Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ein Satz über Dirichletsche Reihen.

Von **Harald Bohr.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

In der vorliegenden Abhandlung werde ich einen Satz über den funktionentheoretischen Charakter der durch eine Dirichletsche Reihe dargestellten Funktion beweisen. Dieser Satz, welcher sich auf den allgemeinen Typus Dirichletscher Reihen bezieht, d. h. auf die Reihe

$$(1) \qquad f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo

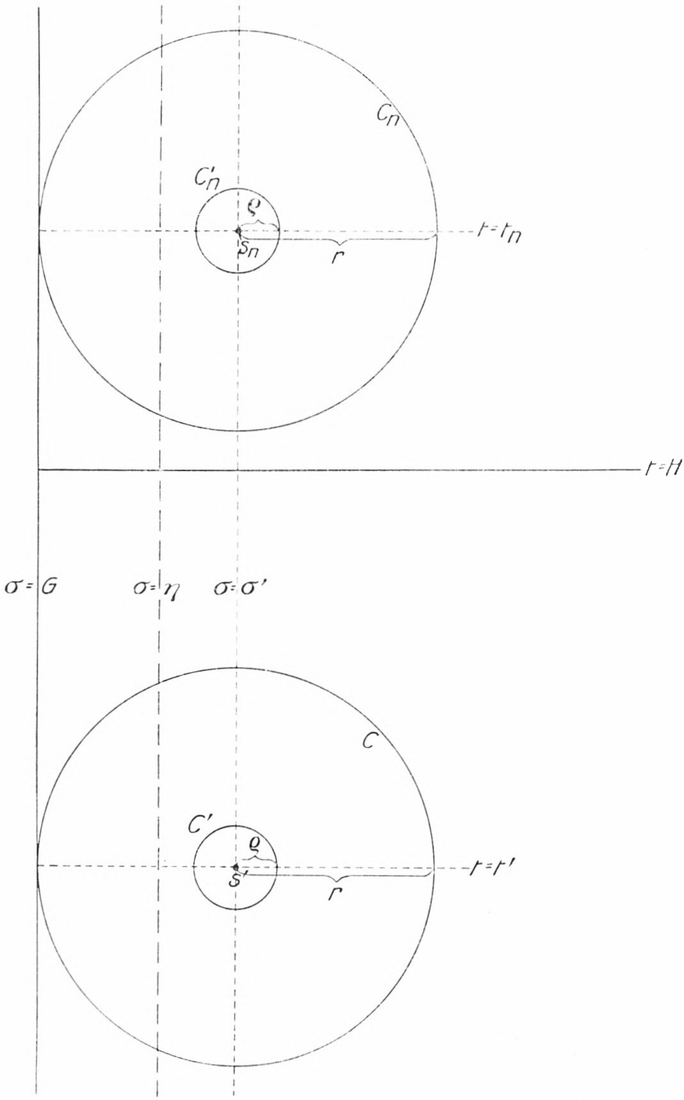
$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim \lambda_n = \infty$$

ist, lautet folgendermaßen:

Satz: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) in einer gewissen Halbebene absolut konvergent. Zwei reelle Zahlen G und H seien so beschaffen, daß die durch die Reihe (1) definierte Funktion $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ regulär und beschränkt ist. Dann ist $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > G$ regulär und beschränkt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist ein η so vorhanden, daß (1) für $\sigma \geqq \eta$ absolut konvergiert und somit für $\sigma > \eta$ eine reguläre beschränkte Funktion $f(s)$ darstellt. Ferner ist nach Voraussetzung $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ (wo G offenbar $< \eta$ angenommen werden darf, da der Satz im Falle $G \geqq \eta$ trivial ist) regulär und dem Betrage nach $\leqq K$, wo K

eine positive Konstante bezeichnet. Die Behauptung lautet: die Funktion $f(s)$ ist in der ganzen Halbebene $\sigma > G$ regulär und beschränkt; ich werde sogar zeigen, daß, für $\sigma > G$, $f(s)$



regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ ist, wo K die obige Konstante bedeutet. Dies ist offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe, daß bei festen $\sigma' > \eta$, $t' < H$ die für $\sigma > \eta$ durch (1) definierte Funktion $f(s)$ innerhalb des (teilweise der Halbebene $\sigma > \eta$ angehörigen) Kreises C (siehe Figur) mit dem Mittelpunkte $s' = \sigma' + it'$ und dem Radius $r = \sigma' - G$ regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ ist; denn zu jedem gegebenen Punkte s der Viertelebene $\sigma > G$, $t \leqq H$ können σ' und t' so gewählt werden, daß der Punkt s im Innern von C liegt. Es bezeichne C' den mit C konzentrischen Kreis, dessen Radius $\varrho = \frac{1}{2}(\sigma' - \eta)$ ist, und der somit ganz der Halbebene $\sigma > \eta$ angehört.

Ich werde zunächst die Existenz einer reellen Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ mit den beiden folgenden Eigenschaften beweisen:

1. Es ist für jedes $n \geqq 1$

$$t_n > H + r$$

(woraus folgt, daß das Innere des Kreises C_n mit dem Mittelpunkte $s_n = \sigma' + i\,t_n$ und dem Radius r ganz der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ angehört).

2. Wenn für jedes $n = 1, 2, \ldots$

$$f(s + i\,(t_n - t')) = f_n(s)$$

gesetzt wird, ist gleichmäßig innerhalb C', d. h. für $|s - s'| < \varrho$,

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

(Mit anderen Worten, es strebt die Differenz der Werte, welche $f(s)$ in zwei „entsprechenden" Punkten der Kreise C' und C_n' (siehe Figur) annimmt, gleichmäßig gegen 0 für ins Unendliche wachsendes n.)

Um die Existenz einer derartigen Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots$ zu beweisen, genügt es offenbar zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Zahl $T > H + r$ so zu beweisen, daß innerhalb C'

$$|f(s) - f(s + i\,(T - t'))| < \varepsilon,$$

d. h. (da ja für $|s-s'|<\varrho$ die beiden Punkte s und $s+i(T-t')$ der Halbebene $\sigma>\eta$ angehören)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (s+i(T-t'))}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| < \varepsilon$$

ist.

Wegen $\sigma'-\varrho>\eta$ läßt sich zunächst ein $N=N(\varepsilon)$ derart bestimmen, daß für alle T und $|s-s'|<\varrho$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n (\sigma'-\varrho)} \cdot 2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Es erübrigt die Existenz eines $T>H+r$ so zu beweisen, daß innerhalb C'

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, oder, was offenbar mehr aussagt, so daß

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n (\sigma'-\varrho)} \left|1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

ist. Die Existenz eines $T>H+r$, das (2) befriedigt, ist unmittelbar folgendermaßen festzustellen: Weil die Summe auf der linken Seite von (2) nur eine endliche Anzahl Glieder enthält, gibt es offenbar ein $\varepsilon'>0$, so daß (2) erfüllt ist, wenn für alle $n=1, 2, \ldots, N$ die Zahl $\lambda_n(T-t')$ auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet absolut genommen kleiner als ε' ist, d. h. wenn $\frac{\lambda_n}{2\pi}(T-t')$, modulo 1 betrachtet, absolut genommen kleiner als $\varepsilon''=\frac{\varepsilon'}{2\pi}$ ist. Daß diese letzte Forderung aber für gewisse beliebig große T (also speziell für ein $T>H+r$) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus einem der allereinfachsten — und unmittelbar zu beweisenden — Sätze in der Theorie der Diophantischen Approximationen, welcher aussagt: Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_N$ beliebige reelle Zahlen; dann kommt im N-dimensionalen Raume der Punkt

$(tx_1, tx_2, \ldots, tx_N)$, wenn jede Koordinate tx_n modulo 1 reduziert wird, immer wieder einmal (für ins Unendliche wachsendes t) innerhalb eine beliebig vorgegebene Umgebung des Anfangspunktes $(0, 0, \ldots, 0)$ des N-dimensionalen Raumes.

Nachdem somit die Existenz einer Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots$ mit den beiden obigen Eigenschaften festgestellt ist, läßt sich nunmehr auf Grund des folgenden bekannten Stieltjesschen Lemmas der Beweis unseres Satzes in wenigen Worten vollenden.

Lemma[1]): Es seien C und C' zwei konzentrische Kreise in der komplexen s-Ebene, mit Radien r und $\varrho < r$. Es möge für alle $n = 1, 2, \ldots$ die Funktion $f_n(s)$ innerhalb C regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ sein, wo K eine von n und s unabhängige positive Zahl bedeutet, und es sei gleichmäßig innerhalb des kleineren Kreises C'

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

Dann existiert die Funktion $f(s)$ (die selbstverständlich innerhalb C' regulär ist) innerhalb des ganzen Kreises C als eine reguläre analytische Funktion, und es ist innerhalb C

$$f(s) = \lim_{n=\infty} f_n(s).$$

Dies Lemma ist unmittelbar auf unsere Funktionen $f(s)$ und $f_n(s) (n = 1, 2, \ldots)$ und die beiden Kreise C und C' anzuwenden. Wir berücksichtigen:

1. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ ist $f_n(s) = f(s + i(t_n - t'))$ innerhalb C regulär und absolut genommen $\leqq K$ (weil ja für s innerhalb C der Punkt $s + i(t_n - t')$ dem Kreise C_n und somit a fortiori der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ angehört).

---

[1]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Paris 1905, Bd. II, S. 369–370. [Der Satz ist seitdem in hohem Grade verallgemeinert worden. Vgl. Carathéodory und Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. Berliner Sitzungsberichte, 1911, S. 587—613.]

2. Innerhalb des kleineren Kreises C' ist, wie oben festgestellt, gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

Das Stieltjessche Lemma ergibt daher, daß die Funktion $f(s)$ im ganzen Kreise C als reguläre analytische Funktion existiert, und daß daselbst

$$f(s) = \lim_{n=\infty} f_n(s)$$

ist, also a fortiori (wegen $|f_n(s)| \leqq K$), daß $f(s)$ innerhalb C regulär und absolut genommen $\leqq K$ ist.

Damit ist der Satz bewiesen.