

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Der Zusammenschluss des preussischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern.

Von **S. Finsterwalder.**

Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Für die bevorstehende Neutriangulation von Bayern war ursprünglich vom K. Bayer. Katasterbureau der Anschluß an die drei Eckpunkte des preußischen Hauptdreiecksnetzes Kreuzberg, Großgleichberg und Döbra vorgesehen und zwar sollte das bayerische Netz als Fortsetzung des preußischen nach Süden angelegt werden, wobei Zwanganschuß in Bezug auf Seiten und Winkel vorgesehen war¹⁾. Es liegt nun die Möglichkeit vor, die Anschlußstrecke nach Westen und Osten noch zu verlängern, indem einerseits westlich mindestens noch der preußische Punkt Steigkoppe mit angeschlossen wird, während östlich das sächsische Hauptdreiecksnetz die Anschlußpunkte Ochsenkopf und Kapellenberg bietet. Je länger die Anschlußstrecke wird, um so wahrscheinlicher wird der Einfluß zufälliger Abweichungen einzelner Anschlußseiten auf den Maßstab und die Orientierung des bayerischen Netzes ausgeschaltet. Um nun die sächsischen Punkte zum Anschluß benützen zu

¹⁾ Vergleiche hiezu die vorausgegangene Abhandlung des Verfassers: Das Verhältnis der bayerischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München. Diese Berichte, Jahrgang 1914, S. 53, sowie: Vorschlag zu einer Neugestaltung der bayerischen Koordinaten. Zeitschr. des Vereins der Höheren Bayerischen Vermessungsbeamten, 18. Bd., Nr. 3, 1914. Schließlich sei noch auf die Berichtigung am Schlusse der vorliegenden Abhandlung hingewiesen.

Tabelle I.

Trig. Punkt		Breite	Länge	x Meridianabschn.	y Perpendikel	Meridiankonv.
Strauch	sächsische	51° 23' 7,676"	+ 0° 1' 17,485"	+	8888,030	+ 0° 1' 0,545"
	preußische	9,9343"	31° 14' 38,8569"			
Collm	sächsische	51° 18' 15,013"	— 0° 32' 37,799"	—	15,199	— 0° 25' 28,032"
	preußische	17,2853"	30° 40' 43,5247"			
Leipzig ¹⁾	sächsische	51° 20' 13,305"	— 1° 10' 54,734"	+	4162,885	— 0° 55' 22,195"
	preußische	15,6022"	30° 2' 26,5250"			
Röden	sächsische	51° 1' 10,873"	— 1° 24' 16,481"	—	30862,187	— 1° 5' 31,029"
	preußische	13,1550"	29° 49' 4,7271"			
Reust	sächsische	50° 49' 55,044"	— 1° 21' 33,220"	—	51802,648	— 1° 3' 13,983"
	preußische	57,3144"	29° 51' 47,9721"			
Kuhberg	sächsische	50° 35' 58,976"	— 1° 19' 56,817"	—	77667,865	— 1° 1' 46,916"
	preußische	1,2340"	29° 53' 24,3548"			
Stelzen	sächsische	50° 29' 20,145"	— 1° 36' 16,367"	—	89607,805	— 1° 14' 16,949"
	preußische	22,4089"	29° 37' 4,7673"			
Döbra	sächsische	50° 16' 43,717"	— 1° 54' 40,483"	—	112460,376	— 1° 28' 13,018"
	preußische	45,9792"	29° 18' 40,5978"			
Kapellenberg	sächsische	50° 11' 19,194"	— 1° 15' 13,778"	—	123481,575	— 0° 57' 47,517"
Ochsenkopf	sächsische	50° 1' 52,288"	— 1° 44' 40,295"	—	140289,794	— 1° 20' 13,797"
Großenhain	sächsische	51° 18' 20,050"	0° 0' 0,000"		0,000	0° 0' 0,000"

¹⁾ Die sächsischen Angaben wurden zuerst auf das preußische Zentrum (Turmachse der Pleißenburg) reduziert. Als Quellen für die Tabelle sind zu nennen: Astronomisch-geodätische Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. II. Abteilung: Das trigonometrische Netz 1. Ordnung, bearbeitet von A. Nagel. Berlin 1890, S. 768.

Die K. preußische Landestriangulation. Abrisse, Koordinaten und Höhen, 15., 16. und 21. Teil, herausgegeben von der trig. Abteilung der Landesaufnahme. Berlin 1904, 1910, 1913.

können, müssen sie auf das preußische System bezogen werden. Das scheint gar keine Schwierigkeiten zu haben, da das sächsische Hauptdreiecksnetz sowohl wie das preußische zu den genauesten gehören, die es gibt und ein enger Anschluß beider Netze von vornherein zu erwarten ist. Immerhin wird es sich nicht empfehlen, den Anschluß des sächsischen Netzes an das preußische an einer einzelnen Seite, als welche Stelzen—Döbra zunächst in Betracht käme, vorzunehmen, weil sich deren zufällige Längen- und Richtungsabweichung in verstärktem Maße auf die zukünftige bayerische Anschlußseite Döbra—Kapellenberg, die erheblich länger als Stelzen—Döbra ist, übertragen würden. Ich habe es daher vorgezogen, den ganzen über 200 Kilometer betragenden Linienzug: Döbra, Stelzen, Kuhberg, Reust, Röden, Leipzig, Collm, Strauch für den Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Netzes zu benützen. Zum Vergleich seien in nebenstehender Tabelle I die preußischen und sächsischen geographischen Koordinaten der 8 Anschlußpunkte sowie die sächsischen Koordinaten der im preußischen Netz neuzubestimmenden Punkte Kapellenberg und Ochsenkopf zusammengestellt. In die gleiche Tabelle sind noch die sächsischen rechtwinklig sphärischen Koordinaten nach Soldner, sowie die Meridiankonvergenz, bezogen auf den sächsischen Ausgangspunkt Großenhain, aufgenommen. Beiderlei Koordinaten sind auf dem Besselschen Sphäroid gerechnet, aber selbständig astronomisch orientiert, die preußischen nach dem Rauenberg bei Berlin, die sächsischen nach dem Punkte Großenhain. Die Unterschiede der geographischen Koordinaten beruhen außer auf der Verschiedenheit der Orientierung noch auf einer Verschiedenheit des Maßstabes; sie betragen in der geographischen Breite zwischen 2,26" und 2,40", während sich der aus dem Vergleich der geographischen Längen gemeinsamer Punkte ermittelte Längenunterschied der beiden Zählungen zwischen $31^{\circ}13'21,13''$ und $21,37''$ bewegt. Die größte Schwankung des Unterschiedes der beiderlei Breiten beträgt 0,04" gleich 1,2 m linear, jene der Längen 0,24" gleich 4,8 m linear. Statt die geographischen

Tabelle II.

Seitenlogarithmen und Azimute.

	Strauch-Collm	Collm-Leipzig	Leipzig-Röden	Röden-Reust	Reust-Kuhberg	Kuhberg-Stelzen	Stelzen-Döbra
preußische	4,605112.0	4,6495730.6	4,5864004.6	4,3247823.6	4,4133281.2	4,3595643.7	4,5047061.9
sächsische	4,605081.8	4,6495663.5	4,5863923.0	4,3247756.3	4,4133225.8	4,3595583.9	4,5046986.5
preußisch-sächsische	30.2	67.1	81.6	67.3	55.4	59.8	75.4
preuß.	257° 17' 25,111"	274° 56' 54,439"	203° 53' 25,637"	171° 18' 10,367"	175° 48' 13,734"	237° 31' 43,105"	213° 8' 32,425"
sächs.	22,450"	51,218"	22,800"	6,342"	10,050"	39,434"	28,935"
preuß.-sächs.	2,661"	3,221"	2,837"	4,025"	3,684"	3,671"	3,490"

Tabelle III.

Brechungswinkel des Linienzuges Strauch—Döbra.

	Strauch-Collm-Leipzig	Collm-Leipzig-Röden	Leipzig-Röden-Reust	Röden-Reust-Kuhberg
preußische	198° 5' 58,777 (58,097)	109° 26' 24,387 (23,368)	147° 35' 9,420 (9,038)	184° 27' 56,633 (56,509)
sächsische	58,167 (57,994)	24,692 (24,822)	8,196 (8,270)	56,963 (57,309)
preußisch-sächsische	+ 0,610 (+ 0,103)	— 0,305 (— 1,454)	+ 1,224 (+ 0,768)	— 0,330 (— 0,800)
		Reust-Kuhberg-Stelzen	Kuhberg-Stelzen-Döbra	
		241° 42' 14,768 (14,742)	165° 49' 25,683 (25,805)	
		14,766 (15,065)	25,829 (25,682)	
		+ 0,002 (— 0,323)	— 0,146 (+ 0,123)	

Die eingeklammerten Zahlen stellen die beobachteten, die anderen die ausgeglichenen Werte dar.

Koordinaten der gemeinsamen Punkte beider Systeme zu vergleichen, kann man auch die Seiten und Winkel des gemeinsamen Linienzuges zusammenstellen, was in Tabelle II und III geschehen ist. Den ausgeglichenen Winkeln sind die beobachteten in Klammern beige setzt. Die Unterschiede in den Seitenlogarithmen bewegen sich zwischen 30 und 82 Einheiten der 7. Dezimale und betragen im Mittel 58 E. d. 7. D. Ein Vergleich der Azimute der Seiten des Linienzuges der in Tabelle II durchgeführt ist, weist auf eine Verdrehung der beiden Linienzüge gegeneinander hin, die zwischen $2,7''$ und $4,0''$ im Mittel $3,35''$ beträgt.

Um einen besseren Anschluß des sächsischen Netzes an das preußische zu bekommen, verschieben wir vorläufig den sächsischen Ausgangspunkt Großenhain um $\delta q_0 = 2,249''$ nach Norden und setzen dessen Länge im preußischen System auf $L_0 = 31^\circ 13' 21,3705''$ fest. Wir drehen ferner das sächsische Netz mit Beibehaltung seiner Form so gegen den Meridian von Großenhain, daß das Azimut dort um $\vartheta = 3,35''$ größer wird und multiplizieren die sächsischen Dreiecksseiten mit dem Faktor $1 + k = 1,0000144$ (58 E. d. 7. D. entsprechend). Dadurch werden die sächsischen Koordinaten offenbar den preußischen genähert.

Um die zugehörigen Koordinatenänderungen zu berechnen, beziehen wir uns auf beistehende Fig. 1, in welcher O den Ausgangspunkt Großenhain, P einen beliebigen Punkt der sächsischen Triangulation mit den Soldnerschen Koordinaten x und y bedeutet. γ ist die Meridiankonvergenz in P , s die Länge OP und α das Azimut von OP in O .

Es ist dann $PP' = ks$ die Verschiebung von P infolge der Maßstabänderung, die in P das genäherte Azimut $\alpha + \gamma$ hat. Die nördliche Komponente von PP' wird daher $ks \cos(\alpha + \gamma)$, die östliche $ks \sin(\alpha + \gamma)$.

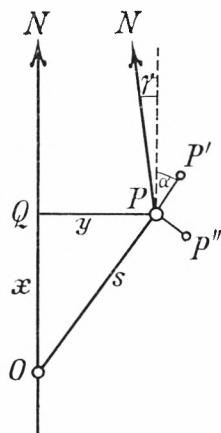


Fig. 1.

Es sei ferner $PP'' = \frac{\vartheta s}{\varrho''}$ die senkrecht zu OP vor sich gehende Verschiebung von P infolge der Drehung um den Winkel ϑ . ϱ'' bedeutet die Länge des Radius in Sekunden. Diese Verschiebung hat das Azimut in P : $\alpha + \gamma + 90^\circ$. Ihre nördliche Komponente ist: $-\frac{\vartheta s}{\varrho''} \sin(\alpha + \gamma)$, ihre östliche: $\frac{\vartheta s}{\varrho''} \cos(\alpha + \gamma)$.

Durch die Verschiebung von O um $\delta\varphi_0$ nach Norden wird P um $\delta\varphi_0 m_0 \cos \gamma$ nach Norden und um: $\delta\varphi_0 m_0 \sin \gamma$ nach Osten verschoben. m_0 ist dabei die Länge einer Breitensekunde in O . Die Gesamtverschiebung infolge der drei Veränderungen ergibt eine nördliche Verschiebung von:

$$\delta\varphi_0 m_0 \cos \gamma - \frac{\vartheta s}{\varrho''} \sin(\alpha + \gamma) + ks \cos(\alpha + \gamma)$$

und eine östliche Verschiebung von:

$$\delta\varphi_0 m_0 \sin \gamma + \frac{\vartheta s}{\varrho''} \cos(\alpha + \gamma) + ks \sin(\alpha + \gamma).$$

Verwandelt man diese linearen Verschiebungen durch Division mit dem linearen Maß der Breitensekunde m_p bzw. der Längensekunde n_p , das sich auf den Punkt P bezieht, in Winkelmaß und fügt man bei den geographischen Längen noch den konstanten Wert L_0 hinzu, so ergeben sich die Veränderungen der sächsischen geographischen Koordinaten $\delta\varphi$ und L mittels der Formeln:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \delta\varphi_0 \frac{m_0 \cos \gamma}{m_p} - \vartheta \frac{s \sin(\alpha + \gamma)}{\varrho'' m_p} + k \frac{s \cos(\alpha + \gamma)}{m_p} \\ L &= \delta\varphi_0 \frac{m_0 \sin \gamma}{n_p} + \vartheta \frac{s \cos(\alpha + \gamma)}{\varrho'' n_p} + k \frac{s \sin(\alpha + \gamma)}{n_p} + L_0. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten von ϑ und k in obigen Formeln können wegen der Kleinheit der zu erwartenden Verschiebungen unbedenklich die Größen α und s aus x und y durch ebene Rechnung (ohne Rücksicht auf sphärische Korrekturen) gefunden werden.

Tabelle IV.

Koeffizienten der Fehlergleichungen für Breite und Länge.

Punkt	Fehlergleichungen für die geographischen Breiten				Fehlergleichungen für die geographischen Längen				
	Δq_0	$\Delta \vartheta$	Δk	l	Δq_0	$\Delta \vartheta$	Δk	ΔL_0	l'
Strauch . . .	1	— 0,000235	+ 287,6	— 0,00595	+ 0,000465	+ 0,002229	+ 77,5	1	+ 0,00822
Collm . . .	1	+ 0,005950	— 9,7	— 0,00351	— 0,011816	— 0,000075	— 1957,7	1	— 0,00823
Leipzig . . .	1	+ 0,012930	+ 91,7	— 0,00356	— 0,025708	+ 0,000710	— 4257,4	1	— 0,00527
Röden . . .	1	+ 0,015366	— 1059,3	+ 0,00322	— 0,030212	— 0,008144	— 5025,0	1	— 0,00521
Reust . . .	1	+ 0,014871	— 1733,3	+ 0,00346	— 0,029042	— 0,013269	— 4843,4	1	— 0,00114
Kuhberg . . .	1	+ 0,014578	— 2568,2	+ 0,00286	— 0,028240	— 0,019566	— 4725,3	1	+ 0,00159
Stelzen . . .	1	+ 0,017556	— 2979,3	+ 0,00101	— 0,033870	— 0,022640	— 5676,4	1	+ 0,00242
Döbra . . .	1	+ 0,020912	— 3751,8	+ 0,00282	— 0,040045	— 0,028387	— 6731,8	1	+ 0,00758
		$p = 2,5$				$p = 1,0$			

Werden mit den oben angegebenen Konstanten $\delta\varphi_0$, ϑ , k und L_0 die Veränderungen gerechnet, so ergibt sich schon ein recht befriedigender Anschluß an die preußischen Koordinaten. Die noch auftretenden Unterschiede sind aus den Absolutgliedern der folgenden Ausgleichung (Tabelle IV) zu ersehen. Die größten Unterschiede finden sich in der Breite von Strauch zu $0,0059'' = 18 \text{ cm linear}$ und in den Längen von Strauch und Collm zu $0,0082'' = 16 \text{ cm linear}$. Der mittlere Koordinatenunterschied ist 13 cm linear .

Um nun die günstigsten Werte für die vier Konstanten, welche die Verschiebung des sächsischen Netzes auf das preußische bestimmen, zu erhalten, sollen an den vorhin betrachteten Näherungswerten dieser Konstanten Verbesserungen $\Delta\varphi_0$, $\Delta\vartheta$, Δk und ΔL_0 so angebracht werden, daß die mit den verbesserten Konstanten berechnete Summe der Quadrate der linearen Koordinatenunterschiede ein Minimum wird. Die zu den geographischen Breiten und Längen gehörigen Fehlergleichungen sind in umstehender Tabelle IV zusammengefaßt. Wegen der verschiedenen Größen der Längen- und Breitensekunde (30,9 und 19,7 m) wird den Gleichungen für die Breiten das Gewicht $30,9^2:19,7^2 = 2,5$ rund zugewiesen.

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen lautet folgendermaßen:

$\Delta\varphi_0$	$\Delta\vartheta$	$10^5 \Delta k$	ΔL_0	l bzw. l'
20,00611	0,25790	— 0,28286	— 0,19847	0,00088
	0,00600	— 0,00008	— 0,08914	0,00016
		0,02549	— 0,33140	— 0,00082
			8,00000	— 0,00004
				0,00051.

Die Auflösung gibt als Minimum der Fehlerquadratsumme 0,00041, woraus der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit den Wert

$$m = \pm \sqrt{\frac{0,00041}{16-4}} = \pm 0,00585 \text{ Längensekunden}$$

oder in linearem Maße 117 mm erhält. Letztere Zahl ist zugleich der mittlere Koordinatenunterschied, der durch die systematische Ausgleichung nur wenig (von 128 auf 117 mm) verringert wurde.

Für die Verbesserungen der vier Konstanten wurde gefunden:

$$\Delta\varphi_0 = 0,00257'' \pm 0,00242; \Delta\vartheta = -0,0819'' \pm 0,1400;$$

$$10^5 \Delta k = 0,1071 \pm 0,0670; \Delta L_0 = 0,00359 \pm 0,0038.$$

Zusammen mit den Näherungswerten ergeben sich als endgültige Werte der Konstanten:

$$\delta\varphi_0 = 2,25157'' \pm 0,00242; \vartheta = 3,2681'' \pm 0,1400;$$

$$k = 0,00001547 \pm 0,00000067; L_0 = 31^\circ 13' 21,3741'' \pm 0,0038.$$

Korrigiert man mit diesen Konstanten die sächsischen Koordinaten, so nähern sie sich den preußischen bis auf folgende Werte:

preuß.-sächs.	Strauch	Collm	Leipzig	Röden
Breite:	0,00305	0,00143	0,00195	— 0,00344
Millimeter:	94	44	60	— 106
Länge:	— 0,01172	0,00675	0,00633	0,00640
Millimeter:	— 230	132	124	125

preuß.-sächs.	Reust	Kuhberg	Stelzen	Döbra
Breite:	— 0,00296	— 0,00148	0,00104	0,00033
Millimeter:	— 92	— 46	32	10
Länge:	0,00169	— 0,00167	— 0,00173	— 0,00621
Millimeter:	33	— 33	— 34	— 122

Die Nachrechnung der Fehlerquadratsumme ergibt 0,0004087 statt 0,00041 aus der Auflösung der Normalgleichungen.

Infolge der Ausgleichung ist der Extremwert der Koordinatenunterschiede bei Strauch von 17 auf 23 cm gestiegen. In Fig. 2 findet sich eine schematische Darstellung des Zusammenpassens der preußischen und sächsischen Vermessung, aus der ersichtlich ist, daß die verbleibenden Differenzen in erster Linie

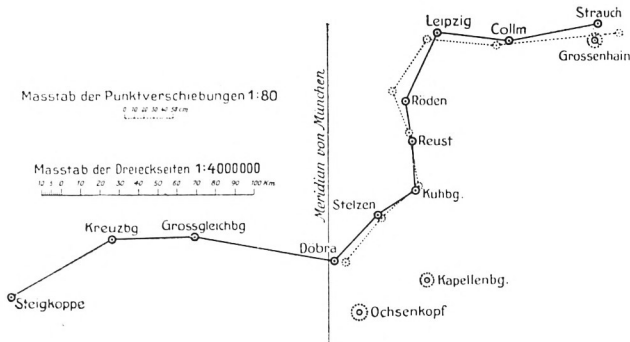


Fig. 2.

auf Unterschiede des Polygonwinkels bei Leipzig zurückzuführen sind. Leipzig ist ein Punkt der preußischen Vermessung, in welchem der Zwangsanschluß des thüringischen Dreiecksnetzes an die Hannover-sächsische Dreieckskette erfolgt. Der letztgenannten gehört die Seite Leipzig—Collm an, während Collm—Strauch zu der märkisch-schlesischen Dreieckskette gehört, welche wieder für sich ausgeglichen ist. Daraus erklärt sich wohl der große Maßstabsunterschied der ebenerwähnten Seiten (67 und 30 E. d. 7. Dez.).

Für spätere Verwertung füge ich noch das System der Gewichtskoeffizienten Q_{ik} , wie es aus der Auflösung der Normalgleichungen hervorgeht, bei:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= 0,1706, & Q_{12} &= -7,293, & Q_{13} &= 1,881, & Q_{14} &= 0,000942 \\
 Q_{22} &= 575,5, & Q_{23} &= 4,060, & Q_{24} &= 6,400 \\
 & & Q_{33} &= 132,7, & Q_{34} &= 5,603 \\
 & & & & Q_{44} &= 0,4283.
 \end{aligned}$$

Die bei der Ausgleichung gefundenen mittleren Fehler von $\Delta\varphi_0$ und ΔL_0 , nämlich $\pm 0,00242$ und $\pm 0,00382$ gestatten einen Schluß auf die Genauigkeit, mit welcher aus der Ausgleichung die Lage des Punktes Grossenhain, des Ausgangspunktes der sächsischen Triangulation, im preußischen System hervorgeht. Der mittlere Koordi-

natenfehler wird nämlich in der Nordsüdrichtung $30,9 \cdot 0,00242 = 75$ mm, in der Ostwestrichtung $19,6 \cdot 0,00382 = 75$ mm, also sehr nahe gleich. Aber auch die Fehlerellipse ist fast vollkommen kreisförmig, wie aus der Kleinheit von $Q_{11} = 0,000942$ im Verhältnis zu $Q_{11} = 0,1706$ und $Q_{44} = 0,4283$ hervorgeht. Es ist nämlich der mittlere Fehler m_x in der Nordsüdrichtung $m_x^2 = 30,9^2 m^2 \cdot Q_{11}$, jener in der Ostwestrichtung $m_y^2 = 19,6^2 m^2 Q_{44}$, wobei m den mittleren Fehler der Gewichtseinheit (0,00585) bedeutet. Auf ein um den Winkel α verdrehtes Koordinatensystem bezogen sind dann die Koordinaten ξ, η eines Punktes, dessen frühere Koordinaten x und y waren:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \eta &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Hieraus wird:

$$\begin{aligned}m_{\xi}^2 &= \\ 30,9^2 m^2 \cos^2 \alpha Q_{11} + 2 \cdot 30,9 \cdot 19,6 m^2 \cos \alpha \sin \alpha Q_{14} + 19,6^2 m^2 \sin^2 \alpha Q_{44} \\ &= m^2 \{162 \cos^2 \alpha + 1,1 \cos \alpha \sin \alpha + 165 \sin^2 \alpha\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Kleinheit des mittleren Gliedes und der angenäherten Gleichheit der Koeffizienten der äußeren Glieder fast konstant, so daß der mittlere Koordinatenfehler im Azimut α von letzterem so gut wie unabhängig ist.

Mit den endgültigen Werten der Konstanten können nun auch die sächsischen Punkte Kapellenberg und Ochsenkopf in das preußische System umgerechnet werden. Dazu müssen die Koeffizienten in den Formeln für $\delta\varphi$ und L bestimmt werden, welche folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned}\text{Kapellenberg} \quad \delta\varphi &= \delta\varphi_0 + 0,01372 \vartheta - 4044,6 k, \\ L &= L_0 - 0,02619 \delta\varphi_0 - 0,03055 \vartheta - 4408,4 k, \\ \text{Ochsenkopf} \quad \delta\varphi &= \delta\varphi_0 + 0,01909 \vartheta - 4633,7 k, \\ L &= L_0 - 0,03623 \delta\varphi_0 - 0,03488 \vartheta - 6113,6 k.\end{aligned}$$

Hieraus folgen nachstehende Koordinaten im preußischen System:

	φ	λ
Kapellen- berg	$50^\circ 11' 21,4278'' \pm 0,0022$	$29^\circ 58' 7,3691'' \pm 0,0034$
Ochsenkopf	$50^\circ 1' 54,5303'' \pm 0,00265$	$29^\circ 28' 40,7889'' \pm 0,00415.$

Zur Berechnung der mittleren Fehler wurden die obenstehenden Transformationsformeln und die 10 Gewichtskoeffizienten $Q_{11} \dots Q_{44}$ benützt, z. B.:

$$m_{\eta'}^2 = m^2 \{ Q_{11} + 2 \cdot 0,01372 Q_{12} + 0,01372^2 Q_{22} - 2 \cdot 4044,6 Q_{23} + 4044,6^2 Q_{33} \} \text{ usw.}$$

Rechnet man die mittleren Fehler der geographischen Koordinaten wieder in Millimeter um, indem man sie mit den Millimeterzahlen einer Breiten- bzw. Längensekunde multipliziert, so ergibt sich die mittlere Unsicherheit von Kapellenberg in nordsüdlicher Richtung zu 67,8 mm, in ostwestlicher Richtung zu 68,1 mm, also wiederum fast gleich groß. Bei Ochsenkopf werden die entsprechenden Zahlen 82,0 und 82,5 mm. Daß auch hier die mittleren Fehlerellipsen fast genau kreisförmig sind, kann man in folgender Weise zeigen.

Man sucht ähnlich wie bei Großenhain den mittleren Fehler für eine Koordinate, die das Azimut α hat, und überzeugt sich, daß sich derselbe fast unabhängig von α ergibt. Da die Rechnung hier recht umständlich würde, habe ich mich begnügt, den mittleren Fehler für die beiden Azimute 45° und 135° zu rechnen und bei Kapellenberg 67,9 und 67,7 mm, bei Ochsenkopf 82,4 und 81,7 mm gefunden, was die Kreisähnlichkeit der Fehlerellipsen hinlänglich bestätigt. Sie wäre übrigens durch Betrachtungen allgemeiner Natur über den Zusammenschluß zweier annähernd kongruenter Figuren, auf welche ich vielleicht bei anderer Gelegenheit zu sprechen komme, vorauszusehen gewesen. Die geringen mittleren Koordinatenfehler und die günstige Gestalt der Fehlerellipse bei den Punkten Kapellenberg und Ochsenkopf lassen sie als durchaus geeignet für weitere Zwangsanschlußpunkte der bayerischen Triangulation erscheinen. Es beträgt beispielsweise die aus dem Anschluß der sächsischen an die preußische Triangulation hervorgehende Unsicherheit der Richtung Döbra—Kapellenberg nur 0,31" und selbst für die kurze Seite Döbra—Ochsenkopf nicht mehr als 0,56". Die Un-

sicherheit in der Länge beläuft sich bei der erstgenannten Seite auf etwa 9, bei der zweiten auf 14 E. d. 7. Dez.

Die oben angeführten Koordinaten von Kapellenberg und Ochsenkopf weichen beträchtlich von jenen ab, die in einer früheren Mitteilung¹⁾ als Näherungskordinaten dieser Punkte im preußischen System angegeben waren. Bei Kapellenberg beruht dies darauf, daß damals nur die auf den bayerischen Katasterblättern graphisch ermittelte Position in Rechnung gestellt wurde, da ja Kapellenberg kein Punkt der alten bayerischen Triangulation ist. Bei Ochsenkopf bezieht sich die frühere Rechnung auf das alte bayerische Zentrum, welches vom sächsischen stark verschieden ist. Berücksichtigen wir, daß nach den Zentrierungsmessungen des K. B. Katasterbureaus, welche mir Herr Regierungsrat Prof. Dr. Bischoff gütigst zur Verfügung stellte, das bayerische Zentrum um $0,3531''$ nördlicher und um $-0,9768''$ östlicher als das sächsische liegt, so folgt folgende Position für das bayerische Zentrum:

Ochsenkopf

sächs. Zentrum	$\varphi = 50^{\circ}1'54,5303''$	$\lambda = 29^{\circ}28'40,7889''$
	<u>0,3531</u>	<u>- 0,9768</u>

Ochsenkopf

bayer. Zentrum	$50^{\circ}1'54,8834''$	$29^{\circ}28'39,8121''$
Aus bayer. Koord.		
früher gefunden:	<u>$50^{\circ}1'54,898$</u>	<u>$29^{\circ}28'39,781$</u>

Unterschied

sächs.-bayer.	$- 0,0146''$	$0,0311''$
	$= - 0,45 \text{ m}$	$= 0,61 \text{ m.}$

Die verbleibenden Unterschiede liegen ganz innerhalb des früher bestimmten mittleren Fehlers der alten bayerischen Koordinaten von 0,8 m.

Einige Aufmerksamkeit verdient noch die Größe

$$k = 0,00001547 \pm 67,$$

welche zur Einheit addiert den Faktor darstellt, mit dem man die Seitenlängen der sächsischen Triangulierung multiplizieren

¹⁾ Vergleiche das Zitat auf der ersten Seite der Abhandlung.

muß, um sie in preußische zu verwandeln. Der zugehörige Logarithmus beträgt 67 ± 3 E. d. 7. Dez. Bedenkt man, daß die preußischen Seiten schon einer Korrektur von $+58$ E. d. 7. Dez. zur Überführung in internationale Meter bedürfen, so wird diese logarithmische Korrektur der sächsischen Seiten zur Überführung auf internationale Meter 125 E. d. 7. Dez. oder $1 : 35000$ der Länge.

Im Vergleich zu dieser unerwartet großen Korrektur ist das Seitenverhältnis beiderlei Triangulationen wenig schwankend. Der mittlere Fehler der logarithmischen Korrektur einer der 7 verglichenen Seiten ist nur 16,8 E. d. 7. Dez. oder $1 : 250000$ der Länge. Vergleicht man im Anschluß daran die dem Linienzug Strauch—Döbra angehörigen Brechungswinkel beiderlei Triangulationen, so ergibt sich ein mittlerer Unterschied für die beobachteten und auf der Station ausgeglichenen Winkel von $0,749''$ und für die im Netz ausgeglichenen Winkel von $0,590''$. Wollte man beiden Triangulationen gleiche Genauigkeit zubilligen, so wäre der mittlere Fehler eines beobachteten Winkels auf $0,53''$, eines ausgeglichenen auf $0,42''$ zu schätzen. Nach der Ausgleichung des sächsischen Netzes für sich ist der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nur $0,33''$.

Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Netzes kann uns schließlich noch dazu dienen, die Lotabweichung des sächsischen Ausgangspunktes Großenhain gegenüber dem preußischen Rauenberg bei Berlin abzuleiten. Zu diesem Zwecke rechnen wir die Länge und die Azimute der geodätischen Linie Rauenberg—Großenhain nach den Formeln von Helmert.

Die preußischen geodätischen Koordinaten von Großenhain ergeben sich aus den sächsischen ($51^{\circ}18'20,050''$ Breite und 0° Länge) durch Hinzufügung der Konstanten $\delta\varphi_0$ und L_0 und werden demnach in der Helmerischen Bezeichnung:

$$B_k = 51^{\circ}18'22,302'' \quad L_k = 31^{\circ}13'21,374''.$$

Die Koordinaten für Rauenberg sind:

$$B_i = 52^{\circ}27'12,021'' \quad L_i = 31^{\circ}2'4,928''.$$

Hieraus ergibt sich als Logarithmus der Entfernung

$$\lg S = 5,1081464,$$

für das Azimut in Rauenberg

$$T_{ik} = 174^{\circ} 8' 15,04'',$$

für jenes in Großenhain

$$T_{ki} = 354^{\circ} 17' 7,24''.$$

Wir rechnen auch noch die 18 Koeffizienten p , q , r für die Übertragung der Lotabweichung:

$p_1 = -1,00090$	$q_1 = 0,00399$	$r_1 = -0,00671$
$p_2 = 0,00159$	$q_2 = -0,98416$	$r_2 = -1,00000$
$p_3 = 0,03220$	$q_3 = -0,00514$	$r_3 = -0,00514$
$p_4 = 0,00200$	$q_4 = 0,01997$	$r_4 = -1,26103$
$p_5 = -4130,5$	$q_5 = 659,5$	$r_5 = 659,5$
$p_6 = 591,1$	$q_6 = 407,4$	$r_6 = 407,4$

Zur Überführung auf internationale Meter hat man dem Logarithmus der Entfernung S 58 E. d. 7. Dez. hinzuzufügen, was eine Verlängerung der Strecke um $dS = 1,71$ m bedeutet. Dieser Verlängerung entspricht eine Breitenänderung von Großenhain um $d\varphi = -p_3 dS = -0,0322 \cdot 1,71 = -0,055''$ und eine Längenänderung $d\lambda = -q_3 dS = 0,00311 \cdot 1,71 = 0,005''$, so daß die richtiggestellten geographischen Koordinaten von Großenhain

$$\varphi = 51^{\circ} 18' 20,05'' \quad \lambda = 31^{\circ} 13' 21,379''$$

werden. Die astronomisch bestimmten Koordinaten sind dagegen

$$\varphi' = 51^{\circ} 18' 22,247'' \quad \lambda' = 31^{\circ} 13' 14,378''.$$

Die Breite φ' ist direkt bestimmt, die Länge λ' durch Hinzufügung des astronomisch bestimmten Längenunterschiedes von $0^m 44,630^s = 11' 9,45''$ der Punkte Rauenberg—Großenhain zur Länge von Rauenberg gerechnet¹⁾.

¹⁾ Dieser Längenunterschied ist der Ausgleichung des zentraleuropäischen Längennetzes von Prof. Th. Albrecht, Astronomische Nachrichten Bd. 167, Nr. 3993–94, S. 157 entnommen.

Es ergibt sich hieraus unter Zugrundelegung des Besselschen Ellipsoides eine Lotabweichung von Großenhain gegenüber Rauenberg im Betrage von

$$\xi = \varphi' - \varphi = -2,197''; \quad \lambda' - \lambda = \eta : \cos \varphi = -7,001'' \\ \text{oder } \eta = -4,377''.$$

Die Verlängerung $dS = 1,71$ m hat auch noch eine Azimutänderung in Großenhain im Betrage

$$da = -r_3 dS = 0,00321 \cdot 1,71 = 0,005''$$

im Gefolge. Das sächsische Netz ist in Großenhain richtig astronomisch orientiert. An das preußische Netz, das in Rauenberg richtig astronomisch orientiert ist, angehängt, zeigt es in Großenhain eine Verdrehung von $\vartheta = 3,268''$, wozu noch das eben ermittelte $da = 0,005''$ hinzukommt. Der Unterschied zwischen der astronomischen Orientierung in Großenhain und der von Rauenberg geodätisch übertragenen beträgt somit $3,273''$. Aus ihm würde sich eine Lotabweichung

$$\eta = -3,273'' \operatorname{ctg} \varphi' = -2,622''$$

in ostwestlicher Richtung ergeben. In der Laplaceschen Gleichung, welche die Gleichheit beider Bestimmungen von η ausdrückt, findet sich demnach ein Widerspruch von: $-4,377 + 2,622 = -1,755''$, der Beobachtungsfehlern zur Last zu legen ist. Das einfache Mittel beider Bestimmungen ist $\eta = -3,500''$, dem ein Unterschied der Längen $\lambda' - \lambda = -5,598''$ entspricht.

Herr A. Börsch hat aus anderem Material als Lotabweichungskomponenten für Großenhain gegen Rauenberg auf Bessels Ellipsoid $\varphi' - \varphi = -2,41''$ und $\lambda' - \lambda = -7,89''$ gefunden¹⁾.

Nach dieser Abschweifung seien noch die geographischen Koordinaten der bayerischen Anschlußpunkte im preußischen System zusammengestellt, welche dann in passende rechtwinklige Koordinaten umgesetzt werden können.

¹⁾ Lotabweichungen Heft IV. Veröffentlichungen des K. preuß. geod. Instituts. Neue Folge, Nr. 39. Berlin 1909, S. 96 und 97.

	φ	λ
Steigekoppe	50° 2' 37,2611"	26° 58' 24,6214"
Kreuzberg	50° 22' 16,4473"	27° 38' 53,1882"
Großgleichberg,		
preuß. Punkt	50° 23' 21,8296"	28° 15' 37,3092"
Döbra, Zentrum	50° 16' 45,9792"	29° 18' 40,5978"
Ochsenkopf,		
sächs. Pfeiler	50° 1' 54,5303"	29° 28' 40,7889"
Kapellenberg	50° 11' 21,4278"	29° 58' 7,3691"

Um nun zu rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte zu gelangen, welche der historischen Entwicklung und den Bedürfnissen der bayerischen Landesvermessung Rechnung tragen, wurde den obigen geographischen Koordinaten jene von München (nördlicher Frauenturm) zugesellt, wie sie aus dem früheren Anschluß, der alten bayerischen Triangulation, an die preußische hervorgegangen sind, nämlich:

	φ	λ
München nördl. Frauenturm	48° 8' 22,6270"	29° 14' 27,8220"

Nunmehr werden alle Punkte mittels der Schreiberschen Tabellen konform auf die Gaußsche Bildkugel übertragen und auf dieser wird ein rechtwinklig sphärisches Koordinatensystem gewählt, das den Meridian von München als Abszissenachse und München selbst als Ausgangspunkt hat. Diese Koordinaten werden dann unter Beibehaltung der Abszissen und unter Streckung der Ordinaten in konforme, ebene, rechtwinklige Koordinaten übergeführt, deren künftige Einführung in Bayern ich für zweckmäßig halte. Diese Koordinaten finden sich in der Schluß-tabelle V. Die Tabelle wurde noch um die Näherungskordinaten sämtlicher zukünftiger bayerischer Hauptdreieckspunkte bereichert, welche damit ein Gegenstück zu der am Schlusse der früheren Arbeit angehängten Tabelle der genäherten geographischen Koordinaten der gleichen Punkte bildet. Die neuen Koordinaten wurden jedoch nicht aus den geographischen umgerechnet, sondern aus den alten rechtwinkligen unter sachgemäßer Benützung der früher ermittelten Drehung

und Maßstabsänderung des alten bayerischen Systems gegenüber dem preußischen. Die Umrechnung ist übrigens nur auf einige Dezimeter genau, genügt aber ausreichend für die Näherungswerte, die der Ausgleichung der endgültigen neuen Koordinaten zu Grunde zu legen sind. Für die durch ¹⁾ hervor-
gehobenen Neupunkte des Netzes, deren genaue Lage im Gelände zurzeit noch nicht bestimmt ist, sind natürlich vor der Ausgleichung bessere Näherungskordinaten als die hier gegebenen abzuleiten.

Berichtigung.

In der mehrerwähnten Abhandlung: „Das Verhältnis der bayerischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München“ diese Berichte vom 7. Februar 1914 findet sich ein bedauerliches Versehen infolge eines Rechenfehlers bei der Auswertung des Übertragungskoeffizienten q_2 (S. 65), welcher den Wert $-0,91075$ statt $-0,08925$ haben soll. Hiedurch wird der erste Ausdruck für λ_k (S. 67) $3,926 \pm 0,52''$. Mit dem zweiten $1,853 \pm 1,30''$ zu einem Mittel kombiniert ergibt sich $\lambda_k = 3,637 \pm 0,48''$. Hienach ändert sich auch die Bemerkung auf Seite 68. Es muß heißen: Die Ostwestkomponente (nämlich der Lotabweichung auf dem Helmertschen Ellipsoid) beträgt $3,637''$. Der Widerspruch gegen die Laplacesche Bedingung hat sich vermindert; er beträgt jetzt in Länge $2,073 \pm 1,40''$, in Zenitdistanz $1,38 \pm 0,93''$.

Tabelle V.

Genäherte Koordinaten der zukünftigen Hauptdreieckspunkte und
endgültige Koordinaten der möglichen Anschlußpunkte.

Hauptdreieckspunkte	Abszisse + nördlich <i>x</i>	Ordinate + östlich <i>y</i>	Bemerkung
1. Aenger	— 45902,7	— 106028,9	
2. Arber	109469,5	114079,2	
3. Asbach ¹⁾	31801,2	— 22698,0	
4. Asten	— 3820,0	85784,8	
5. Aufkirchen b. Erding	18695,2	21507,4	
6. Braunau	18141,9	108252,5	
7. Brennb erg	104081,5	60376,2	
8. Dillen berg	146385,3	— 57504,8	
9. Döbra ²⁾	237953,034	5004,305	Preußischer Punkt
10. Eggersdorf ¹⁾	47985,4	30003,5	
11. Eichelberg	105190,2	10161,2	
12. Frankenwarte	184063,9	— 119985,4	
13. Großgleichberg ²⁾	250640,359	— 69733,207	Preußischer Punkt
14. Günzelhofen ¹⁾	11402,0	— 33789,2	
15. Habsberg	130621,9	4289,2	
16. Haid	59604,4	90128,5	
17. Hesselberg	103943,5	— 76483,6	
18. Hochgern	— 42669,6	70758,3	
19. Hoheleite	144748,4	— 94881,1	
20. Hohenstein	161026,9	— 10902,8	
21. Johannesbrunn	39148,9	66618,6	
22. Kapellenberg ²⁾	228177,204	51957,864	Sächsischer Punkt
23. Königsberg ¹⁾	84949,6	— 2924,8	
24. Kreuzberg ²⁾	249373,861	— 113309,665	Bayerischer Punkt
25. Mitbach	2958,7	33970,7	

¹⁾ Die Lage dieses Punktes im künftigen bayerischen Netz ist noch
unsicher, da er noch nicht versteint ist.

²⁾ Zukünftige Anschlußpunkte.

Hauptdreieckspunkte	Abszisse + nördlich <i>x</i>	Ordinate + östlich <i>y</i>	Bemerkung
26. Mühlhausen	61650,0	58810,2	
27. München	0,0	0,0	
28. Murleinsnest	195352,7	— 82934,4	
29. Oberhof	— 5999,4	58906,4	
30. Ochsenkopf ²⁾	210436,915	16981,653	Sächsischer Punkt
31. Peißenberg	— 37404,1	— 41987,3	
32. Pöttmes	47852,8	— 38176,4	
33. Rauchwanne	70345,1	— 78342,1	
34. Roggenburg	15999,1	— 99816,4	
35. Rohr	71922,9	28278,2	
36. Schweitenkirchen	40803,9	2501,2	
37. Silberhütte ¹⁾	180387,2	59442,4	
38. Stauffersberg	34381,5	— 63434,5	
39. Steigekoppe ²⁾	214194,048	— 162399,595	Bayerischer Punkt
40. Teuchatz	191561,2	— 35928,6	
41. Wendelstein	— 48296,4	32959,6	
42. Wülzburg	98724,4	— 41573,5	

1) Die Lage dieses Punktes im künftigen bayerischen Netz ist noch unsicher, da er noch nicht versteint ist.

2) Zukünftige Anschlußpunkte. Die Koordinaten von Ochsenkopf bedürfen noch einer Kontrolle (abgeschl. am 6. VIII. 1914).