Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals.

Von **Hans Mohrmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 13. Januar 1917.

Herr Geh. Hofrat Finsterwalder machte mich gelegentlich darauf aufmerksam, daß für den Begriff des räumlichen Ovals der Begriff des überall konvexen Körpers von grundlegender Bedeutung sein müsse, insofern Züge gewundener algebraischer Kurven 4. Ordnung mit weniger als 4 reellen stationären Ebenen niemals ganz auf der Begrenzung eines überall konvexen Körpers liegen (können). Dies hat mich veranlaßt, der Frage nachzugehen, wobei ich die Finsterwaldersche Vermutung in vollem Umfange bestätigt gefunden habe.

1. Bezeichnet man als räumliches Oval im engeren Sinne eine stetig gewundene geschlossene Kurve ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.), welche auf einer ganz im Endlichen gelegenen geschlossenen, überall konvexen Fläche liegt, die mit keiner Geraden des Raumes mehr als 2 Punkte gemein hat (Ovaloid), so gilt der folgende Satz, der das genaue Analogon des Möbiusschen Satzes über die Minimalzahl der Wendepunkte (stationären Tangenten) eines von singulären Punkten freien ebenen, unpaaren Kurvenzuges ist:

Satz I. Ein auf einem Ovaloid gelegenes räumliches Oval (im engeren Sinne) besitzt mindestens 4 (reelle) stationäre Ebenen.

Beweis: Eine Schmiegungsebene des Ovals schneidet aus dem Ovaloid eine überall konvexe geschlossene Kurve aus, die ich kurz Schmiegungskurve des Ovals nennen will. Irgend 2 Schmiegungskurven können als ebene Schnitte eines Ovaloids nicht mehr als 2 Punkte miteinander gemein haben. Nun durchsetzt aber die einer nicht stationären Schmiegungsebene zugehörige Schmiegungskurve das Oval (auf dem Ovaloid) im Berührungspunkte. Hieraus folgt, wenn man ein Stück eines Ovals, das keinen Wendepunkt (d. i. Berührungspunkt einer stationären Ebene) enthält, als gleichgewundenen bezeichnet, der folgende

Hilfssatz. Zwei aufeinander folgende Schmiegungskurven eines gleichgewundenen Stückes eines räumlichen Ovals berühren einander, zwei nicht aufeinanderfolgende haben keinen Punkt miteinander gemein.

Da nun keine Schmiegungsebene eines räumlichen Ovals mit einer Tangential- bzw. Stützebene des Ovaloids, auf dem das Oval liegt, zusammenfallen kann, also auch keine Schmiegungskurve reducibel ist, so folgt aus unserem Hilfssatz, daß das Kontinuum der Schmiegungskurven des Ovals auf dem Ovaloid mindestens 2 Grenzkurven aufweist. Solchen Grenzkurven entsprechen aber stationäre Schmiegungsebenen des Ovals. Ein räumliches Oval besitzt daher jedenfalls 2 stationäre Ebenen.

Angenommen nun, es gäbe räumliche Ovale, die nur 2 stationäre Ebenen besitzen, so würde für diese auf dem Ovaloid das zwischen den beiden Grenzkurven liegende Gebiet, das von dem Oval durchquert wird, genau doppelt überdeckt. Durch jeden Punkt des Ovals ginge daher außer der zugehörigen Schmiegungsebene nur noch eine weitere Schmiegungsebene hindurch, was zu einem Widerspruch führt.

Projiziert man nämlich das räumliche Oval aus einem seiner Punkte (Kneserscher Verfahren[1]) auf eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene, so erhält man als Bild einen unpaaren Kurvenzug ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.) und ein solcher besitzt (nach einem von Möbius aufgestellten Satze) immer mindestens 3 reelle Wendepunkte (stationäre Tangenten), was nur dadurch möglich ist, daß mindestens drei Schmiegungsebenen des räumlichen Ovals durch das Pro-

---

[1]) Weber-Festschrift, Leipzig 1912, S. 170.

jektionszentrum hindurch gehen. Die Annahme, ein räumliches Oval besitze nur 2 stationäre Ebenen, ist daher unhaltbar, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir fügen noch hinzu, daß jener Satz für nicht auf einem Ovaloid gelegene, ganz im Endlichen verlaufende, geschlossene und von singulären Punkten freie paare Kurvenzüge, wie das Beispiel der algebraischen gewundenen Kurve 4. Ordnung 2. Art mit 4 reellen die Kurve in einem weiteren Punkte treffenden Tangenten lehrt, nicht gilt.

2. Projiziert man eine geschlossene, ganz im Endlichen verlaufende, stetig gekrümmte, ebene Kurve ohne singulären Punkt stereographisch auf eine Kugel, so erhält man auf dieser ein räumliches Oval im engeren Sinne. Die Schmiegungskurven dieses Ovals sind Kreise, die den Krümmungskreisen der ebenen Kurve entsprechen. Hieraus folgt

Satz 2. Eine ganz im Endlichen verlaufende geschlossene, stetig gekrümmte, ebene Kurve ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.) besitzt, auch wenn sie Wendepunkte hat, mindestens 4 Scheitel (d. h. von 0 verschiedene Extrema der Krümmung).

Ein Kurvenzug 4. Ordnung dieser Art, z. B. mit 2 Wendepunkten[1]) besitzt (mindestens) 4 Scheitel, 3 Maxima und 1 Minimum der Krümmung; die Maxima werden durch das Minimum und die beiden Wendepunkte, die ja auch Minima der Krümmung sind, getrennt.

Für überall konvexe Kurven ergibt sich aus Satz 2 der Carathéodory-Knesersche Satz über die Mindestzahl der Scheitel[2]).

---

[1]) Etwa die Epizykloide (Epistrophoide):

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi + (1-a)\cos 2\varphi \\ y = 2\sin\varphi + (1-a)\sin 2\varphi \end{cases} \qquad (0 < a < \tfrac{1}{2}).$$

[2]) Wegen der Literatur über diesen Satz vgl. man Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 161.