Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Verallgemeinerung einer Meissner-Stäckelschen Vermutung über die Verteilung der Primzahlen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 16. Juni 1944.

1. Wie in früheren Mitteilungen[1] werde von einer kompatiblen Figur $[a_1, \ldots, a_n]$ gesprochen, wenn

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

solche n ($\geqq 2$) ganze rationale Zahlen sind, daß bezüglich jedes Moduls $m \geqq 2$ wenigstens eine Restklasse unter den Zahlen a_ν nicht vertreten ist. Die Stäckel-Meissnersche Vermutung besagt dann, daß die Richtigkeit der folgenden beiden Sätze durch empirisch-rechnerische Feststellungen nahegelegt wird:

I A. Zu jeder kompatiblen Figur $[a_1, \ldots, a_n]$ gibt es unendlich viele zu ihr kongruente Figuren $[p_1, \ldots, p_n]$, deren sämtliche Zahlen p_ν (positive) Primzahlen sind.

I B. Zu jeder kompatiblen Figur $[a_1, \ldots, a_n]$ gibt es unendlich viele zu ihr kongruente Figuren $[p_1, \ldots, p_n]$ (mit $p_1 > 1$), bei denen $p_1, \ldots, p_n$ genau die Gesamtheit der Primzahlen des Intervalls $p_1 \leqq x \leqq p_n$ darstellen.

Dabei heißen zwei Figuren $[a_1, \ldots, a_n]$, $[b_1, \ldots, b_n]$ kongruent, wenn alle Differenzen $b_\nu - a_\nu$ einander gleich sind. Nimmt man $n = 2$, $[a_1, a_2] = [0, 2]$, so besagen beide Sätze die (schon vor Meissner und Stäckel vermutete, derzeit noch nicht bewiesene oder widerlegte) Existenz unendlich vieler „Primzahl-Zwillinge". Ersichtlich geht Satz I B inhaltlich noch über I A hinaus in allen jenen Fällen, in denen es möglich ist, aus $[a_1, \ldots,$

[1] „Über das Problem endlicher Gruppen von Primzahlen mit vorgegebener gegenseitiger Lagerung I und II, Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1944, summarische Berichte über die Sitzungen am 14. I. und 4. II. 1944; „Über die Stäckelschen Lückenzahlen nebst kleinen Randbemerkungen zur Verteilung der Primzahlen", ibid., Nr. 6.

a_n] durch Hinzunahme wenigstens einer weiteren zwischen a_1 und a_n gelegenen Zahl eine ebenfalls kompatible Figur herzustellen (wie dies z. B. für die Figur [0, 6] der Fall ist, die sich zur kompatiblen Figur [0, 2, 6] erweitern läßt).

2. Erscheinungen eines relativ nahen Zusammendrängens von Primzahlen (nebst der Wiederkehr bestimmter „Figuren"), dann wieder gefolgt von großen primzahlfreien Intervallen[2] — Erscheinungen also, wie sie in der Folge der natürlichen Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots$ auftreten, — lassen sich auch bei teilerfremden[3] arithmetischen Progressionen $kx + l$ beobachten[4] und führen zu folgenden Vermutungen, in denen I A und I B als Sonderfälle (für $k = 1$, $l = 0$) enthalten sind:

II A. Zu jeder Figur $[a_1, \ldots, a_n]$, für welche $[k a_1, \ldots, k a_n]$ kompatibel ist, gibt es unendlich viele zu ihr kongruente Figuren $[x_1, \ldots, x_n]$ (mit $x_1 > 0$), sodaß alle Zahlen $k x_\nu + l = p_\nu$ Primzahlen sind.

II B. Zu jeder Figur $[a_1, \ldots, a_n]$, für welche $[k a_1, \ldots, k a_n]$ kompatibel ist, gibt es unendlich viele zu ihr kongruente Figuren $[x_1, \ldots, x_n]$ (mit $x_1 > 0$), sodaß die n Zahlen $k x_\nu + l = p_\nu$ genau die Gesamtheit der zur Progression $kx + l$ gehörenden Primzahlen des Intervalls $p_1 \leqq y \leqq p_n$ darstellen.

Wenn wir eine Figur $[a_1, \ldots, a_n]$ „relativ zu k kompatibel" nennen, wenn bezüglich jedes zu k teilerfremden Moduls

---

[2] Es ist unter den gegenwärtigen Bibliotheks-Verhältnissen schwierig festzustellen, was etwa bisher in der Literatur an bewiesenen Resultaten oder präzise formulierten Vermutungen über Mindestwerte für die Größe solcher primzahlfreier Intervalle unterhalb einer Schranke x vorliegt (nämlich über das hinaus, was aus den asymptotischen Sätzen über die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leqq x$ unmittelbar folgt). Angaben über gewisse besonders lange solche Intervalle bei D. N. Lehmer, List of prim numbers from 1 to 10, 006. 721, Washington, Carnegie Institution, Publication No. 165 (1914), Introduction, pag. I.

[3] Es sei also der größte gemeinsame Teiler der Zahlen k, l gleich 1; außerdem werde $k > l \geqq 0$ angenommen.

[4] Zu solchen Beobachtungen führte die Berechnung der Tabellen, die unter dem Titel „Einige Tabellen zur Verteilung der Primzahlen auf Untergruppen der Gruppe der teilerfremden Restklassen nach gegebenem Modul" vorgelegt werden. Siehe Abhandlungen der Bayer. Akad. d. Wiss.

$m \geqq 2$ wenigstens eine Restklasse existiert, der keine der Zahlen a_ν angehört, dann ist die in den Sätzen II A, II B vorausgesetzte Kompatibilität von $[k a_1, \ldots, k a_n]$ offenbar gleichbedeutend damit, daß $[a_1, \ldots, a_n]$ eine relativ zu k kompatible Figur ist. Beispielsweise sind, wenn k eine gerade Zahl ist, die Figuren [0, 1], [0, 1, 3], [0, 2, 3], [0, 1, 3, 4] relativ zu k kompatibel. Man wird im ersten Fall, wenn $[x_1, x_2]$ zu [0, 1] kongruent ist und beide Zahlen $k x_1 + l$, $k x_2 + l$ prim sind, passend von (relativen) Primzahl-Zwillingen in der Progression $k x + l$ sprechen, ferner (ebenfalls in Anlehnung an Stäckels Bezeichnung von (relativen) Primzahl-Vierlingen, wenn $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ zu [0, 1, 3, 4] kongruent ist und alle $k x_\nu + l$ prim sind; analog etwa von Primzahl-„Drillingen" im Falle der Figuren [0, 1, 3] und [0, 2, 3], (eigentliche Drillinge, wenn sie nicht als Bestandteil einer Vierlings-Figur auftreten).

3. Die oben erwähnten Beobachtungen waren speziell bei Berechnung der Tabellen XXIV, XXV, XXVI, l. c.[4], zu machen, die sich auf die Progressionen $k x + l$ für $k = 262$ und $l = 1$, bzw. 259, bzw. 17 und die in ihnen enthaltenen Primzahlen < 300.000 beziehen. Man zählt innerhalb dieses Bereiches in diesen drei Progressionen 200, bzw. 201, bzw. 213 Primzahlen, dabei 26, bzw. 25, bzw. 24 relative Primzahl-Zwillinge; ferner 7, bzw. 5, bzw. 5 Primzahlfiguren vom Typus [0, 1, 3]; 10, bzw. 4, bzw. 4 vom Typus [0, 2, 3]; 1 bzw. 3, bzw. 2 vom Typus [0, 2, 3, 5]; 2, bzw. 0, bzw. 0 vom Typus [0, 1, 3, 4] (relative Vierlinge); 1, bzw. 0, bzw. 0 vom Typus [0, 2, 3, 5, 6].

Da diese Primzahlfiguren nicht unmittelbar aus den obgenannten Tabellen ersichtlich sind (wohl aber aus dem ihrer Berechnung dienenden Material), so mögen sie hier noch aufgeführt werden[5].

---

[5] Dabei sind, was beim Vergleich mit den vorhin angegebenen Anzahlen zu beachten ist, beispielsweise unter den Primzahl-Zwillingspaaren (vom Typus [0, 1]) diejenigen nicht nochmals besonders angegeben, die bereits unter den Primzahlfiguren [0, 1, 3] usw. auftreten; oder es sind unter den Figuren [0, 2, 3] die unter den Figuren [0, 1, 3, 4] und [0, 2, 3, 5, 6] auftretenden Teilfiguren [0, 2, 3] nicht mehr aufgeführt.

Progression $262x + 1$,

Typus [$0, 2, 3, 5, 6$]:

[192047, 192571, 192833, 193357, 193619];

Typus [$0, 1, 3, 4$]:

[94321, 94583, 95107, 95369];

Typus [$0, 1, 3$]:

[39301, 39563, 40087], [63667, 63929, 64453],
[71527, 71789, 72313], [138337, 138599, 139123],
[153271, 153533, 154057];

Typus [$0, 2, 3$]:

[263, 787, 1049], [27773, 28297, 28559],
[82007, 82531, 82793], [148817, 149341, 149603],
[173183, 173707, 173968], [247067, 247591, 247853],
[298157, 298681, 298943];

Typus [$0, 1$]:

[14149, 14411], [77029, 77291], [114757, 115019],
[179209, 179471], [204361, 204623], [208291, 208553],
[253879, 254141], [259381, 259643], [289249, 289511],
[293179, 293441].

Progression $262x + 259$.

Typus [$0, 2, 3, 5$]:

[13883, 14407, 14669, 15193], [33533, 34057, 34319, 34843],
[36677, 37201, 37463, 37987];

Typus [$0, 1, 3$]:

[107941, 108203, 108727], [123661, 123923, 124447];

Typus [$0, 1$]:

[2617, 2879], [10477, 10739], [25411, 25673],
[47419, 47681], [48991, 49253], [57637, 57899],
[59209, 59471], [70999, 71261], [86719, 86981],
[112657, 112919], [151171, 151433], [181039, 181301],
[228199, 228461], [232129, 232391], [241561, 241823],
[255709, 255971], [258067, 258329], [265141, 265403],
[296581, 296843].

Progression $262x + 17$.

Typus [$0, 2, 3, 5$]:

[99053, 99577, 99839, 100363], [264113, 264637, 264899, 265423];

Typus $[0, 1, 3]$:

[24907, 25169, 25693], [47701, 47963, 48487],
[200971, 201233, 201757];

Typus $[0, 2, 3]$:

[90407, 90931, 91193], [282977, 283501, 283763];

Typus $[0, 1]$:

[22549, 22811], [51631, 51893], [75997, 76259],
[85429, 85691], [101149, 101411], [119227, 119489],
[132589, 132851], [134947, 135209], [152239, 152501],
[186037, 186299], [195469, 195731], [222979, 223241],
[229267, 229529], [250489, 250751], [267781, 268043],
[277999, 278261], [295291, 295553].