Die Vektoranalysis, Leipzig und Berlin 1926, Bd. I S. 89.

b) Es ist nun noch die Möglichkeit zu betrachten, daß **jeder Richtung in $\mathfrak{x}$ die zu ihr orthogonale in $\mathfrak{y}$** entspricht; es darf dann $\mathfrak{x}$ nicht senkrecht auf $\mathfrak{y}$ stehen (es muß also $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 \neq 0$ sein). Diese Eigenschaft bleibt, wie sofort zu erkennen ist, bei senkrechter Projektion der einen Ebene in die andere erhalten; dadurch muß demnach aus der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel $\pm\frac{\pi}{2}$ – eine positive oder negative „Stürzung" verbunden mit einer Dehnung im Maßstab $m' = m_1' = m_2' \neq 0$ – hervorgehen. Es wird daher

$$(26') \qquad G = -2\, m'\, W \quad \text{und} \quad J = -2\, m',$$

was sicher **nicht null** sein kann. Da hier der Faktor $\sin \delta'$ von $-(m_1' + m_2')$ in (26) seinen maximalen Betrag angenommen hat, so ist nur noch die Größe des jeweils – und zwar lateral – wirkenden Dehnungsfaktors m' für den Wert der Schiefe J maßgebend.

5. Ausdruck des Spreizvektors durch Flächenvektoren

Außer den Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wollen wir nun noch diejenige betrachten, die von den Punkten, die die Verbindungsstrecken je zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im konstanten Verhältnis $\eta : \xi$ teilen, gebildet wird, die also, wenn

$$\xi + \eta = 1$$

angenommen wird, dargestellt wird durch

$$(28) \qquad \mathfrak{z} = \xi\, \mathfrak{x} + \eta\, \mathfrak{y}.$$

Ordnen wir den Punkt $\mathfrak{z}(u, v)$ den Punkten $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ zu, so bekommen wir eine von der Parameterwahl unabhängige Abbildung des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ auf die Fläche $\mathfrak{z}$.

Wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_u \times \mathfrak{z}_v &= (\xi\, \mathfrak{x}_u + \eta\, \mathfrak{y}_u) \times (\xi\, \mathfrak{x}_v + \eta\, \mathfrak{y}_v) \\ &= \xi^2 \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v + \xi\eta\, (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v + \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{x}_v) + \eta^2 \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \end{aligned}$$

wird

$$(29) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{G}} \mathfrak{z}_u \times \mathfrak{z}_v\, du\, dv = \xi^2 \mathfrak{F}_1 + \xi\eta\, \mathfrak{E} + \eta^2 \mathfrak{F}_2.$$

Dies gilt auch, wenn nicht überall in $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{z}_u \times \mathfrak{z}_v \neq 0$ ist; auch in diesem Fall möge das links stehende Doppelintegral der Flächenvektor des Flächenstückes $\mathfrak{z}$ heißen, das den beiden zusammengehörigen Stücken $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ entspricht.

Mit $\xi = \eta = {}^1/_2$, d. h. für

$$\mathfrak{z} = {}^1/_2\,(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$$

erhalten wir aus (29), wenn wir den Flächenvektor von $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{F}_3$ bezeichnen,

$$\mathfrak{E} = 4\,\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2. \tag{30}$$

Damit ist der Spreizvektor eines Flächenpaares auf die Flächenvektoren der einzelnen Flächen und ihrer Mittenfläche zurückgeführt.

Hierdurch eröffnet sich ein leicht zu begehender Weg zum Beweis des Integralsatzes (14) nach der im Abschnitt 1 angewandten Schlußweise, für deren Durchführbarkeit nicht mehr als die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitungen der Funktionen $\mathfrak{x}\,(u, v)$ und $\mathfrak{y}\,(u, v)$ vorausgesetzt zu werden brauchten. – Für die Gültigkeit der Beziehungen (15) und (16) scheinen aber die weitergehenden Voraussetzungen, die im Abschnitt 3 gemacht wurden, beibehalten werden zu müssen.

Handelt es sich bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ um zwei konvexe Flächenstücke einer Ebene, deren Normalvektor $\mathfrak{e}$ sei ($\mathfrak{e}^2 = 1$), und sind ihre Ränder mit gleichen Umlaufsinnen so aufeinander bezogen, daß ihre Tangenten in entsprechenden Punkten gleichgerichtet sind, so ist der Spreizwert $\mathfrak{e}\,\mathfrak{E} = E$ der zweifache gemischte Flächeninhalt der Eibereiche.[15]

6. Beispiele

Im folgenden mögen für einige der wichtigsten Arten von Flächenpaaren die Invarianten berechnet werden:

---

[15] Man vergleiche hierzu E. Salkowski, Über den gemischten Flächeninhalt zweier ebenen Figuren. Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 230–235. — Im allgemeinen liegt aber hier bei der Bildung der Raumfläche $\mathfrak{z} = \xi\,\mathfrak{x} + \eta\,\mathfrak{y}$ etwas anderes vor als die Bildung eines „Summenbereiches" oder einer „Linearkombination" im Sinne der Theorie der konvexen Körper.

a) Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Parallelflächen; es gilt dann

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + p\,\mathfrak{c} \qquad (p = \text{const.}).$$

Wir finden, wenn wir die Krümmungslinien als Parameterkurven wählen, nach den Formeln von Rodrigues

$$\mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_u\,(1 + p\,N_1), \qquad \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v\,(1 + p\,N_2);$$

dabei sind N_1 und N_2 die Hauptnormalkrümmungen. Folglich wird

$$\mathfrak{j}_2 = (1 + 2Hp + Kp^2)\,\mathfrak{j}_1, \qquad \mathfrak{j} = 2(1 + pH)\,\mathfrak{j}_1, \qquad j \equiv 0,$$

wo H die mittlere Krümmung, K das Krümmungsmaß der Fläche $\mathfrak{x}$ an der Stelle (u, v) bedeutet.

Aus (14) folgt im Verein mit (6), wenn wir $\mathfrak{j}_1\,du\,dv = d\mathfrak{f}$ setzen, für den von der Kurve b umrandeten Bereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{x}$ die aus der Theorie der Oberflächenspannung bekannte Beziehung:

$$2\int_{\mathfrak{B}} H\,d\mathfrak{f} = \int_b \mathfrak{c} \times d\,\mathfrak{x};$$

dieser tritt bekanntlich die folgende zur Seite:

$$2\int_{\mathfrak{B}} H\mathfrak{x} \times d\mathfrak{f} = \int_b \mathfrak{x} \times (\mathfrak{c} \times d\mathfrak{x}).$$

Nach (15) ist $\int \mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ vom Wege unabhängig; dies ist aber wegen $\mathfrak{x}d\mathfrak{y} + \mathfrak{y}d\mathfrak{x} = d(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{y}d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}d\mathfrak{x} + p\,\mathfrak{c}d\mathfrak{x} = {}^1/_2 d(\mathfrak{x}^2)$ trivial.

Ist $\mathfrak{x}$ eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung, so erhalten wir für die Parallelfläche im Abstand $p = -1 : H$ $\mathfrak{j} \equiv 0$; solche Flächen stehen also zueinander in der Beziehung relativer Minimalflächen. Für die Parallelfläche finden wir als Wert der mittleren Krümmung $-H$. Umgekehrt müssen äquidistante relative Minimalflächen entgegengesetzt gleiche mittlere Krümmungen haben, deren Betrag gleich ihrem reziproken Abstand, also konstant ist.

b) Reduzieren wir die Parallelfläche im Maßstab $1 : p$, so erhalten wir, wenn wir $1 : p$ gegen 0 konvergieren lassen:

$$\mathfrak{j}_2 = K\mathfrak{j}_1, \qquad \mathfrak{j} = 2H\mathfrak{j}_1, \qquad j \equiv 0;$$

natürlich wäre dies auch unmittelbar für die Abbildung der Fläche $\mathfrak{x}$ auf die Einheitskugel $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen zu finden gewesen. Die unter a) für Parallelflächen abgeleiteten Integralformeln gelten auch hier. Der Spreizwert ist hier das auch sonst schon untersuchte Integral

$E = 2\int_{\mathfrak{B}} H\,df$, wo df für $c\,d\mathfrak{f}$ gesetzt ist.

c) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien die beiden Schalen der Evolutenflächen einer Fläche $\mathfrak{r}(u, v)$, also

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} - \mathfrak{n}\,R_1, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{r} - \mathfrak{n}\,R_2,$$

wo $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor der Normalen von $\mathfrak{r}$ und $R_1 = 1:N_1$, $R_2 = 1:N_2$ die Hauptkrümmungsradien bedeuten; wieder seien u und v Krümmungsparameter. Da

$$\mathfrak{x}_u = -\mathfrak{n}\,R_{1u}, \qquad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{r}_v\,(1 - R_1:R_2) - \mathfrak{n}\,R_{1v},$$
$$\mathfrak{y}_u = \mathfrak{r}_u\,(1 - R_2:R_1) - \mathfrak{n}\,R_{2u}, \qquad \mathfrak{y}_v = -\mathfrak{n}\,R_{2v}$$

ist, so wird wegen $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{n} = -\mathfrak{r}_v \sqrt{\mathfrak{r}_u^2:\mathfrak{r}_v^2}$, $\mathfrak{r}_v \times \mathfrak{n} = \mathfrak{r}_u \sqrt{\mathfrak{r}_v^2:\mathfrak{r}_u^2}$

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{r}_u R_{1u}\,(1 - R_1:R_2)\sqrt{\mathfrak{r}_v^2:\mathfrak{r}_u^2}, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{r}_v R_{2v}\,(1 - R_2:R_1)\sqrt{\mathfrak{r}_u^2:\mathfrak{r}_v^2},$$
$$\mathfrak{j} = -\mathfrak{n}\sqrt{\mathfrak{r}_u^2\mathfrak{r}_v^2}(R_1 - R_2)^2 : R_1R_2 - \mathfrak{r}_u R_{2u}\sqrt{\mathfrak{r}_v^2:\mathfrak{r}_u^2}(R_1 - R_2):R_2 +$$
$$+\,\mathfrak{r}_v R_{1v}\sqrt{\mathfrak{r}_u^2:\mathfrak{r}_v^2}(R_1 - R_2):R_1,$$

$$j = R_{1u}R_{2v} - R_{1v}R_{2u} = \frac{\partial(R_1, R_2)}{\partial(u, v)}.$$

In der wegen $\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v = 0$ hieraus folgenden Gleichung $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 = 0$ spricht sich eine bekannte Tatsache aus. Wegen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{x}\times d\mathfrak{y} + \mathfrak{y}\times d\mathfrak{x} = \\
&(\mathfrak{r} - \mathfrak{n}R_1)\times\big(d\mathfrak{r} - d(\mathfrak{n}R_2)\big) + (\mathfrak{r} - \mathfrak{n}R_2)\times\big(d\mathfrak{r} - d(\mathfrak{n}R_1)\big) \\
&= 2\,\mathfrak{r}\times d\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\times d\big(\mathfrak{n}(R_1 + R_2)\big) - (R_1 + R_2)\,\mathfrak{n}\times d\mathfrak{r} + 2\,R_1R_2\,\mathfrak{n}\times d\mathfrak{n} \\
&= 2\,\mathfrak{r}\times d\mathfrak{r} - d\big((R_1 + R_2)\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}\big) - 2\,(R_1 + R_2)\,\mathfrak{n}\times d\mathfrak{r} + 2\,R_1R_2\,\mathfrak{n}\times d\mathfrak{n}
\end{aligned}$$

finden wir gemäß (14)

$$\mathfrak{E} = 2\,\mathfrak{F} + \int_b \mathfrak{n}\times\big(R_1R_2\,d\mathfrak{n} - (R_1 + R_2)\,d\mathfrak{r}\big),$$

wo $\mathfrak{F}$ den Flächenvektor des Flächenstückes $\mathfrak{r}$ bedeutet. – Die Relation (15) kann hier nur zu der auf $U = R_1$, $V = R_2$ angewandten, allgemein gültigen Gleichung $2\int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \int_b (U\,dV - V\,dU)$ führen, die mit der in Abschnitt 3 angeführten Leibnizschen Formel identisch ist; durch Nachrechnen kann dies bestätigt werden.

Für Weingartensche Flächen $\mathfrak{x}$ ist es charakteristisch, daß $j \equiv 0$, d. h. die Beziehung zwischen den beiden Evolutenflächen „gerade" ist; das bedeutet aber, da $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 = 0$ ist, nur, daß die Lote entsprechender Berührebenen einander zugeordnet sind.

d) Für eine Fläche und eine ihrer Evolutenschalen erhalten wir die Beziehungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{r} - \mathfrak{n} R_1,$$

also

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{r}_u, \qquad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{r}_v,$$

$$\mathfrak{y}_u = -\mathfrak{n} R_{1u}, \qquad \mathfrak{y}_v = \mathfrak{r}_v (1 - R_1 : R_2) - \mathfrak{n} R_{1v},$$

folglich mit $\frac{\partial}{\partial u} = \sqrt{\mathfrak{r}_u^2}\,\frac{\partial}{\partial s_1}$, $\frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{\mathfrak{r}_v^2}\,\frac{\partial}{\partial s_2}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{n},\; \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{t}_1 (R_2 - R_1)\,\frac{\partial R_1}{\partial s_1} : R_2, \text{ (also } \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 = 0)$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{n}\,(R_2 - R_1) : R_2 + \mathfrak{t}_1\,\frac{\partial R_1}{\partial s_1} + \mathfrak{t}_2\,\frac{\partial R_1}{\partial s_2},$$

$$J = 0.$$

Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß zur Bildung der absoluten Differentialinvarianten $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}, J$ auch der Operator

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{W}\left(\mathfrak{x}_v\,\frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{x}_u\,\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

verwendet werden könnte, der in der Flächentheorie vielfach mit großem Erfolg zur Untersuchung der Fläche $\mathfrak{x}\,(u, v)$ herangezogen werden kann[16], und durch den sich auch die verschiedenen Differentialparameter von Beltrami und von Darboux auf einfache Weise ausdrücken lassen.

---

[16] Vgl. z. B. Jahresber. d. DMV. 39 (1930), 2. Abt. S. 71, Aufgabe Nr. 82.