Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale.

Von **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Juni 1913.

Es sei die (reelle oder komplexe) Funktion $\varphi(x)$ für $x > 1$ definiert und für jedes $y > 1$ von $x = 1$ bis $x = y$ eigentlich integrabel. In Analogie eines Tauberschen Potenzreihensatzes hatte ich[1]) bewiesen:

Es sei für $x \to \infty$

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right),$$

also (a fortiori)

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x)\, x^{-s}\, dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \to 0$ sei

$$f(s) \to l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^\infty \varphi(x)\, dx = l,$$

das heißt für $x \to \infty$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y)\, dy \to l.$$

In Analogie eines Littlewoodschen (den Tauberschen enthaltenden) Potenzreihensatzes läßt sich zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn die Voraussetzung

1) Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVIII (1907), S. 8—28], S. 25—27.

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

durch die geringere

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

ersetzt wird. Dies ist bisher nirgends gemacht worden und soll auch hier nur als Spezialfall eines neuen allgemeineren Integralsatzes bewiesen werden, der so dazu steht wie meine[1]) Verallgemeinerung des Littlewoodschen Potenzreihensatzes zu diesem selbst. Den wesentlichsten Kunstgriff beim Beweise habe ich aus Herrn Littlewoods Abhandlung übernommen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der

Satz: Es sei für $x \geqq 1$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y)\,dy$$

beschränkt:

$$|\Phi(x)| \leqq K,$$

also

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s}\,dx$$

für $s > 0$ konvergent und

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right| \leqq 2K \qquad \text{für } 1 \leqq u \leqq v.$$

Es bezeichne $\psi(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ die hiernach endliche obere Grenze von

$$\left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right|$$

für jedes Wertepaar u, v, das den Ungleichungen

$$1 \leqq u \leqq v \leqq u^{1+\varepsilon}$$

[1]) Über einen Satz des Herrn Littlewood [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 265—276], § 3 (S. 270 – 273).

genügt. Es sei für $\varepsilon \to 0$

$$\psi(\varepsilon) \to 0.$$

Es sei für $s \to 0$

$$f(s) \to l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^\infty \varphi(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \Phi(x) = l.$$

Vorbemerkung: Dieser Satz enthält den oben angekündigten (meinen 1907er Wortlaut mit O statt o, d. h. die Behauptung: Aus $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$, $f(s) \to l$ folgt $f(0) = l$). Denn aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right), \quad f(s) = O(1)$$

folgt nach einem anderen Satze meiner 1907er Arbeit[1])

$$\Phi(x) = O(1).$$

Aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

folgt ferner, wenn c so gewählt wird, daß für $x \geqq 1$

$$|\varphi(x)| < \frac{c}{x \log(2x)}$$

ist, für $1 \leqq u \leqq v \leqq u^{1+\varepsilon}$ (bei jedem $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned}
\left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right| &\leqq c \int_u^{u^{1+\varepsilon}} \frac{dy}{y \log(2y)} \\
&= c \log \frac{\log(2u^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\
&< c \log \frac{\log((2u)^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\
&= c \log(1+\varepsilon),
\end{aligned}$$

1) L. c., S. 27—28.

also

$$\psi(\varepsilon) \leqq c \log(1+\varepsilon),$$
$$\psi(\varepsilon) \to 0.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $l=0$ angenommen werden, da man sonst nur die Definition von $\varphi(x)$ auf der Strecke $1 \leqq x \leqq 2$ abzuändern hätte.

Nach der Voraussetzung

$$\Phi(x) = O(1)$$

ist

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx$$

nicht nur für $s > 0$ konvergent, sondern ebenda beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiierbar[1]). Für $s > 0$ und ganzes[2]) $r \geqq 1$ ist demgemäß

$$f^{(r)}(s) = (-1)^r \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} \log^r x \, dx$$

und wegen[3])

$$f(s) = s \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} dx,$$

da auch hier Differentiieren unter dem Integralzeichen gestattet ist,

$$f^{(r)}(s) = (-1)^{r-1} r \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} \log^{r-1} x \, dx$$
$$+ (-1)^r s \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} \log^r x \, dx.$$

Wegen

$$|\Phi(x)| \leqq K$$

ist für festes $r \geqq 1$

---

[1]) Bekanntlich gilt dies sogar in der Halbebene $\Re(s) > 0$; vgl. z. B. meine Arbeit Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen [diese Sitzungsberichte, Bd. XXXVI (1906), S. 151—218], S. 212, Satz III'''.

[2]) r ist in der Folge durchweg ganz.

[3]) Vgl. z. B. die in der vorletzten Anmerkung zitierte Abhandlung, S. 212, Z. 1.

$$
\begin{aligned}
|f^{(r)}(s)| &\leqq Kr\int_1^\infty x^{-s-1}\log^{r-1}x\,dx + Ks\int_1^\infty x^{-s-1}\log^r x\,dx \\
&= Kr(-1)^{r-1}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\int_1^\infty x^{-s-1}\,dx + Ks(-1)^r\frac{d^r}{ds^r}\int_1^\infty x^{-s-1}\,dx \\
&= Kr(-1)^{r-1}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left(\frac{1}{s}\right) + Ks(-1)^r\frac{d^r}{ds^r}\left(\frac{1}{s}\right) \\
&= Kr\frac{(r-1)!}{s^r} + Ks\frac{r!}{s^{r+1}} \\
&= \frac{2Kr!}{s^r} \\
&= O\left(\frac{1}{s^r}\right).
\end{aligned}
$$

Nach dem (von Herrn Littlewood herrührenden) Hilfssatz 2 meiner Arbeit aus den Rendiconti (in dem hier $x = 1 - s$ zu substituieren ist) ist also für $r > 0$

$$s^r f^{(r)}(s) \to 0;$$

wenn für $s > 0$, $r \geqq 0$

$$s^{r+1}\int_1^\infty \Phi(x)\,x^{-s-1}\log^r x\,dx = h_r(s)$$

gesetzt wird, ist folglich

$$f(s) = h_0(s) \to 0,$$

$$s^r f^{(r)}(s) = (-1)^{r-1}\,r\,h_{r-1}(s) + (-1)^r h_r(s) \to 0 \qquad \text{für } r \geqq 1,$$

also

$$h_r(s) \to 0 \qquad \text{für } r \geqq 0.$$

Nun ist für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geqq 1$

$$
\begin{aligned}
h_r(s) &= \Phi(\xi)\,s^{r+1}\int_1^\infty x^{-s-1}\log^r x\,dx + s^{r+1}\int_1^\infty(\Phi(x) - \Phi(\xi))\,x^{-s-1}\log^r x\,dx \\
&= \Phi(\xi)\,r! + s^{r+1}\int_1^\infty(\Phi(x) - \Phi(\xi))\,x^{-s-1}\log^r x\,dx,
\end{aligned}
$$

$$|\Phi(\xi)|\,r! \leqq |h_r(s)| + s^{r+1}\int_1^\infty|\Phi(x) - \Phi(\xi)|\,x^{-s-1}\log^r x\,dx.$$

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ fest gegeben.

Für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geqq 1$ ist mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(\varepsilon)$ (da auf der Strecke $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqq x \leqq \xi^{1+\varepsilon}$ entweder $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqq x \leqq \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{1+\varepsilon}$ oder $\xi \leqq x \leqq \xi^{1+\varepsilon}$ ist)

$$s^{r+1} \int\limits_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)|\, x^{-s-1} \log^r x\, dx \leqq \psi(\varepsilon)\, s^{r+1} \int\limits_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} x^{-s-1} \log^r x\, dx$$

$$\leqq \psi(\varepsilon)\, s^{r+1} \int\limits_1^\infty x^{-s-1} \log^r x\, dx$$

$$= \psi(\varepsilon)\, r!\,.$$

Andererseits ist für $\xi > 1$, $r \geqq 1$, wenn s den speziellen Wert $s = \frac{r}{\log \xi}$ hat,

$$s^{r+1} \int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)|\, x^{-s-1} \log^r x\, dx \leqq 2\, K s^{r+1} \int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-s-1} \log^r x\, dx,$$

also, weil $x^{-s} \log^r x$ sein Maximum bei $x = \xi$ hat[1]),

$$\leqq 2\, K s^{r+1} \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{-s} \left(\log\left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)\right)^r \int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-1}\, dx$$

$$= 2\, K \frac{r^{r+1}}{\log^{r+1} \xi} \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{-\frac{r}{\log \xi}} \frac{\log^r \xi}{(1+\varepsilon)^r} \frac{\log \xi}{1+\varepsilon}$$

$$= \frac{2\, K}{1+\varepsilon}\, r^{r+1}\, e^{-r\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \log(1+\varepsilon)\right)}$$

$$= o(r^r e^{-r})$$

$$= o(r!),$$

---

[1]) Wegen $\frac{d}{dx}(x^{-s} \log^r x) = -\, s x^{-s-1} \log^r x + r x^{-s-1} \log^{r-1} x$
$= x^{-s-1} \log^{r-1} x\, (-\, s \log x + r) = s x^{-s-1} \log^{r-1} x\, (-\log x + \log \xi)\,.$

ferner

$$s^{r+1}\int\limits_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty}|\Phi(x)-\Phi(\xi)|\,x^{-s-1}\log^r x\,dx \leqq 2\,Ks^{r+1}\int\limits_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty}x^{-s-1}\log^r x\,dx$$

$$= 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^r\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-(1+\varepsilon)(s+1)}\log^r y\cdot(1+\varepsilon)\,y^{\varepsilon}\,dy$$

$$= 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-s(1+\varepsilon)-1}\log^r y\,dy$$

$$\leqq 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\xi^{-s\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-s-1}\log^r y\,dy$$

$$\leqq 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\xi^{-s\varepsilon}\int\limits_{1}^{\infty}y^{-s-1}\log^r y\,dy$$

$$= 2\,Kr!\,(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^r e^{-r\varepsilon}$$

$$= o(r!).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $r = r(\varepsilon)$ derart, daß für $\xi > 1$

$$|\Phi(\xi)|\,r! \leqq \left|h_r\left(\frac{r}{\log\xi}\right)\right| + \psi(\varepsilon)\,r! + \varepsilon\,r! + \varepsilon\,r!$$

ist. Für $\xi > \xi_0(r) = \xi_0(\varepsilon)$ ist aber

$$\left|h_r\left(\frac{r}{\log\xi}\right)\right| < \varepsilon\,r!,$$

also

$$|\Phi(\xi)|\,r! < (3\,\varepsilon + \psi(\varepsilon))\,r!,$$

$$|\Phi(\xi)| < 3\,\varepsilon + \psi(\varepsilon).$$

Wegen $\psi(\varepsilon) \to 0$ ist daher

$$\Phi(\xi) \to 0.$$

Göttingen, den 28. Mai 1913.