Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden.

Von **Ludwig Berwald.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Die zuerst von Monge behandelten nicht-zylindrischen Flächen, auf denen die beiden Scharen von Krümmungslinien in eine einzige zusammenfallen, sind namentlich in letzter Zeit, nachdem Herr Stäckel die Aufmerksamkeit der Geometer von neuem auf sie gelenkt hatte, ziemlich häufig behandelt worden. Dennoch scheint eine möglichst rein geometrische Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften bisher noch nicht versucht worden zu sein. Diese Lücke soll der erste Abschnitt (Nr. 1 bis 6) der vorliegenden Arbeit ausfüllen, der naturgemäß keine wesentlichen neuen Resultate bringt. Die gewonnene geometrische Anschauung führt zu einer einfachen Erzeugungsweise der betrachteten „Mongeschen" Flächen mit Hilfe einer unebenen „isotropen" Fläche (d. h. eines Minimalkegels oder der Tangentenfläche einer krummen Minimallinie); diese Erzeugung, sowie die aus ihr fließenden analytischen Darstellungen bilden den Hauptinhalt des zweiten Abschnittes (Nr. 7—12). Den erwähnten beiden Möglichkeiten bei der Wahl der „zugehörigen" isotropen Fläche entspricht eine Einteilung in Mongesche Flächen erster und zweiter Art. Flächen erster Art und konstanten Krümmungsmaßes gibt es nicht: ihre Stelle nehmen die Kugeln ein; die Fläche zweiter Art konstanten Krümmungsmaßes sind unter dem Namen Serretsche Flächen bekannt. Bei der analytischen Darstellung aller dieser

Flächen stützt sich die Arbeit großenteils auf die von Herrn Study neuerdings entwickelte Theorie der charakteristischen Invarianten der krummen Linien auf Minimalkegeln und der krummen Minimallinien[1]).

Im Anschluß an die analytische Darstellung werden einige geometrische Eigenschaften der Mongeschen Flächen erster Art angegeben (Nr. 8), namentlich aber gelingt die Bestimmung aller algebraischen Mongeschen Flächen (Nr. 8 und 9). Geometrisch sind diese algebraischen Flächen dadurch charakterisiert, daß ihre Zentrakurve entweder eine algebraisch rektifizierbare krumme, nicht-isotrope Linie oder eine algebraische krumme Minimallinie ist. Man gelangt zu diesem Satze mit Hilfe eines Formelsystems, das aus der gegebenen Flächendarstellung für die Zentrakurve einer Mongeschen Fläche folgt, und das besonders dadurch bemerkenswert ist, daß es eine Lösung der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen darstellt; wie ich nachträglich bemerkte, ist dieses Formelsystem bereits von Herrn de Montcheuil[2]) angegeben worden, jedoch ziemlich unbekannt geblieben (Nr. 10). Ein zweites für die Zentrakurven der Mongeschen Flächen auftretendes Gleichungssystem gestattet die Darstellung der charakteristischen Differentialinvarianten einer beliebigen nicht-isotropen krummen Linie, mit Ausnahme der Kreise, durch die einfachste charakteristische Invariante einer Minimalevolute und die Ableitungen der Bogenlänge der gegebenen Kurve nach einem natürlichen Parameter

---

[1]) E. Study, a) Zur Differentialgeometrie der analytischen Curven. Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 1—50. (Der Amer. Math. Soc. vorgelegt am 10. September 1908.)

b) Die natürlichen Gleichungen der analytischen Curven im Euclidischen Raume. Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), p. 249—279. (Der Amer. Math. Soc. vorgelegt am 26. Februar 1910.)

a) wird weiterhin als A. C., b) als N. Gl. zitiert.

[2]) Die Literatur hierüber siehe Nr. 10, Anm.

der Minimalevolute[1]). Anschließend werden alle Mongeschen Flächen bestimmt, die eine gegebene krumme Linie zur Zentrakurve haben, und ihre Verteilung auf die beiden Arten angegeben (Nr. 11). Endlich wird noch eine bisher übersehene, wenigstens nirgends ausdrücklich ausgesprochene Doppelverhältnis-Eigenschaft abgeleitet (Nr. 12).

Der dritte Abschnitt (Nr. 13—16) bespricht die einfachsten algebraischen Mongeschen Flächen, namentlich diejenigen dritter Ordnung. Es handelt sich dabei um die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invarianten drei Typen solcher Flächen dritter Ordnung. Nach einer Diskussion von Flächen, die sie repräsentieren (Nr. 13 und 14), wird der Nachweis geliefert, daß diese drei Typen die einzigen sind (Nr. 15). Speziell existiert auch keine Serretsche Fläche dritter Ordnung; die einfachste Serretsche Fläche ist von der vierten Ordnung (Nr. 16).

Der letzte Abschnitt (Nr. 17—20) beschäftigt sich ausführlicher mit den Mongeschen Flächen erster Art, namentlich mit ihrer Abwickelung aufeinander (Nr. 17) und auf die Flächen zweiter Art (Nr. 20). Die Eigenschaft aller aufeinander abwickelbaren Flächen erster Art, aus einer beliebigen unter ihnen durch Bewegung oder Umlegung hervorzugehen, führt auf eine besondere Klasse dieser Flächen, die mit der Theorie der automorphen Funktionen in nahem Zusammenhang steht: jede dieser „automorphen“ Mongeschen Flächen erster Art ist dadurch ausgezeichnet, daß sie durch eine bestimmte („zugehörige“) Gruppe von Rotationen um die Spitze des zugehörigen Minimalkegels auf sich selbst abgewickelt wird (Nr. 18). Eine Anwendung dieser Betrachtungen auf gewisse, in einem besonderen quadratischen R_3 gelegene, krumme Minimallinien des R_4 ist angefügt (Nr. 19).

Da die mir bekannt gewordene Literatur über die Mongeschen Flächen in den vorhergegangenen Arbeiten nur unvollständig angeführt ist, so mag zum Schlusse noch ein chrono-

[1]) Wegen der Benennungen vgl. auch E. Study, A. C.

logisches Verzeichnis derselben hier Platz finden, das übrigens keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt[1]):

1. G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie [5. éd. par J. Liouville. Paris (1850), § XIX. De la surface dont les deux rayons de courbure en chaque point sont égaux entre eux et dirigés du même coté. p. 196—211][2]).
2. J. A. Serret, Note sur une équation aux dérivées partielles. Journ. math. p. appl. (1) 13 (1848), p. 361—368.
3. O. Bonnet, Note sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. C. R. Ac. sc. Paris 42 (1856), p. 1067—1070.
4. L. Lévy, Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles. J. math. p. appl. (4) 8 (1892), p. 351—383 [nur p. 372 f.].
5. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris I (1887), p. 84 Anm.; III (1894), p. 294 f., 315.
6. S. Lie, Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 48 (1896), p. 466—477[3]).

---

[1]) Die Arbeiten, die in diesem Verzeichnis genannt sind, werden weiterhin so zitiert, daß z. B. [Einl. 8)] die hier unter 8) genannte Arbeit bedeutet.

[2]) Mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung dieser Flächen

$$4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=0$$

hat sich Monge bereits in der Abhandlung: Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles, Hist. Mém. math. phys. Ac. sc. Paris, année 1784 (1787), p. 118—192 beschäftigt [p. 145 ff.].

[3]) Bekanntlich hat schon Monge [1)] angegeben, daß eine beliebige Fläche mit gleichen und gleichgerichteten Krümmungsradien [variablen Krümmungsmaßes] Enveloppe einer Schar von Kugeln ist, deren Mittelpunkt eine willkürliche [von Monge als reell vorausgesetzte] krumme Linie beschreibt, und deren Halbmesser gleich der Bogenlänge dieser krummen Linie ist. Die entsprechende geometrische Erzeugungsweise der Serretschen Flächen als Enveloppen einer Schar von Kugeln konstanten Halbmessers, deren Mittelpunkt eine beliebige krumme Minimallinie beschreibt, dürfte dagegen Lie als erster erkannt und ausgesprochen haben. Daß Lie die geradlinigen Flächen, die durch Bewegung einer Minimalgeraden entstehen, schon um 1870 gekannt hat, steht nach einer Bemerkung des Herrn Stäckel in [7)] fest. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Engel entnehme ich, daß diese Flächen zwar implizite unter den Integralflächen gewisser partieller Differentialgleichungen erster Ordnung enthalten sind, die Lie in der Arbeit: Über Complexe, insbe-

7. P. Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 48 (1896), p. 478—504. [I. Zur Theorie der Krümmungslinien; auch: II. Über die Fundamentalgrößen der Flächentheorie, Nr. 4.]
8. G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Flächen.* Leipzig (1902), p. 115—116, (165), 175, 177, 213, 227—229, 240—241, 354.
9. P. Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 54 (1902), p. 101—120. [VIII. Über die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen.]
10. M. de Montcheuil, Sur une classe de surfaces. Thèse prés. à la fac. sc. Toulouse, No. 23 (juin 1902). Paris, 4^0, 75 Seiten. [Seconde partie: Applications II. 2o: Surfaces à rayons de courbure égaux et de même sens, p. 39—42; III. Trois fonctions sont nulles, p. 42 f.]
10a. J. Drach, Sur certaines déformations remarquables. C. R. Ac. sc. Paris, 136 (1903), p. 996—998 [auf p. 997].
11. Burke Smith, Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines. Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1906), p. 164—170. [Einleitende Bemerkung und p. 167 f.]
12. U. Sbrana, Le superficie di Serret negli spazi a curvatura costante. Atti Acc. Lincei (mat. fis.) (5) 15 (1906), p. 537—542.
13. L. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Mem. mat. fis. Soc. It. (dei XL) (3) 14 (1907), p. 3—74 [§§ 22—24].
14. U. Sbrana, Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti. Mem. mat. fis. Soc. It. (dei XL) (3) 14 (1907), p. 275—289.
15. J. Lipke, On the shortest distance between consecutive straight lines. Bull. Amer. math. Soc. 13 (1907), p. 489—497 [§ 3. Geometric interpretations. Theorem VII.]
16. L. Raffy, Sur les surfaces à lignes de courbure confondues. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 459—462.
17. L. Raffy, Applicabilité et modes divers de représentation des surfaces à lignes de courbure confondues. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 618—620.

---

sondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. 5 (1872), p. 146—256 [auf p. 192 ff.] bespricht; daß Lie sie aber, außer in der im Texte genannten Abhandlung, nirgends ausdrücklich erwähnt. Man wird also annehmen dürfen, daß auch Lies Kenntnis der erwähnten geometrischen Erzeugung der Serretschen Flächen bis etwa 1870 zurückreicht. Nach Lie findet sich diese Erzeugung wohl zuerst in: E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre etc. Paris (1898), p. 70.

18. L. Raffy, Sur les résaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 740—742.

Die Noten 16)—18) geben die wichtigsten Resultate von:

19. L. Raffy, Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues. Bull. Soc. math. France 36 (1908), p. 150—184.

20. E. Study, Minimalcurven und Serretsche Flächen. Amer. J. math. 32 (1910), p. 264—278.

21. H. Beck, Die Gruppe der Minimalgeraden. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 64 (1912), p. 35—56 [nur Abschn. 1 auf p. 50].

22. L. Weickmann, Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden. Inaug.-Diss. München (Univ.) 1912. 8°. 51 S.

23. L. P. Eisenhart, Ruled surfaces with isotropic generators. Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), p. 29—40.

24. P. Franck, Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als kugelgeometrisches Analogon der abwickelbaren Flächen. Mitt. math. Ges. Hamburg 5 (1913), Heft 2.

Endlich sei auf eine demnächst erscheinende Arbeit:

25. H. Beck, Zur Lehre von den Mongeschen Flächen. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 22 (1913)

hingewiesen, in der eine außerordentlich einfache explizite Darstellung **aller** Mongeschen Flächen gegeben wird. Die Auffindung der Serretschen Flächen wird auf das Problem der Traktrix oder der Kurven eines Nullsystems zurückgeführt.

Den Hinweis auf die unter 6) bzw. 12) und 14) genannten Arbeiten verdanke ich der Freundlichkeit der Herren F. Böhm und Weickmann. Herrn Engel bin ich für seine Mitteilungen über das Auftreten der behandelten Flächen bei Lie, und über einen ihm von Lie angegebenen Beweis, den ich in den Text aufgenommen habe, Herrn Beck für die Mitteilungen über seine oben angeführte, noch nicht erschienene Arbeit zu bebesonderem Danke verpflichtet.

I. Geometrische Ableitung der Eigenschaften der Mongeschen Flächen.

1. Wir stellen zunächst einige Definitionen und Sätze aus der Geometrie in einer Minimalebene, die weiterhin benutzt werden, ohne Beweis auf[1]).

---

[1]) Einige dieser meist ganz elementaren Sätze, die übrigens alle bekannt sein dürften, findet man bei L. Raffy, Contribution à la géo-

(1) (a) Satz: Alle Minimalgeraden[1]) einer Minimalebene sind untereinander parallel.

(b) Satz: Alle Geraden, die eine Minimalgerade μ senkrecht schneiden, liegen in der Minimalebene m durch μ; umgekehrt schneidet jede Minimalgerade μ einer Minimalebene m alle Geraden von m senkrecht. μ ist mithin eine Normale von m.

Folgesatz: Jede Minimalgerade μ steht auf sich selbst und auf allen parallelen Minimalgeraden senkrecht.

(2) Erklärung: Eine nicht-isotrope[2]) Gerade γ wird orientiert,

---

métrie des éléments isotropes. Bull. sc. math. (2) 32 (1908), p. 264—278. Weiteres über den Gegenstand in: H. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene. Stzgsb. Berl. Math. Ges. 12 (1913), p. 14—30.

[1]) In der vorliegenden Arbeit werden, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist, ausschließlich eigentliche Punkte, Gerade, Ebenen betrachtet.

[2]) Wir stellen hier zur besseren Übersicht die mittels der Beiworte „isotrop" und „nicht-isotrop" gebildeten Termini, mit Angabe ihrer Bedeutung, zusammen.

isotrope Kurve = (gerade oder krumme) Minimalkurve	nicht-isotrope Kurve = (gerade oder krumme) Nicht-Minimalkurve [Study]
isotrope Gerade = Minimalgerade	nicht-isotrope Gerade = Euklidische Gerade [Study] = Nicht-Minimalgerade
isotroper Vektor = Vektor, der in einer Minimalgeraden liegt	nicht-isotroper Vektor = Vektor, der in einer Euklidischen Geraden liegt
isotrope krumme Linie = krumme Minimallinie [Study]	nicht-isotrope krumme Linie = krumme Nicht-Minimallinie
isotrope Flächen = Minimalebenen, Minimalkegel [Study] und Tangentenflächen einer krummen Minimallinie	nicht-isotrope Flächen = alle Flächen außer den isotropen Flächen
isotrope Ebene = Minimalebene	nicht-isotrope Ebene = Nicht-Minimalebene = Euklidische Ebene [Study]
unebene isotrope Flächen = Minimalkegel und Tangentenflächen einer krummen Minimallinie.	nicht-isotrope Kugel = gewöhnliche Kugel = Kugel mit endlichem, von Null verschiedenem Quadrate des Halbmessers.

indem man ihr eines von den beiden möglichen Tripeln von Richtungskosinus (a, b, c) beilegt, die sich dann als Koordinaten eines in der Geraden γ gelegenen „zugehörigen" Einheitsvektors auffassen lassen.

Unter einer orientierten Geraden ist im folgenden stets eine orientierte nicht-isotrope Gerade zu verstehen.

Die orientierte Gerade γ mit dem zugehörigen Einheitsvektor (a, b, c) soll mit $\gamma\ (a, b, c)$ bezeichnet werden, so oft es sich um die Hervorhebung ihrer Richtung handelt.

(3) Erklärung: Ein geordnetes Paar $A \rightarrow B$ von Punkten A, B bestimmt eine orientierte Strecke $\overrightarrow{AB}$ und einen Vektor V_A^B, d. h. eine orientierte Strecke [einen Vektor] vom Anfangspunkte A und vom Endpunkte B.

Ein Vektor [eine orientierte Strecke] heißt ein nicht-isotroper bzw. isotroper Vektor [eine nicht-isotrope bzw. isotrope orientierte Strecke], je nachdem er [sie] in einer nicht-isotropen oder isotropen Geraden liegt.

(4) Satz: Jeder isotrope Vektor (dessen Anfangs- und Endpunkt eigentliche Punkte sind), hat die Länge Null.

(5) Erklärung: Zwei in einer Minimalebene m gelegene (nicht-isotrope)[1]) Einheitsvektoren (a, b, c) und (a', b', c') heißen gleichartig oder ungleichartig orientiert, je nachdem ihr inneres Produkt $(a \mid a')$ den Wert $+1$ oder -1 hat.

Zwei orientierte, nicht-isotrope Gerade $\gamma\ (a, b, c)$ und $\gamma'\ (a', b', c')$ [zwei nicht-isotrope Vektoren, zwei orientierte nicht-isotrope Strecken] einer Minimalebene heißen gleichartig oder ungleichartig orientiert, je nachdem die zugehörigen Einheitsvektoren es sind.

Wir sprechen von zwei gleichartig oder ungleichartig orientierten Geraden [Vektoren, Strecken], einer Minimal-

---

Im Texte bleiben überall, wo aus dem Zusammenhange hervorgeht, ob es sich um ein isotropes oder nicht-isotropes Gebilde handelt, die Worte isotrop und nicht-isotrop weg.

[1]) Dieser Zusatz kann wegbleiben, da wir nur eigentliche Punkte von m betrachten.

ebene, und verstehen darunter zwei gleichartig oder ungleichartig orientierte nicht-isotrope Geraden [Vektoren, Strecken].

(6) Satz: Zwei gleichartig orientierte Gerade einer Minimalebene bilden einen Winkel, dessen Hauptwert Null ist (kürzer: den Winkel Null).

(7) Satz: Sind A und B zwei Punkte einer Minimalgeraden μ und C ein Punkt außerhalb μ in der Minimalebene m durch μ, so ist stets:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

(8) Satz: Zieht man durch die Punkte einer Minimalgeraden μ in ihrer Minimalebene m gleichartig orientierte Strecken von gleicher (endlicher)[1]) Länge, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken auf einer zweiten Minimalgeraden μ'.

(9) Satz: Eine krumme ebene singuläre Linie (= krumme Linie in einer Minimalebene) hat außer den Minimalgeraden ihrer Ebene keine weiteren Filarevolventen.

2. Enthält eine Fläche[2]) eine Minimalgerade μ, so liegen nach Nr. 1 (1) alle in den Punkten von μ errichteten Flächennormalen in der Minimalebene m durch μ. Insbesondere ist das auf einer Fläche, die mindestens eine Schar

---

[1]) Dieser Zusatz kann wegbleiben, da wir nur eigentliche Punkte von m betrachten.

[2]) Wir verstehen im folgenden unter „Kurve", „Fläche", „Kongruenz" stets eine analytische Kurve, analytische Fläche, analytische Kongruenz; unter „Punkt einer Kurve bzw. Fläche" und „Gerade einer Kongruenz" stets einen Punkt „allgemeiner Lage" der Kurve bzw. Fläche, und eine Gerade „allgemeiner Lage" der Kongruenz; und wir betrachten nur solche Bereiche einer Kurve, Fläche bzw. Kongruenz, deren sämtliche Punkte bzw. Gerade solche allgemeiner Lage sind. Ingleichen verstehen wir unter einem „analytischen Gesetz" im folgenden ausnahmslos ein im Sinne der Funktionentheorie eindeutiges analytisches Gesetz, unter „Funktion" eine eindeutige analytische Funktion.

von ∞^1 Minimalgeraden[1]) enthält („Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden" im weiteren Sinn[2])), für jede dieser Minimalgeraden μ der Fall; und wenn man von den isotropen Flächen absieht, worunter die Minimalebenen, die Minimalkegel und die Tangentenflächen einer krummen Minimallinie verstanden sein sollen[3]), so fällt die Flächennormale in einem Punkte P einer solchen Fläche nicht mit der Minimalgeraden μ selbst zusammen[4]).

Liegen zwei benachbarte, einer Schar von orientierten Geraden angehörige, nicht-isotrope Gerade in einer und derselben Minimalebene m, so sind sie notwendigerweise gleichartig orientiert [Nr. 1 (5)]; dies gilt insbesondere von zwei benachbarten nicht-isotropen der (in stetiger Weise orientierten) Normalen einer nicht-isotropen Fläche. Zieht man demnach durch einen festen Punkt P gleichsinnig Parallele zu allen, in stetiger Weise orientierten Normalen einer nicht-isotropen Fläche längs einer auf ihr liegenden Minimalgeraden μ, so

---

[1]) Wenn wir von ∞^1-, ∞^2-...Scharen sprechen, so setzen wir als Definitionsgesetz der Schar ein analytisches Gesetz voraus, und zählen komplexe Konstante.

[2]) Wir folgen diesem Sprachgebrauch; manche Autoren nennen die Mongeschen Flächen (siehe [4])) so.

[3]) Auch hier ist der Sprachgebrauch wechselnd; die im Texte gegebene Definition dürfte die zweckmäßigste sein.

[4]) Es ist hier vielleicht angebracht, eine Einteilung der nicht-isotropen Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden zu geben.

1. Flächen mit zwei Scharen
   a) von je ∞^1 untereinander parallelen Minimalgeraden: nicht isotrope oder Euklidische Ebenen,
   b) von je ∞^1 zueinander windschiefen Minimalgeraden: nicht-isotrope oder gewöhnliche Kugeln;

2. Flächen mit einer Schar (von ∞^1 krummen Minimallinien und einer Schar)
   a) von ∞^1 parallelen Minimalgeraden: unebene Zylinder von Minimalgeraden oder unebene Minimalzylinder [Study],
   b) von ∞^1 windschiefen Minimalgeraden: die Mongeschen Flächen.

liegen diese Parallelen nach Nr. 1 (1) in einer isotropen Ebene und sind gleichartig orientiert. Trägt man von P aus auf jeder dieser Parallelen im positiven Sinne die Einheitsstrecke ab, so ist nach Nr. 1 (8) der Ort der Endpunkte aller dieser Strecken eine Minimalgerade. Also:

Enthält eine nicht-isotrope Fläche eine Minimalgerade μ, so entspricht dieser in der sphärischen Abbildung der Fläche wieder eine (zu μ parallele) Minimalgerade μ'.

Da μ zu μ', ihrem sphärischen Bilde, zugleich parallel und senkrecht ist [Nr. 1 (1)], so folgt weiter der Satz:

Eine Minimalgerade, die einer nicht-isotropen Fläche angehört, ist zugleich Asymptotenlinie und Krümmungslinie der Fläche.

Umgekehrt ist auf einer nicht-isotropen Fläche jede Kurve λ, die zugleich Asymptotenlinie und Krümmungslinie ist, eine Minimalgerade.

Denn λ ist nach Definition zum sphärischen Bilde λ' gleichzeitig parallel und senkrecht; die Tangenten von λ und λ' in entsprechenden Punkten sind folglich Minimalgerade; λ' ist also eine sphärische Minimalkurve, d. h. eine Minimalgerade, und daher ist auch λ eine Minimalgerade.

Für die nicht-isotropen Flächen mit einer einzigen Schar von Minimalgeraden folgen insbesondere die Sätze:

(1) Das sphärische Bild eines unebenen Minimalzylinders ist eine zu den Erzeugenden des Zylinders parallele Minimalgerade.

(2) Der Minimalgeradenschar (μ) auf einer Mongeschen Fläche entspricht bei der sphärischen Abbildung eine Minimalgeradenschar (μ') der Kugel.

3. Bei jeder nicht-isotropen Fläche mit einer Schar (μ) von Minimalgeraden μ schneiden sich die in den Punkten einer beliebigen dieser Minimalgeraden μ errichteten Flächennormalen ν alle in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte K.

Für die nicht-isotropen Kugeln und Ebenen, deren sämtliche Normalen durch einen (eigentlichen bzw. uneigentlichen) Punkt gehen, sowie für die unebenen Minimalzylinder, die abwickelbare Flächen[1]) sind, ist der Satz evident. Er bedarf also nur für die Mongeschen Flächen eines Beweises.

Betrachten wir die Kongruenz $((\nu))$ der Normalen ν einer solchen Fläche. Für eine beliebige Normale ν ist diejenige Minimalebene m, die durch sie und die ihren Fußpunkt enthaltende Minimalgerade μ gelegt ist, die eine ihrer Brennebenen, weil nach Nr. 2 alle Flächennormalen längs μ in m liegen. Da die Kongruenz $((\nu))$ eine Normalenkongruenz ist, so müssen die beiden Brennebenen einer beliebig gewählten Normalen ν aufeinander senkrecht stehen. Nun schneiden alle Ebenen, die zu einer Minimalebene m senkrecht stehen, und von ihr verschieden sind, m längs einer ihrer Minimalgeraden; da ν keine Minimalgerade ist, so muß also die zweite Brennebene der Normalen ν mit der ersten Brennebene, der Minimalebene m, zusammenfallen.

Die Kongruenz $((\nu))$ der Normalen ν besitzt daher bloß ∞^1 Brennebenen, nämlich die Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ der Schar (μ). Liegen aber die Geraden einer Kongruenz in den Ebenen e einer einfach unendlichen Schar (e), so fallen ihre Brennebenen dann und nur dann zusammen, wenn alle diejenigen Geraden der Kongruenz, die in einer und derselben Ebene e liegen, durch einen Punkt der Schnittlinie dieser Ebene mit der benachbarten Ebene der Schar (e) gehen[2]).

Damit ist der obige Satz bewiesen.

---

[1]) Unter einer abwickelbaren Fläche verstehen wir eine krumme, in jede (nicht-isotrope) Ebene ohne Dehnung verbiegbare Fläche, mit anderen Worten jede Enveloppe von ∞^1, kein Büschel bildenden, nicht-isotropen Ebenen.

[2]) Die Definitionen der Brennpunkte und Brennebenen einer Kongruenz von Geraden sind projektivisch und zueinander dual; also ist dieser Satz, als das duale Gegenstück eines von Herrn Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces II, No. 321, p. 15) bewiesenen Satzes, richtig.

4. An den zuletzt bewiesenen Satz schließen sich einige weitere an, die zum Teile unmittelbar aus ihm folgen:

(1) Auf den unebenen Minimalzylindern und auf den Mongeschen Flächen fallen die beiden Scharen von Krümmungslinien in die Schar (μ) von Minimalgeraden der Fläche zusammen. Diese Eigenschaft kommt unter allen nicht-isotropen Flächen nur den genannten Flächen zu.

Der erste Teil dieses Satzes folgt aus Nr. 3. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Engel verdanke ich den folgenden ihm von Lie angegebenen geometrischen Beweis des zweiten Teiles:

Fallen auf einer (notwendigerweise unebenen) nicht-isotropen Fläche in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsrichtungen zusammen, so muß, da die Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes sowohl zu seinen Haupttangentenrichtungen als auch zu seinen Minimalrichtungen konjugiert sind, notwendig eine Haupttangentenrichtung und eine Minimalrichtung mit der einzigen Hauptkrümmungsrichtung zusammenfallen. Die eine (und nur die eine) Schar von Minimalkurven der Fläche besteht daher aus Haupttangentenkurven und infolgedessen aus geraden Linien.

Auf einem ganz ähnlichen Gedankengange beruht der von Raffy[1]) gegebene geometrische Beweis desselben Satzes.

(2) In jedem Punkte einer nicht-isotropen Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden sind die beiden Hauptkrümmungsradien gleich lang und gleich gerichtet, d. h. es fallen die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte jedes Punktes der Fläche zusammen. Diese Eigenschaft kommt unter allen nicht-isotropen Flächen nur den genannten Flächen zu.

Der erste Teil des Satzes folgt wieder aus Nr. 3. Der

[1]) Siehe [Einl. 19)], p. 154 f., wo der Beweis allerdings nur für die Mongeschen Flächen gegeben wird; doch ist er leicht auf die unebenen Minimalzylinder zu übertragen.

zweite Teil, für den schon Monge[1]) einen allerdings nicht mehr genügenden, geometrischen Beweis gegeben hatte, läßt sich folgendermaßen beweisen:

Hat eine nicht-isotrope Gerade, die einer Kongruenz angehört, zwei voneinander verschiedene Brennpunkte, dann hat sie auch zwei voneinander verschiedene Brennebenen, und umgekehrt. Ein Zusammenfallen der Brennpunkte zieht also entweder ein Unbestimmtwerden der Brennebenen (so daß jede Ebene durch die Gerade Brennebene ist), oder ihr Zusammenfallen nach sich.

Für jede Gerade der Kongruenz tritt Unbestimmtheit der Brennebenen nur bei den eigentlichen und uneigentlichen Geradenbündeln ein. Fallen dagegen für jede Gerade einer Kongruenz beide Brennebenen zusammen, so besteht die Kongruenz entweder:

1) aus der einen Schar von Haupttangenten einer nicht-abwickelbaren nicht-isotropen Fläche b[2]), oder

2) aus ∞^2 Geraden, die eine eigentliche oder uneigentliche (gerade oder krumme) Linie λ schneiden und so angeordnet sind, daß alle diejenigen Geraden, die durch einen Punkt P von λ gehen, in einer Ebene e durch die Tangente von λ in P liegen[2]).

Sieht man von dem in 2) enthaltenen trivialen Falle aller in einer Ebene gelegenen Geraden ab, so sind im ersten Falle die ∞^2 Tangentialebenen der Fläche b, im zweiten die ∞^1 Ebenen e die Brennebenen der Kongruenzgeraden.

Soll eine Kongruenz, in der die Brennebenen jeder Geraden zusammenfallen, aus den Normalen einer Fläche f bestehen[3]), so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Brennebenen jeder Kongruenzgeraden auf sich selbst senkrecht stehen, d. h. Minimalebenen sind. Der Fall 1) ist dann, da b eine

[1]) Siehe [Einl. 1)], p. 208.

[2]) Vgl. G. Darboux, a. a. O., Nr. 320 f., p. 13 ff., wo allerdings der Grenzfall einer uneigentlichen Brennkurve außer Acht gelassen ist.

[3]) Hierdurch werden die isotropen Flächen, die nur ∞^1 Normalen haben, von der Betrachtung ausgeschlossen.

nicht-isotrope Fläche sein muß, offenbar unmöglich. Im Falle 2) schneiden alle in einer Minimalebene e gelegenen Geraden der Kongruenz eine Fläche f, deren Normalen sie sind, in einer Minimalgeraden μ [Nr. 1 (1)], und die beiden Scharen von Krümmungslinien auf f fallen in die eine Schar von Minimalgeraden (μ) zusammen. Die Fläche f ist also nach (1) entweder ein unebener Minimalzylinder oder eine Mongesche Fläche.

Ein eigentliches [uneigentliches] Geradenbündel ist endlich stets die Normalenkongruenz einer Schar von parallelen, nicht-isotropen Kugeln [Ebenen].

Folgesatz: Bedeutet K das (Gaußsche) Krümmungsmaß oder die totale Krümmung, H die mittlere Krümmung (= Summe der reziproken Hauptkrümmungsradien) einer nicht-isotropen Fläche, so sind die nicht-isotropen Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden durch

$$H^2 - 4K = 0$$

charakterisiert.

(3) Der Ort der Krümmungsmittelpunkte:

(a) einer nicht-isotropen Kugel [Ebene] reduziert sich auf einen eigentlichen [uneigentlichen] Punkt;

(b) eines unebenen Minimalzylinders ist diejenige in der uneigentlichen Ebene gelegene Tangente des absoluten Kegelschnittes, die diesen im uneigentlichen Punkte der Minimalgeraden des Zylinders berührt;

(c) einer Mongeschen Fläche ist eine (eigentliche) krumme Linie auf der Enveloppe der ∞^1 Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ der Schar (μ) auf der Fläche.

(a) ist evident; (b) folgt leicht aus der Eigenschaft der abwickelbaren Flächen, längs einer allgemein gelegenen Erzeugenden überall dieselbe nicht-isotrope Tangentialebene zu besitzen; (c) ergibt sich aus Nr. 3.

(4) Ist μ eine (isotrope) Erzeugende einer Mongeschen Fläche, und errichtet man in den Punkten M

von μ die Schmiegungsebenen der dort schneidenden krummen[1]) Minimallinien $\bar{\mu}$ der Fläche, so umhüllen diese einen Minimalkegel, dessen Spitze der zu μ gehörende Hauptkrümmungsmittelpunkt K der Fläche ist[2]). Die Tangenten der Minimallinien $\bar{\mu}$ in ihren Schnittpunkten mit μ liegen auf derjenigen nicht-isotropen Kugel vom Mittelpunkte K, welche die Fläche längs μ berührt.

Ist $\bar{\mu}$ eine Minimalkurve auf einer beliebigen nicht-isotropen Fläche, so ist die Schmiegungsebene in einem Punkte M von $\bar{\mu}$ stets eine der beiden Minimalebenen durch die in M errichtete Flächennormale. Im vorliegenden Falle ist die Schmiegungsebene der krummen Minimallinie $\bar{\mu}$ im Schnittpunkte M mit der Erzeugenden μ diejenige in M errichtete isotrope Normalebene $\overline{m}$ der Fläche, die nicht durch μ geht. (Von dem höchstens in besonderen Punkten der Fläche eintretenden Fall, daß die Minimallinien $\bar{\mu}$ und μ sich in M berühren, sehen wir hier ab). Bewegt sich M auf μ fort, so geht die in M errichtete Normale ν der Fläche, also auch die isotrope Normalebene $\overline{m}$ beständig durch den zu μ gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkt K der Fläche.

Ist $\bar{\tau}$ die Tangente von $\bar{\mu}$ in M, und P ein beliebiger Punkt von $\bar{\tau}$, so ist ferner, nach Nr. 1 (7):

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP},$$

womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

---

[1]) Es ist möglich, daß einzelne der Minimallinien $\bar{\mu}$ Minimalgerade sind. In diesem Fall vertritt die Minimalebene der Minimalgeraden $\bar{\mu}$ die Stelle der Schmiegungsebene (im obigen Satze).

[2]) Zum Vergleich geben wir den (bekannten) entsprechenden Satz für eine nicht-isotrope Kugel: *Die Minimalebene durch eine Erzeugende* μ der einen Minimalgeradenschar (μ) einer nicht-isotropen Kugel enthält auch die zu μ parallele Erzeugende $\bar{\mu}$ der zweiten Minimalgeradenschar $(\bar{\mu})$. Beschreibt μ die Schar (μ), so beschreibt $\bar{\mu}$ die Schar $(\bar{\mu})$, und die Minimalebene durch μ und $\bar{\mu}$ umhüllt einen Minimalkegel, der den Kugelmittelpunkt zum Scheitel hat.

5. Trägt man auf allen (in stetiger Weise orientierten) Normalen einer nicht-isotropen Fläche f mit einer Schar (μ) von Minimalgeraden μ, von den Punkten der Fläche aus, in einem bestimmten der beiden Normalensinne solche endliche Strecken σ ab, die längs jeder Minimalgeraden μ konstant sind, hingegen von einer Minimalgeraden zur anderen nach einem analytischen Gesetze variieren können, so ist der Ort der Endpunkte aller dieser Strecken im allgemeinen wiederum eine nicht-isotrope Fläche f_1 mit einer Schar (μ_1) von Minimalgeraden μ_1. Nur für eine einzige bestimmte Art des Variierens der Strecken σ erhält man, bei den Mongeschen Flächen und den nicht-isotropen Kugeln, keine Fläche mehr, sondern:

a) bei einer Mongeschen Fläche f eine krumme Linie auf der Enveloppe i der ∞^1 Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ,

b) bei einer nicht-isotropen Kugel f den Kugelmittelpunkt[1]).

Daß der Ort der Endpunkte der Strecken σ im allgemeinen eine Fläche f_1 mit einer Schar (μ_1) von Minimalgeraden μ_1 ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen unter Nr. 2. Es bleibt zu zeigen, daß f_1 stets eine nicht-isotrope Fläche ist; dabei wird man ganz naturgemäß auch auf die Ausnahmsfälle geführt.

Zunächst kann f_1 keine Minimalebene sein. Denn in jeder Minimalebene m durch eine Gerade μ der Schar (μ) liegt eine Minimalgerade μ_1 der Schar (μ_1) von f_1. Da durch jede der Minimalgeraden μ_1 einer Minimalebene f_1 außer f_1 selbst keine zweite Minimalebene gelegt werden kann, so müßten, wenn f_1 Minimalebene wäre, alle Minimalebenen m mit f_1 und folglich miteinander, und mit f, identisch sein, was der Voraussetzung widerspricht, daß f eine nicht-isotrope Fläche ist.

---

[1]) Der wesentliche Inhalt dieses Satzes findet sich anscheinend zuerst in der Inaug.-Diss. des Herrn Weickmann [Einl. 22)], p. 24 f.

Dagegen könnte noch, falls f eine Mongesche Fläche oder eine nicht-isotrope Kugel ist, f_1 eine unebene isotrope Fläche i sein, nämlich die Enveloppe der Minimalebenen m. Da sich aber, nach Nr. 3 und Nr. 4 (3), bei einer Kugel und bei einer Mongeschen Fläche (mindestens) je ∞^1 Flächennormalen in einem und demselben Punkte K der isotropen Fläche i schneiden, so ist auch dieser Fall unmöglich, und an seine Stelle treten die Ausnahmefälle a) und b).

6. Von hier ab beschäftigen wir uns ausschließlich mit den Mongeschen Flächen. Zunächst leiten wir den Zusammenhang ab, der zwischen der Kurve der Hauptkrümmungsmittelpunkte oder der Zentrakurve einer Mongeschen Fläche und dem Krümmungsmaße der Fläche besteht.

(1) Wir setzen erstens voraus, daß die Zentrakurve $\varkappa$ einer Mongeschen Fläche f eine krumme Minimallinie sei. Ist dann K ein Punkt von $\varkappa$, und m die Schmiegungsebene von $\varkappa$ in K, so schneidet [Nr. 3 und Nr. 4 (3)] m die Fläche f in einer Minimalgeraden μ der auf f gelegenen Minimalgeradenschar (μ). Zieht man nun nach einem beliebigen analytischen Gesetz durch jeden Punkt K von $\varkappa$ in der zugehörigen Schmiegungsebene m eine nicht-isotrope gerade Linie ν, so ist [Nr. 1 (1)] $\varkappa$ eine orthogonale Trajektorie der Geradenschar (ν). Die Gerade ν schneidet die Fläche f in einem Punkte F von μ, und da ν durch K geht und in m liegt, so ist ν Normale von f in F. Beschreibt ν die Schar (ν), so beschreibt F demnach ebenfalls eine orthogonale Trajektorie φ der Schar (ν).

Da nach einem bekannten Satze zwei orthogonale Trajektorien einer Schar von ∞^1 nicht-isotropen Geraden, wie sie hier vorliegt, auf allen Geraden der Schar dieselbe Strecke abschneiden, so bleibt $\overrightarrow{FK} = R$ konstant, wenn ν die Schar (ν) beschreibt. Zieht man noch die Willkürlichkeit des (ν) definierenden Gesetzes in Betracht und beachtet, daß auch für zwei verschiedene Normalen ν und ν' durch einen und denselben Punkt K [nach Nr. 3 und Nr. 1 (7)] R konstant bleibt, so folgt der Satz:

Diejenigen Mongeschen Flächen, deren Zentrakurve eine krumme Minimallinie ist, haben konstantes Krümmungsmaß.

Umgekehrt haben die Mongeschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes eine krumme Minimallinie zur Zentrakurve; wie eine entsprechende Umkehrung des eben verfolgten Gedankenganges zeigt.

In Übereinstimmung mit anderen Autoren bezeichnen wir weiterhin die Mongeschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes als die Serretschen Flächen[1]).

(2) Zweitens werde vorausgesetzt, daß die Zentrakurve $\varkappa$ der Fläche f eine reguläre Kurve[2]) sei. Ist wieder K ein Punkt von $\varkappa$, so liegt nach Nr. 4 (3) die Tangente ν von $\varkappa$ im Punkte K in der Minimalebene durch eine erzeugende Minimalgerade μ von f. Da ferner ν, nach Voraussetzung, keine Minimalgerade ist, so müssen μ und ν sich in einem eigentlichen Punkte F schneiden, und ν ist die Normale von f in F.

Die Gesamtheit der Tangenten ν von $\varkappa$ hat demnach auf f eine gewisse Kurve φ zum Fußpunktsort; und da die Tangenten ν von $\varkappa$ zugleich Flächennormalen von f sind, so ist φ eine Filarevolvente von $\varkappa$.

Sind nun ganz allgemein: $\varkappa$ eine reguläre Kurve, φ eine ihrer Filarevolventen, K_0 der Schnittpunkt von φ und $\varkappa$, K ein variabler Punkt von $\varkappa$, F der auf der Tangente ν von $\varkappa$ in K gelegene Punkt von φ, $\overrightarrow{FK} = R$; wird ferner die krumme Linie $\varkappa$ auf eine beliebige der beiden möglichen Weisen orientiert[3]); und ist endlich, nach Annahme eines (festen) Punktes K_A auf $\varkappa$ als Anfangspunktes der Bogenlänge von $\varkappa$, s_0 bzw. s

---

[1]) Nach J. A. Serret, bei dem sie zuerst auftreten [Einl. 2)].

[2]) In der von Herrn Study (A. C.) eingeführten Terminologie, deren wir uns in dieser Arbeit durchwegs bedienen.

[3]) Die Orientierung einer nicht-isotropen krummen Linie geschieht bekanntlich dadurch, daß man die Schar der Tangenten der Kurve in stetiger Weise orientiert, und so auf jedem analytischen Faden (= filo [Segre]) der Kurve eine positive Fortschreitungsrichtung bestimmt.

der zu K_0 bzw. K gehörige Wert dieser Bogenlänge[1]), so besteht bekanntlich die Beziehung:

$$R = s - s_0,$$

oder, wenn man, um die Konstante s_0 zu eliminieren, differenziert:

$$\text{(a)} \qquad \frac{dR}{ds} = 1.$$

Im vorliegenden Falle, in welchem $\varkappa$ die Zentrakurve von f ist, bedeutet R den Hauptkrümmungsradius der Fläche f im Punkte F. Sind weiter $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K von f in F, und t ein regulärer Parameter der Zentrakurve $\varkappa$, so kann man (a) in die folgende Form umschreiben:

$$\text{(b)} \qquad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2.$$

Schließlich sind die beiden Gleichungen (a) und (b), da das Krümmungsmaß von f sich lediglich beim Fortschreiten von K auf $\varkappa$ ändert (nicht aber, wenn F auf μ fortschreitet), für jeden Punkt der Fläche f gültig.

(3) Ist endlich die Zentrakurve $\varkappa$ von f eine krumme ebene singuläre Linie[2]), und $\overline{m}$ ihre (Minimal-) Ebene, so schneidet die in einem Punkte K von $\varkappa$ errichtete Tangente ν der Kurve $\varkappa$

---

[1]) Wie überall, wo in dieser Arbeit von der Bogenlänge die Rede ist, wird hier vorausgesetzt, daß man nur solche Bereiche der Kurve betrachtet, die keinen singulären Punkt der als Funktion ihrer oberen Grenze betrachteten Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

enthalten.

[2]) Genau genommen, gilt der unter (2) gegebene Beweis ohne weiteres auch für (3). Da aber in den Lehrbüchern der Fall einer singulären ebenen krummen Linie meistens stillschweigend ausgeschlossen wird, so wurde im Texte die Formel (a) für diesen Fall eigens abgeleitet.

die Fläche f in einem Punkte F, und man schließt ebenso, wie in (2), daß ν die Normale von f in F ist. Folglich ist der Ort von F, wenn K die Kurve $\varkappa$ beschreibt, eine Filarevolvente von $\varkappa$, d. h. eine Minimalgerade [Nr. 1 (9)]; mit anderen Worten die Ebene $\overline{m}$ der Kurve $\varkappa$ schneidet die Fläche f in einer Minimalgeraden $\overline{\mu}$, die, wie leicht zu erkennen ist, der Schar (μ) der Erzeugenden von f nicht angehört[1]).

Sei nun K' ein K hinreichend nahegelegener Punkt von $\varkappa$, $\overrightarrow{KK'} = \Delta s$, ν' die Tangente von $\varkappa$ in K', und F und F' bzw. die Schnittpunkte von ν und ν' mit $\overline{\mu}$, so ist

$$\overrightarrow{FK} = R, \qquad \overrightarrow{F'K} = \overrightarrow{FK} = R \text{ [Nr. 1(7)]},$$

und wenn ΔR die Änderung bezeichnet, die R beim Übergange von K zu K' erleidet:

$$\overrightarrow{F'K'} = R + \Delta R,$$

und daher [Nr. 1 (7)]

$$\frac{\Delta R}{\Delta s} = 1;$$

und diese Beziehung besteht beständig, wenn sich K' auf $\varkappa$ in beliebiger Weise stetig gegen K bewegt[2]), also auch in der Grenzlage; womit das Bestehen der Relationen (a) und (b) auch für diesen Fall gezeigt ist. —

Infolge der Relationen (a) und (b) und des Satzes Nr. 4 (4) kann man, mit Monge[3]), jede Mongesche Fläche f nicht konstanten Krümmungsmaßes als einen Mantel der Enveloppe einer Schar von Kugeln auffassen, deren Mittelpunkt eine krumme Linie $\varkappa$ von variabler Bogenlänge beschreibt, und deren Radius gleich der Bogenlänge von $\varkappa$ ist. Ebenso kann man, mit

---

[1]) Diese Bemerkung zuerst bei H. Beck [Einl. 21)], p. 50.

[2]) D. h. auf welchem analytischen Faden von $\varkappa$ auch, der die Punkte K und K' enthält, sich K' nach K bewegt (ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern).

[3]) Einl. 1).

Lie[1]), jede Serretsche Fläche f als einen Enveloppenmantel einer Schar von nicht-isotropen Kugeln konstanten Halbmessers auffassen, deren Mittelpunkt eine krumme Minimallinie beschreibt[2]).

II. Von den Parameterdarstellungen der Mongeschen Flächen.

7. Die Ergebnisse von Nr. 3 und 4 führen zu einer einfachen geometrischen Erzeugung und analytischen Darstellung der Mongeschen Flächen. Es gilt nämlich der Satz:

Wählt man in allen Tangentialebenen m einer unebenen isotropen Fläche i, nach einem analytischen Gesetze, je eine Minimalgerade μ aus, so ist der Ort dieser Minimalgeraden μ im allgemeinen eine Mongesche Fläche.

Die Ausnahmsfälle sind:

1) Die Minimalgeraden μ fallen beständig mit den Erzeugenden von i zusammen; ihr Ort ist dann die isotrope Ausgangsfläche i. (Trivialer Fall.)

2) Die Ausgangsfläche i ist ein Minimalkegel und jede Gerade μ hat von der zu ihr parallelen Erzeugenden ι von i eine konstante, von Null verschiedene orientierte Entfernung R[3]). Der Ort der Minimalgeraden μ ist dann die (eine Regelschar (μ) der nicht-isotropen) Kugel vom Radiusquadrate R^2, deren Mittelpunkt der Scheitel S des Minimalkegels i ist[4]).

In der Tat: Da die Ebenen m bereits die isotrope Fläche i umhüllen, so kann die angegebene Konstruktion nur in dem ersten der genannten Ausnahmefälle auf eine isotrope Fläche

---

[1]) Einl. 6).

[2]) Vgl. auch Stäckel und Raffy, a. a. O. [Einl. 9) bzw. 16) und 19)].

[3]) Ist M ein Punkt von μ, J ein Punkt der zu μ parallelen Erzeugenden ι von i, so soll die Strecke $\overrightarrow{JM}$ die orientierte Entfernung der Geraden μ von der Geraden ι heißen.

[4]) Die entsprechende Erzeugung findet sich, für den besonderen Fall der Serretschen Flächen, bereits bei E. Study [Einl. 20)], p. 271.

führen. In jedem anderen Falle erhält man notwendig eine nicht-isotrope Fläche mit (mindestens) einer Schar (μ) von nicht parallelen Minimalgeraden, also [p. 152 Anm. [4])] entweder eine Mongesche Fläche oder eine nicht-isotrope Kugel. Die zweite dieser Möglichkeiten tritt dann und nur dann ein, wenn die Zentrakurve der erhaltenen Fläche sich auf einen eigentlichen Punkt S reduziert, und wenn (folglich) alle Punkte der Fläche von diesem Punkte ein konstantes, endliches, von Null verschiedenes Abstandsquadrat haben; d. h. wenn die isotrope Fläche i ein Minimalkegel vom Scheitel S, und R^2 eine beliebige, von Null verschiedene Konstante ist. In diesem Falle erhält man, je nachdem, mit welchem der beiden Werte von $\sqrt{R^2}$ man die in 2) angegebene Konstruktion ausführt, die eine oder die andere Schar von Minimalgeraden auf der Kugel vom Mittelpunkt S und vom Radiusquadrat R^2. Denn sei (μ) die Schar von Minimalgeraden auf der Kugel, die man bei Durchführung der in 2) angegebenen Konstruktion mit dem Werte $+R$ erhält, μ eine Gerade allgemeiner Lage der Schar (μ), M ein Punkt von μ, J ein Punkt der zu μ parallelen Erzeugenden ι von i; dann ist nach Konstruktion $\overrightarrow{JM} = +R$. Ist $\overline{M}$ derjenige Punkt auf der Geraden JM, für den $\overrightarrow{J\overline{M}} = -R$ ist, so liegen alle Punkte $\overline{M}$, die den Punkten M von μ auf diese Weise entsprechen, auf einer zu μ parallelen Minimalgeraden $\bar{\mu}$ [Nr. 1 (8)]. Diese gehört derselben Kugel an wie μ, aber nicht derselben Regelschar (μ), da (μ) nur alle zu μ windschiefen Erzeugenden der Kugel enthält. —

Die isotrope Ausgangsfläche i bei unserer Konstruktion ist offenbar für jede der erzeugten Flächen f die Enveloppe der Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ ihrer Minimalgeradenschar (μ) [bzw., bei der Kugel, einer beliebigen ihrer beiden Minimalgeradenscharen]. Wir nennen alle durch die angegebene Konstruktion aus einer bestimmten isotropen Ausgangsfläche i erhaltenen Flächen die zu der isotropen Fläche i zugehörigen Flächen. Umgekehrt nennen wir.

wenn f eine der zur isotropen Fläche i zugehörigen Flächen ist, i die zu f zugehörige isotrope Fläche.

Im folgenden unterscheiden wir diejenigen Mongeschen Flächen, deren zugehörige isotrope Fläche ein Minimalkegel ist, als Mongesche Flächen erster Art, von den Mongeschen Flächen zweiter Art, d. i. denjenigen, deren zugehörige isotrope Fläche die Tangentenfläche einer krummen Minimallinie ist[1]).

Unter den Mongeschen Flächen erster Art kann es nach dem oben Gesagten keine Serretschen Flächen geben, da die Flächen konstanten Krümmungsmaßes, deren zugehörige isotrope Fläche ein Minimalkegel ist, mit den nicht-isotropen Kugeln identisch sind.

8. Die in Nr. 7 dargestellte Erzeugungsweise der Mongeschen Flächen führt zu einer analytischen Darstellung derselben, der wir uns nunmehr zuwenden. Wir behandeln zuerst die Mongeschen Flächen erster Art.

Wir schicken einige Bemerkungen über die im folgenden, im Anschlusse an Herrn Study, angewandte symbolische Bezeichnungsweise voraus. Sei eine Kurve durch eine reguläre Parameterdarstellung

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

gegeben. Wir deuten die durch Differentiation nach dem Parameter t erhaltenen Systeme von Größen $x', y', z'; x'', y'', z''; \ldots; x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ als Koordinaten von Vektoren, und führen für die einfachsten elementaren Vektorinvarianten derselben oder die einfachsten „elementaren differentiellen Semiinvarianten der Kurve in Bezug auf die Bewegungsgruppe“ folgende Bezeichnungen ein[2]):

---

[1]) Wo aus dem Zusammenhange deutlich hervorgeht, daß es sich um Mongesche Flächen handelt, sprechen wir einfach von Flächen erster bzw. zweiter Art.

[2]) Wir schreiben $(i|j)_t$, $(i\,j\,k)_t$, $(i\,|\,w)_t \ldots$ usw. dann, wenn die Veränderliche t, zur Vermeidung von Zweideutig keiten, besonders hervorgehoben werden muß.

$$(i\,|\,j) = (i\,|\,j)_t = (x^{(i)}\,|\,x^{(j)}) = x^{(i)}x^{(j)} + y^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}z^{(j)},$$
$$(i, j = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$(i\,j\,k) = (i\,j\,k)_t = (x^{(i)}\,x^{(j)}\,x^{(k)}) = \begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} & x^{(k)} \\ y^{(i)} & y^{(j)} & y^{(k)} \\ z^{(i)} & z^{(j)} & z^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$(i\,j\,|\,k\,l) = (i\,j\,|\,k\,l)_t = (x^{(i)}\,x^{(j)}\,|\,x^{(k)}\,x^{(l)})$$
$$= (x^{(i)}\,|\,x^{(k)})\,(x^{(j)}\,|\,x^{(l)}) - (x^{(j)}\,|\,x^{(k)})\,(x^{(i)}\,|\,x^{(l)}), \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3 \ldots).$$

Ist weiter ω ein von dem Parameter t unabhängiger, willkürlicher Vektor, ω_1, ω_2, ω_3 seine Koordinaten, so führen wir für die einfachsten „elementaren differentialen Semikovarianten der Kurve in Bezug auf die Bewegungsgruppe“ entsprechend die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(\omega\,|\,\omega) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$(i\,|\,\omega) = (i\,|\,\omega)_t = (x^{(i)}\,|\,\omega) = x^{(i)}\omega_1 + y^{(i)}\omega_2 + z^{(i)}\omega_3, \quad (i = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$(i\,j\,\omega) = (i\,j\,\omega)_t = (x^{(i)}\,x^{(j)}\,\omega) = \begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} & \omega_1 \\ y^{(i)} & y^{(j)} & \omega_2 \\ z^{(i)} & z^{(j)} & \omega_3 \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$(i\,j\,|\,k\,\omega) = (i\,j\,|\,k\,\omega)_t = (x^{(i)}\,x^{(j)}\,|\,x^{(k)}\,\omega)$$
$$= (x^{(i)}\,|\,x^{(k)})\,(x^{(j)}\,|\,\omega) - (x^{(j)}\,|\,x^{(k)})\,(x^{(i)}\,|\,\omega), \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \ldots).$$

In diesen Symbolen können auch zwei oder mehrere der Indizes i, j, k, l einander gleich sein.

Sei nun ξ_0, η_0, ζ_0 der Scheitel des Minimalkegels ι, der zu einer analytisch darzustellenden Mongeschen Fläche erster Art gehört. Seien ferner:

$$(1) \quad \xi'(u) = i\,\frac{1-u^2}{2}, \quad \eta'(u) = -\,\frac{1+u^2}{2}, \quad \zeta'(u) = i\,u, \quad (i^2 = -1),$$

die drei Koordinaten eines Vektors, der einer Erzeugenden ι des Minimalkegels angehört[1]). Wir bezeichnen die jedesmalige

[1]) Die Koordinaten dieses Vektors können als die Ableitungen der Koordinaten einer durch die (nur unwesentlich abgeänderten) Weierstraßschen Formeln dargestellten Minimalkurve 3. Ordnung

Differentiation dieser Koordinaten nach dem Parameter u, den wir den Weierstraßschen Parameter nennen wollen, durch Hinzufügung eines weiteren Striches zu den schon vorhandenen, so daß

$$\begin{aligned}
&\xi''(u) = -iu, && \eta''(u) = -u, && \zeta''(u) = i,\\
&\xi'''(u) = -i, && \eta'''(u) = -1, && \zeta'''(u) = 0,\\
&\xi^{(4)}(u) = && \eta^{(4)}(u) = && \zeta^{(4)}(u) = 0 \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

ist. Dann ist identisch:

$$(2)\quad \begin{cases} (1|1) = 0, & & & (123) = -1,\\ (1|2) = 0, & (2|2) = -1, & & (124) = 0,\\ (1|3) = 1, & (2|3) = 0, & (3|3) = 0, & (134) = 0,\\ (1|4) = 0 \ \text{usw.} & & & \end{cases}$$

und

$$(3)\quad \begin{cases} (12\,\omega) = -(1|\omega),\ (13\,\omega) = -(2|\omega),\ (23\,\omega) = -(3|\omega),\\ \qquad\qquad (4|\omega) = 0. \end{cases}$$

Sind nun l, m, n die Koordinaten des Einheitsvektors einer orientierten Geraden γ, welche zur Tangentialebene des Minimalkegels i durch ι parallel ist, so muß nach Nr. 1 (1):

$$(4)\qquad (1|l) = 0$$

sein, und hieraus, sowie aus den ersten zwei Formeln (2) folgt

$$l = -v\,\xi' + r\,\xi''$$

nebst den entsprechenden Formeln für m und n. Wegen $(l|l) = 1$ ist weiter $r^2 = -1$, und man kann also

$$(5)\quad l = -(v\,\xi' + i\,\xi''),\ m = -(v\,\eta' + i\,\eta''),\ n = -(v\,\zeta' + i\zeta'')$$

setzen[1]), worin v eine von u unabhängige Größe ist.

$$\xi(u) = \frac{i}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right),\quad \eta(u) = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{u^3}{3}\right),\quad \zeta(u) = \frac{i}{2}u^2,\quad (i^2 = -1),$$

nach dem Parameter u aufgefaßt werden. Daran, und nur daran, soll die Bezeichnung „Weierstraßscher Parameter" für u erinnern.

[1]) Wir bemerken ausdrücklich, daß hier, wie in allen folgenden

Die Erzeugende μ der darzustellenden Mongeschen Fläche f ist zu derjenigen Erzeugenden ι des Minimalkegels i parallel, die mit ihr in derselben Tangentialebene dieses Kegels liegt. Jeder Punkt M von μ hat daher von jedem Punkte von ι, also auch vom Kegelscheitel S einen längs μ konstanten orientierten Abstand:

$$\overrightarrow{MS} = R;$$

R ist dabei [Nr. 3 und Nr. 1 (7)] der Hauptkrümmungsradius von f längs μ, und daher im Falle der Flächen erster Art eine nicht konstante Funktion von u [im Falle der Kugel konstant].

Eine jede Mongesche Fläche erster Art [sowie jede Kugel] läßt sich also durch die Gleichungen

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x = \xi_0 + R(u)\,(v\,\xi'(u) + i\,\xi''(u)) = \xi_0 + R(u)\left(u + i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,v\right), \\ y = \eta_0 + R(u)(v\,\eta'(u) + i\,\eta''(u)) = \eta_0 + R(u)\left(-iu - \dfrac{1+u^2}{2}\,v\right), \\ z = \zeta_0 + R(u)\,(v\,\zeta'(u) + i\,\zeta''(u)) = \zeta_0 + R(u)\,(-1 + iuv) \end{cases}$$

mittels der Parameter u, v darstellen[1]); bei dieser Darstellung ist die Kurvenschar $u = \text{const.}$ die [eine] Schar von Minimalgeraden auf der Fläche.

Für die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Art E, F, G; D, D', D'' der Fläche erhält man, wenn die Differentiation nach u durch Anhängung von Strichen bezeichnet wird:

$$(6)\quad \begin{cases} E = -R^2v^2 + R'^2, \qquad F = i\,R^2, \qquad G = 0; \\ D = \dfrac{1}{R}\,(2\,R'^2 - R\,R'' - i\,R\,R'v - R^2v^2),\ D' = i\,R,\ D'' = 0. \end{cases}$$

Formeln stets i als Repräsentant von $\sqrt{-1}$ steht; man kann also in jeder Formel das (explizite stehende) i durch $-i$ ersetzen, ohne daß sie aufhört, richtig zu sein.

[1]) Bemerken wir, daß durch Vertauschung von R mit $-R$ die Fläche (I) in eine in Bezug auf den Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) symmetrische Fläche übergeht, und daß wegen (10) die beiden Flächen aufeinander abwickelbar sind.

Dabei ist für $\sqrt{EG-F^2}$ der Wert

$$\sqrt{EG-F^2} = iF = -R^2 \tag{7}$$

gewählt, wodurch die Flächennormalen in stetiger Weise orientiert sind. Aus den Ausdrücken (6) ersieht man die (bekannte) Tatsache, daß auf einer Fläche erster Art die zweite Schar von Minimallinien, sowie die zweite Schar von Asymptotenlinien je durch Integration einer Riccatischen Differentialgleichung gefunden werden.

Für die Richtungscosinus a, b, c der Flächennormalen hat man:

$$\left\{\begin{aligned} a &= -\left(i\frac{1-u^2}{2}v+u\right)+\frac{1-u^2}{2}\frac{R'}{R}, \\ b &= -\left(-\frac{1+u^2}{2}v-iu\right)+i\frac{1+u^2}{2}\frac{R'}{R}, \\ c &= -(iuv-1)+u\frac{R'}{R}; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

und für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\left\{\mathfrak{x} = \xi_0 + \frac{1-u^2}{2}R', \quad \mathfrak{y} = \eta_0 + i\frac{1+u^2}{2}R', \quad \mathfrak{z} = \zeta_0 + uR'.\right. \tag{9}$$

Endlich wird das quadrierte Bogenelement:

$$ds^2 = (-R^2v^2 + R'^2)\,du^2 + 2iR^2\,du\,dv. \tag{10}$$

Man verifiziert mittels dieser Formeln für die Flächen erster Art leicht die bisher aufgestellten Sätze.

Schließlich läßt sich jede Fläche erster Art auch durch eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten x, y, z eines ihrer Punkte darstellen. Aus (I) folgt nämlich sukzessive:

$$(11)\quad \begin{cases} R(u) = \sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}, \\ v = \dfrac{(x-\xi_0)-i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}}, \\ u = \dfrac{(x-\xi_0)+i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}-(z-\zeta_0)} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}+(z-\zeta_0)}{(x-\xi_0)-i(y-\eta_0)}, \end{cases}$$

wobei das Wurzelzeichen in allen Formeln auf die gleiche Art zu bestimmen ist. Aus (11) ergibt sich die Gleichung der Mongeschen Flächen erster Art in jeder der beiden äquivalenten Formen:

$$(\mathrm{I\,a})\quad \begin{cases} \sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2} \\ = R\left(\dfrac{x-\xi_0+i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}-(z-\zeta_0)}\right), \\ \text{oder:} \\ \sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2} \\ = R\left(\dfrac{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}+(z-\zeta_0)}{x-\xi_0-i(y-\eta_0)}\right). \end{cases}$$

Von den aus (I) und (I a) entspringenden Folgesätzen erwähnen wir diese:

1) Man erhält alle **algebraischen** Mongeschen Flächen erster Art, indem man in den Gleichungen (I) für den Hauptkrümmungsradius R der Fläche irgend eine algebraische Funktion des Weierstraßschen Parameters u wählt. Die geometrische Bedeutung des Argumentes u ist dabei aus der dritten Formel (11) ersichtlich.

2) Jede Mongesche Fläche erster Art läßt sich aus derjenigen Fläche gleicher Art, deren Hauptkrümmungsradius dieselbe Funktion des Weierstraßschen Parameters u, und deren zugehörige isotrope Fläche der Minimalkegel des Anfangspunktes ist, durch bloße

Verschiebung und Spiegelung am Scheitel des verschobenen zugehörigen Minimalkegels erzeugen.

3) Das Krümmungsmaß in einem Punkte einer Mongeschen Fläche erster Art ist gleich dem reziproken quadrierten Abstande des Punktes vom Scheitel des zugehörigen Minimalkegels.

9. Um zu einer Darstellung der Mongeschen Flächen zweiter Art zu gelangen, die den in Nr. 7 angestellten geometrischen Überlegungen entspricht, stellen wir die drei Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p dar, d. h. eines solchen, der dem simultanen System

$$(1|1)_p = 0, \qquad (2|2)_p = -1, \qquad (123)_p = -1$$

genügt. Die Tangentenfläche der krummen Minimallinie λ ist dann durch

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi(p) + \xi'(p) \cdot q_1, \qquad \mathfrak{y} = \eta(p) + \eta'(p) \cdot q_1, \qquad \mathfrak{z} = \zeta(p) + \zeta'(p) \cdot q_1$$

gegeben, wo der Strich die Differentiation nach p zu zeigt, und q_1 eine von p unabhängige Veränderliche bedeutet.

Es bestehen jetzt die Identitäten:

$$(2) \qquad \begin{cases} (1|1) = 0, & & & (123) = -1, \\ (1|2) = 0, & (2|2) = -1, & & (124) = 0, \\ (1|3) = 1, & (2|3) = 0, & (3|3) = J, & (134) = J, \\ (1|4) = 0, & (2|4) = -J, & (3|4) = \frac{1}{2} J', & (234) = -\frac{1}{2} J', \end{cases}$$

wenn die charakteristische Invariante $(3|3)_p$ der Minimallinie mit $J(p)$ bezeichnet wird. Ferner ist identisch:

$$(3) \qquad \begin{cases} (12\,\omega) = -(1|\omega), \qquad (13\,\omega) = -(2|\omega), \\ (23\,\omega) = J(1|\omega) - (3|\omega), \quad \| \ (4|\omega) = \frac{1}{2} J'(1|\omega) + J(2|\omega). \end{cases}$$

Sind l, m, n die Koordinaten des Einheitsvektors einer orientierten Geraden γ, welche zur Schmiegungsebene der Minimalkurve im Punkte (ξ, η, ζ) parallel ist, so ist wieder:

(4) $$(1 \mid l) = 0, \qquad (l \mid l) = 1,$$

und man kann wiederum

(5) $$l = -(q\xi' + i\xi''),\ m = -(q\eta' + i\eta''),\ n = -(q\zeta' + i\zeta'')$$

setzen, worin q eine von p unabhängige Größe ist.

Eine jede Mongesche Fläche zweiter Art läßt sich dann durch die Gleichungen

(II) $$\begin{cases} x = \xi(p) + R(p)(q\xi'(p) + i\xi''(p)), \\ y = \eta(p) + R(p)(q\eta'(p) + i\eta''(p)), \\ z = \zeta(p) + R(p)(q\zeta'(p) + i\zeta''(p)) \end{cases}$$

mittels der Parameter p, q darstellen[1]; ξ, η, ζ, R sind darin analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich. Bei dieser Darstellung ist die Kurvenschar $p = \text{const.}$ die Schar von Minimalgeraden, und $R(p)$ der Hauptkrümmungsradius der Fläche.

Für die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Art E, F, G; D, D', D'' der Fläche erhält man hier:

(6) $$\begin{cases} E = -R^2(q^2 + J) + 2iR + R'^2, \quad F = iR^2, \quad G = 0, \\ D = \dfrac{1}{R}(2R'^2 - RR'' + iR - iRR'q - R^2q^2 - R^2J), \\ \qquad D' = iR, \qquad D'' = 0; \end{cases}$$

dabei ist wieder für $\sqrt{EG - F^2}$ der Wert

(7) $$\sqrt{EG - F^2} = iF = -R^2$$

gewählt. Aus den Ausdrücken (6) ersieht man den (bekannten)

---

[1]) Die Vertauschung von R mit $-R$ entspricht einer Umkehrung der Orientierung der Geraden γ bei der Konstruktion in Nr. 7, führt also die Fläche (I) in eine in Bezug auf die Minimalkurve (ξ, η, ζ) symmetrische Fläche über. Die beiden Flächen sind hier nicht mehr so aufeinander abwickelbar, daß symmetrisch zur Minimalkurve (ξ, η, ζ) gelegene Punkte einander entsprechen. Für den Fall der Serretschen Flächen ($R =$ const) findet sich die entsprechende Darstellung bereits bei E. Study [Einl. 20)], p. 270. Ebendort, auf p. 271, eine kurze Bemerkung über die Darstellung aller algebraischen Serretschen Flächen.

Satz, daß auf einer Fläche zweiter Art die zweite Schar von Minimallinien, sowie die zweite Schar von Asymptotenlinien je durch Integration einer Riccatischen Differentialgleichung gefunden werden.

Die Richtungskosinus a, b, c der Flächennormalen werden

$$(8) \qquad a = -(q\,\xi' + i\,\xi'') - \frac{i}{R}\,\xi' R'$$

nebst den entsprechenden Formeln für b und c. Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Fläche hat man

$$(9) \qquad \mathfrak{x} = \xi - i\,R'\xi', \qquad \mathfrak{y} = \eta - i\,R'\eta', \qquad \mathfrak{z} = \zeta - i\,R'\zeta';$$

und für das quadrierte Bogenelement:

$$(10) \quad ds^2 = (-R^2(q^2 + J) + 2i\,R + R'^2)\,dp^2 + 2i\,R^2\,dp\,dq.$$

Für $R = \text{const}$ erhält man insbesondere eine Serretsche Fläche. —

Ehe wir dazu übergehen, alle algebraischen Flächen zweiter Art zu bestimmen, leiten wir noch kurz eine der Darstellung (II) entsprechende Darstellung der Mongeschen Flächen erster Art ab, die wir im dritten Teile dieser Arbeit benötigen.

Sind, wie bisher, $\xi(p)$, $\eta(p)$, $\zeta(p)$ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p, so stellen die Gleichungen

$$(11) \qquad \mathfrak{x} = \xi'(p), \qquad \mathfrak{y} = \eta'(p), \qquad \mathfrak{z} = \zeta'(p),$$

in denen wieder der Index Differentiation nach p bezeichnet, eine krumme Linie $\varkappa$ auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes dar; $\varkappa$ ist das sphärische Bild[1]) oder ein Bestandteil des sphärischen Bildes von λ und p ist auch natürlicher Parameter der krummen Linie $\varkappa$[2]). Bezeichnet man die Bogenlänge von $\varkappa$ mit $s(p)$, so kann man

[1]) Vgl. E. Study, A. C.

[2]) Unter einem natürlichen Parameter p einer krummen Linie ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes versteht man einen solchen Parameter, der dem simultanen System

$$s = i p \tag{12}$$

setzen, und daher nach Nr. 6 (a) für den Hauptkrümmungsradius $R(p)$ einer beliebigen Mongeschen Fläche erster Art f, welche die Kurve $\varkappa$ zur Zentrakurve hat, den Wert

$$R = i(p + a), \quad (a \text{ Integrationskonstante}), \tag{13}$$

annehmen.

Als Gleichungen irgend einer Mongeschen Fläche erster Art, welche die krumme Linie (11) auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes zur Zentrakurve hat, erhält man so unschwer

$$(\mathrm{I}^*) \quad \begin{cases} x = \xi'(1 + i q) - \xi''(p + a), \\ y = \eta'(1 + i q) - \eta''(p + a), \quad (a \text{ willk. Konstante}) \\ z = \zeta'(1 + i q) - \zeta''(p + a); \end{cases}$$

darin bedeutet q einen von p unabhängigen Parameter. —

Endlich wollen wir noch alle algebraischen Mongeschen Flächen zweiter Art bestimmen; zu diesem Zwecke leiten wir eine weitere Parameterdarstellung derselben ab.

Wir denken die Minimalkurve, von der wir ausgingen, durch die (nur unwesentlich abgeänderten) Weierstraßschen Formeln

$$(\mathrm{Ia}) \quad \begin{cases} \xi = i \dfrac{1 - u^2}{2} f''(u) + i u f'(u) - i f(u), \\ \eta = - \dfrac{1 + u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u), \\ \zeta = i u f''(u) - i f'(u), \end{cases}$$

gegeben; darin ist $f(u)$ eine Funktion des „Weierstraßschen Parameters“ u,

$$f^{(k)}(u) = \frac{d^k f}{d u^k}, \quad (k = 1, 2 \ldots),$$

und es muß:

$$f'''(u) \neq 0$$

$$(\mathfrak{x} | \mathfrak{x}) = 0, \quad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dp} \Big| \frac{d\mathfrak{x}}{dp}\right) = -1, \quad \left(\mathfrak{x}\, \frac{d\mathfrak{x}}{dp}\, \frac{d^2\mathfrak{x}}{dp^2}\right) = -1$$

genügt.

sein[1]). Der Zusammenhang des Weierstraßschen Parameters u mit einem natürlichen Parameter p der Minimalkurve wird durch die Identität

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d\xi}{du}\;\frac{d^2\xi}{du^2}\;\frac{d^3\xi}{du^3}\right)}{\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\;\middle|\;\frac{d^2\xi}{du^2}\right)} = f'''(u)$$

vermittelt.

Man erhält dann als entsprechende Darstellung einer Mongeschen Fläche zweiter Art, wenn $R(u)$ ihren Hauptkrümmungsradius in Funktion des Weierstraßschen Parameters u darstellt:

$$\text{(II a)}\quad \left\{\begin{aligned}
x &= i\,\frac{1-u^2}{2}\,f''(u) + i\,u f'(u) - i f(u)\\
&\quad + R(u)\left\{i\,\frac{1-u^2}{2}\left(v f'''(u) + i\,\frac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) + u\right\},\\
y &= -\frac{1+u^2}{2}\,f''(u) + u f'(u) - f(u)\\
&\quad + R(u)\left\{-\frac{1+u^2}{2}\left(v f'''(u) + i\,\frac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) - i\,u\right\},\\
z &= i\,u f''(u) - i f'(u)\\
&\quad + R(u)\left\{i\,u\left(v f'''(u) + i\,\frac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) - 1\right\};
\end{aligned}\right.$$

dabei bedeutet v einen von u unabhängigen Parameter, und R, f sind analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich.

Die Kurvenschar $u = \text{const}$ ist auch hier wieder die Schar der Minimalgeraden auf der Fläche.

---

[1]) Der Fall $f'''(u) = 0$, $f(u) = c_0 u^2 + 2\,c_1 u + c_2$ führt auf

$$\xi = i(c_0 - c_2), \qquad \eta = -(c_0 + c_2), \qquad \zeta = -2\,c_1 i,$$

d. h. gerade auf den in Nr. 8 behandelten Fall; dort ist nur insoferne eine Abänderung getroffen. als $c_0 = 1$ gewählt ist, während trotzdem ξ, η, ζ als beliebige Konstanten angenommen sind.

Späterer Anwendung wegen schreiben wir hier auch die aus (II a) folgenden Formeln für die Koordinaten des Hauptkrümmungsmittelpunktes der Fläche an; sie lauten:

$$(9\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,(f''(u) - i\,R'(u)) + i\,u f'(u) - i f(u), \\ \mathfrak{y} = -\,\dfrac{1+u^2}{2}\,(f''(u) - i\,R'(u)) + u f'(u) - f(u), \\ \mathfrak{z} = i\,u(f''(u) - i\,R'(u)) - i f'(u). \end{cases}$$

Mit Berücksichtigung des bekannten Satzes, daß die Formeln (1a) immer dann, und nur dann, wenn $f(u)$ eine algebraische Funktion von u ist, eine algebraische Minimalkurve darstellen, beweist man unschwer folgenden Satz:

Die **algebraischen** Mongeschen Flächen zweiter Art sind vollständig dadurch charakterisiert, daß ihre zugehörige isotrope Fläche Tangentenfläche einer algebraischen (krummen) Minimallinie und zugleich ihr Hauptkrümmungsradius eine algebraische Funktion des Weierstraßschen Parameters dieser Minimallinie ist. Insbesondere ist jede Serretsche Fläche, deren Zentrakurve eine (krumme) algebraische Minimallinie ist, algebraisch, und umgekehrt hat jede algebraische Serretsche Fläche eine (krumme) algebraische Minimallinie zur Zentrakurve.

In der Tat ist zunächst, wenn in (IIa) $f(u)$ und $R(u)$ algebraische Funktionen ihres Argumentes sind, die durch (IIa) dargestellte Fläche zweiter Art algebraisch.

Sei umgekehrt eine algebraische Fläche zweiter Art gegeben (etwa durch die Gleichung $z = A(x, y)$ zwischen den cartesischen Koordinaten eines Punktes, wobei A eine algebraische Funktion bedeutet). Dann ergibt die aus (IIa) abgeleitete Gleichung

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v} + i\,\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}} = -\,u$$

fast unmittelbar, daß u eine algebraische Funktion von x, y ist. Die linke Seite dieser Formel läßt sich nämlich berechnen, da sie sich auf eine Ortsveränderung längs einer Minimalkurve der Fläche bezieht; bezeichnen p und q die ersten partiellen Ableitungen von z nach x und y, so bestimmen die Gleichungen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

zwei verschiedene Wertsysteme

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z \text{ bzw. } \delta' x,\ \delta' y,\ \delta' z$$

für dx, dy, dz. Man hat dann entweder

$$-u = \frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z}, \quad \text{oder} \quad -u = \frac{\delta' x + i\,\delta' y}{\delta z},$$

wo rechts in jedem Falle eine algebraische Funktion von x und y steht.[1]) Anderseits ist nach Voraussetzung auch das Krümmungsmaß K der Fläche, also auch $\frac{1}{\sqrt{K}}$ eine algebraische Funktion von x, y; da nun aber bei den Mongeschen Flächen $\frac{1}{\sqrt{K}}$ eine Funktion $\pm R(u)$ von u allein ist, so folgt aus beiden Bemerkungen, daß auch $R(u)$ eine algebraische Funktion von u ist.

Aus den Gleichungen (IIa) leitet man ferner die Identität

$$i\,\frac{1-u^2}{2}\,x - \frac{1+u^2}{2}\,y + i\,u\,z = f(u)$$

ab, aus welcher durch genau die gleiche Schlußweise folgt, daß $f(u)$ ebenfalls eine algebraische Funktion von u sein muß.

Damit ist der Beweis des obigen Satzes geführt. Zusammen mit dem Satze [Nr. 8 1)] löst dieser Satz die Aufgabe der Bestimmung aller algebraischen Mongeschen Flächen vollständig. Wir werden weiter unten noch eine fundamentale geometrische Eigenschaft dieser algebraischen Flächen kennen lernen.

---

[1]) Dieser Schluß bei G. Darboux, Théorie générale des surfaces I. Paris (1887), p. 290 f.

10. Die Formeln Nr. 8 (9) und Nr. 9 (9a) führen infolge des Bestehens der Relation Nr. 6 (a) auf ein Verfahren, die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \qquad (s \neq \text{const}) \tag{1}$$

ohne Anwendung von Integralzeichen zu lösen. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \xi_0 + \frac{1-t^2}{2} s'(t), \qquad y = \eta_0 + i\,\frac{1+t^2}{2} s'(t), \\ z &= \zeta_0 + t s'(t), \qquad \left(s' = \frac{ds}{dt}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

worin ξ_0, η_0, ζ_0 beliebige Konstante, und s eine beliebige Funktion des Parameters t ist, liefert nämlich alle Lösungen der Gleichung (1), die zugleich der Relation

$$(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2 = 0 \tag{3}$$

genügen, d. h. alle nicht-isotropen Kurven auf dem Minimalkegel des beliebig angenommenen Punktes (ξ_0, η_0, ζ_0)[1]. Sieht man ferner von dem trivialen Lösungssysteme

$$x = \alpha s + a, \qquad y = \beta s + b, \qquad z = \gamma s + c,$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ a,\ b,\ c \text{ Konstante};\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1),$$

das die nicht-isotropen Geraden liefert, ab, so sind alle übrigen Lösungen der Gleichung (1) durch die Formeln[2])

---

[1]) Diese Darstellung der nicht-isotropen Kurven auf einem Minimalkegel findet sich (mit $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$) in § 6 der Abhandlung: L. P. Eisenhart, A fundamental parametric representation of space curves. Annals of Math. (II) 13 (1911—12), p. 17—34. Herr de Montcheuil hat schon [Einl. 10)], p. 55 eine Translationsfläche zweier solcher Kurven mit Benutzung dieser Formeln dargestellt.

[2]) Dieses Formelsystem zur Auflösung der Gleichung (1) findet sich bereits (abgesehen von ganz unwesentlichen Veränderungen) in der Abhandlung: M. de Montcheuil, Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. Bull. Soc. Math. France 31 (1903), p. 233 bis 258, 32 (1904), p. 152—185, u. z. Bd. 31, p. 235. Es wird schon in der Thèse des Herrn de Montcheuil gestreift, wenn auch nicht direkt angeschrieben, [Einl. 10)], p. 47.

$$(4)\begin{cases} x = i\dfrac{1-t^2}{2}\{f''(t) - is'(t)\} + itf'(t) - if(t), \\ y = -\dfrac{1+t^2}{2}\{f''(t) - is'(t)\} + tf'(t) - f(t), \\ z = it\{f''(t) - is'(t)\} - if'(t), \end{cases} \quad \left(s' = \frac{ds}{dt}, f' = \frac{df}{dt}, \text{ usw.}\right)$$

darstellbar, wo f und s (analytische) Funktionen des Parameters t mit gemeinsamem Existenzbereich sind, von denen s völlig beliebig bleibt, während f der Bedingung

$$f''' \neq 0$$

genügen muß.

Die Gleichungen (4) bilden eine Verallgemeinerung der bekannten Weierstraßschen Darstellung der krummen Minimallinien. Sie stellen je ∞^∞ Lösungen der Gleichung (1) mit Hilfe einer Lösung der Gleichung

$$(5) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

dar: für einen bestimmt angenommenen Wert von f liefern sie alle nicht-isotropen krummen Linien auf der Tangentenfläche derjenigen krummen Minimallinie, welche durch (4) mit $s'(t) = 0$ dargestellt ist.

Das System (4) enthält, wenn man die Bedingung

$$f''' \neq 0$$

fallen läßt, was im folgenden stets geschehen soll, das System (2) als Spezialfall. In der Tat erhält man für $f = at^2 + 2bt + c$ aus dem System (4) das mit (2) identische System

$$(2^*) \qquad \begin{gathered} x = \frac{1-t^2}{2}s'(t) + i(a-c), \quad y = -\frac{1+t^2}{2}s'(t) - (a+c), \\ z = ts'(t) - 2ib; \end{gathered}$$

a, b, c sind dabei willkürliche Konstante.

Aus den Gleichungen (4) folgt

$$(6) \qquad t = -\frac{ds - dz}{dx - idy} = -\frac{dx + idy}{ds + dz}$$

und

$$(7) \qquad f = i\,\frac{1-t^2}{2}\,x - \frac{1+t^2}{2}\,y + i\,t\,z.$$

Man erhält demnach alle algebraisch rektifizierbaren (nicht-isotropen) krummen Linien, wenn man in dem Gleichungssystem (4) für f und s beliebige algebraische Funktionen von t einsetzt.

Es ist hier am Platze, den Zusammenhang des Systems (4) mit dem gleichfalls von Herrn de Montcheuil[1]) zuerst angegebenen, von Herrn Salkowski[2]) zur Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren Raumkurven benutzten Gleichungssysteme

$$(8) \qquad \begin{cases} x = v' + (u\,w' - w), & i\,y = v' - (u\,w' - w), \\ z = w' - (u\,v' - v), & s = w' + (u\,v' - v) \end{cases}$$

anzugeben. In (8) bedeuten v, w (analytische) Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u mit gemeinsamem Existenzbereich, und die Indizes Differentiation nach u.

Ersetzt man nämlich in (4) y durch $-y$ und t durch $u \equiv -t$, so erhält man:

---

[1]) Die ersten drei Gleichungen des Systems (8), sowie eine geometrische Deutung derselben finden sich (mit etwas anderer Bezeichnungsweise) bereits in der Thèse [Einl. 10] des Herrn de Montcheuil auf p. 9 bzw. 15 f. (1902). Das vollständige System (8) in: M. de Montcheuil, Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Bull. Soc. Math. France 33 (1905), p. 170—171. Etwa gleichzeitig damit erschien die kurze, aber inhaltsreiche Note: E. Vessiot, Sur les courbes minima. C. R. Ac. sc. Paris 140 (1905), p. 1381—1384, in der u. a. ein dem Gleichungssystem (8) sehr ähnliches und mit ihm durch einfache Substitutionen verknüpftes System angegeben wird.

[2]) E. Salkowski, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven. Math. Ann. 67 (1909), p. 445—458. Außerdem beschäftigen sich mit dem System (8) noch eingehender: die Abhandlung L. Raffy [Einl. 19), (III. un mode de représentation des courbes gauches. Courbure. Torsion. p. 159 bis 163)] sowie die weiter oben zitierte Abhandlung des Herrn Eisenhart. — Die Darstellungen (4), (8) und ähnliche beruhen wesentlich auf der Verwendung des (von Herrn Eisenhart so genannten) durch (6) bezw. (6*) definierten Normalparameters.

$$(4^*)\qquad \begin{cases} x = i\dfrac{1-u^2}{2}(f'' + is') + iuf' - if, \\ y = \dfrac{1+u^2}{2}(f'' + is') - uf' + f, \\ z = -iu(f'' + is') + if', \end{cases}$$

worin der Strich jetzt die Differentiation nach

$$(6^*)\qquad u = \frac{dx - i\,dy}{ds + dz} = \frac{ds - dz}{dx + i\,dy}$$

bedeutet. Der Zusammenhang zwischen den Gleichungssystemen (4*) und (8) wird durch die Beziehungen

$$(9)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{if' - s}{2}, \qquad w = if - u\dfrac{if' - s}{2}; \\ f = -i(uv + w), \qquad s = w' + (uv' - v) \end{cases}$$

vermittelt.

Die an das Gleichungssystem (4) geknüpfte Bemerkung über die algebraisch rektifizierbaren (nicht-isotropen) krummen Linien gestattet nun auch eine Anwendung auf die algebraischen Mongeschen Flächen. Es gilt nämlich der Satz:

Jede **algebraische** Mongesche Fläche hat zur Zentrakurve eine algebraisch rektifizierbare (nicht-isotrope krumme) Linie oder eine algebraische (krumme) Minimallinie. Umgekehrt ist jede Mongesche Fläche, deren Zentrakurve eine algebraisch rektifizierbare (nicht-isotrope krumme) Linie oder eine algebraische (krumme) Minimallinie ist, algebraisch.

Für die Serretschen Flächen, also für den Fall einer isotropen Zentrakurve, wurde der Satz bereits in Nr. 9 bewiesen; der Beweis ist also nur noch für die Mongeschen Flächen veränderlichen Krümmungsmaßes zu erbringen.

Sei f eine solche algebraische Fläche erster [zweiter] Art. Sie läßt sich durch Gleichungen der Form Nr. 8 (I), [Nr. 9 (II a)] darstellen, und in diesen Gleichungen ist R [sind R und f] algebraische Funktionen des Weierstraßschen Parameters u. Ist nun $\varkappa$ die Zentrakurve der Fläche f, und s die Bogenlänge von $\varkappa$, so ist nach Nr. 6 (a)

$$\frac{dR}{ds} = 1,$$

also

$$(\alpha) \qquad R(u) = s(u) + \text{const},$$

wobei die Konstante sich durch die Wahl des Anfangspunktes der Bogenlänge auf der Kurve $\varkappa$ bestimmt. Durch geeignete Wahl dieses Anfangspunktes kann man es stets erreichen, daß

$$(\beta) \qquad R(u) = s(u)$$

wird. Setzt man diesen Wert von $R(u)$ in die Gleichungen Nr. 8 (9), [Nr. 9 (9 a)] ein, so nehmen diese die Form (2) [(4)] an. Da hierin s [f und s] algebraische Funktionen des Parameters u sind, so ist $\varkappa$ in der Tat eine algebraisch rektifizierbare Linie.

Sei umgekehrt eine algebraisch rektifizierbare, nicht-isotrope krumme Linie $\varkappa$ vorgelegt. Dann läßt sie sich durch Gleichungen der Form (4) darstellen[1]), in denen $f(u)$ und $s(u)$ algebraische Funktionen des Parameters u sind. Die krumme Linie $\varkappa$ liegt demnach auf derjenigen unebenen isotropen Fläche i, deren Spitze [bzw. deren Gratlinie] durch (4) mit $s'(u) = 0$ dargestellt wird. Ist i kein Minimalkegel, dann ist ihre Gratlinie eine algebraische krumme Minimallinie, da $f(u)$ eine algebraische Funktion des (nunmehr Weierstraßschen) Parameters u ist.

Ist nunmehr f eine Mongesche Fläche, deren Zentrakurve $\varkappa$, und deren zugehörige isotrope Fläche i ist, so schließt man ebenso wie oben, daß ihr Hauptkrümmungsradius $R(u)$ mit der algebraischen Funktion $s(u)$ des Weierstraßschen Para-

[1]) Im allgemeinen sogar auf zwei verschiedene Arten; nur für die singulären ebenen krummen Linien gibt es bloß eine einzige Art der Darstellung durch Gleichungen der Form (4). Vgl. dazu Nr. **11**. — Natürlich ist jetzt in (4) statt t überall u zu schreiben.

meters u durch die Relation (a) verknüpft, also eine algebraische Funktion von u ist. Nach dem Satze Nr. 8 1) [bzw. dem entsprechenden in Nr. 9] ist also f eine algebraische Fläche; w. z. b. w.

11. In anderer Hinsicht sind die drei Gleichungen Nr. 9 (9) für die Kurventheorie, sowie für die Theorie der Mongeschen Flächen von Interesse. Man kann sie in die Form

$$(1) \qquad x = \xi - i s' \xi', \qquad y = \eta - i s' \eta', \qquad z = \zeta - i s' \zeta'$$

umschreiben; dabei bedeuten ξ, η, ζ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p, s eine im übrigen willkürliche (analytische) Funktion von p, die mit ξ, η, ζ ein gemeinsames Existenzbereich hat; und die Indizes bezeichnen die Differentiation nach p.

Die Formeln (1) stellen, wenn s keine Konstante ist, eine nicht-isotrope (krumme) Linie $\varkappa$ dar, die auf der Tangentenfläche i der Minimallinie λ liegt. Es fragt sich zunächst, welche krummen Linien überhaupt durch die Gleichungen (1) darstellbar sind.

Sei L ein Punkt von λ, K der entsprechende von $\varkappa$; dann liegt die Tangente ν von $\varkappa$ in K in der Schmiegungsebene l von λ in L. Umgekehrt ist die Ebene l eine der beiden isotropen Ebenen durch die Tangente ν von $\varkappa$ in K, und die Tangentenfläche der Minimalkurve λ erscheint also als die Enveloppe einer der beiden isotropen Ebenen durch jede Tangente der Kurve $\varkappa$. Die Tangente ι von λ in L ist eine isotrope Gerade der Minimalebene l, die auch ν enthält, und steht also nach Nr. 1 (1) zu ν senkrecht. Die Minimalkurve λ ist demnach eine der beiden Minimalevoluten der krummen Linie $\varkappa$, und L ist, nach einer von Herrn Study[1]) eingeführten Bezeichnung, der Scheitel des Punktes K von $\varkappa$.

Nehmen wir noch den bisher ausgenommenen Fall hinzu, daß $\varkappa$ mit λ zusammenfällt, also eine Minimallinie ist, so folgt:

[1]) A. C.; die dort gemachten Ausführungen bilden die Grundlage des Folgenden.

Die Formeln (1) gestatten die Darstellung aller derjenigen krummen Linien $\varkappa$, für welche mindestens der eine der beiden Orte der Scheitelpunkte eine nicht degenerierte krumme Minimallinie ist, d. h. aller krummen Linien mit Ausnahme der regulären und singulären Kreise[1]). Die Funktion s bedeutet dabei die (bei Minimalkurven konstante) Bogenlänge der krummen Linie $\varkappa$.

Ist s veränderlich und besteht nicht die Bedingung:

$$1 - 4is'' - 3s''^2 + 2s's''' + s'^2 J = 0, \tag{2}$$

in der J die Invariante $(3|3)_p$ der krummen Minimallinie λ bedeutet, so stellen die Formeln (1) eine reguläre Kurve $\varkappa$ dar. Seien

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(x'x''|x'x'')}{(x'|x')^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{(x'x''x''')}{(x'x''|x'x'')}$$

bzw. das Quadrat der Krümmung und die Torsion der Kurve $\varkappa$ im Punkte K, der zum Werte $s(p)$ der Bogenlänge gehört. Dann gilt der Satz:

Die charakteristischen Invarianten[2]) $\Phi = \frac{1}{r^2}$ und $\Psi = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$ jeder regulären Kurve, mit Ausnahme der regulären Kreise, lassen sich durch die charakteristische Invariante J einer krummen Minimallinie und ihre Ableitung nach einem natürlichen Parameter dieser Minimallinie, sowie durch die Ableitungen der Bogenlänge der Kurve selbst nach diesem natürlichen Parameter ausdrücken[3]), und zwar folgendermaßen:

---

[1]) Jeder singuläre Kreis kann definiert werden als der Schnitt eines Minimalkegels mit einer die Spitze des Minimalkegels nicht enthaltenden Minimalebene. Vgl. auch Nr. 13 Anm. [1]), p. 191.

[2]) E. Study, A. C.

[3]) Daß sich alle fundamentalen Elemente einer krummen Linie aus denjenigen ableiten lassen, die sich auf ihre zwei Minimalevoluten beziehen, hat bereits Herr Vessiot in der weiter oben zitierten Note ausgesprochen. Die dort angekündigte Arbeit, in der u. a. dieser Gedanke weiter ausgeführt werden sollte, scheint nicht erschienen zu sein.

$$
(3)\begin{cases}
\Phi = -\dfrac{1-4is''-3s''^2+2s's'''+s'^2J}{s'^4}, \\[2ex]
\Psi = \\
-\dfrac{(1-is'')(1-2is'')(1-3is'')+2s's'''(2-3is'')+is'^2s^{(4)}+s'^2(1-is'')J+\frac{1}{2}is'^3J'}{s'^6}
\end{cases}
$$

Besteht dagegen die Gleichung (2) identisch für jeden Wert von p, so stellen die Formeln (1) eine krumme ebene singuläre Linie dar. Sei als System von charakteristischen Invarianten für eine solche krumme Linie das System der beiden Größen

$$
F = \frac{A}{(x'\,|\,x')\,(x'x''\,\omega)}, \qquad F_1 = -\frac{(x'\,|\,x')\,B - 5\,(x'\,|\,x'')\,A}{(x'\,|\,x')^2\,(x'x''\,|\,x'\omega)}
$$

gewählt, in denen

$$
A = (x'x''\,|\,x'\omega) - 3\,(x'x''\,|\,x''\omega),
$$

$$
B = \frac{dA}{dp} = (x'x^{(4)}\,|\,x'\omega) - (x'x'''\,|\,x''\omega) - 4\,(x'x''\,|\,x'''\omega)
$$

ist. Dann gilt der Satz:

Für jede krumme ebene singuläre Linie, mit Ausnahme der singulären Kreise, lassen sich die charakteristischen Invarianten F, F_1 durch die Ableitungen ihrer Bogenlänge nach einem natürlichen Parameter einer krummen Minimallinie folgendermaßen ausdrücken:

$$
(4) \qquad F = \frac{1}{s'^2}, \qquad F_1 = \frac{1+2is''}{s'^4}.
$$

Dabei ist die Bogenlänge s der krummen ebenen singulären Linie mit der charakteristischen Invariante J der krummen Minimallinie durch die Differentialgleichung (2) verknüpft. —

Die an die Formeln (1) bzw. Nr. 9 (9) angeschlossenen geometrischen Betrachtungen gestatten auch die Beantwortung einer auf die Mongeschen Flächen selbst bezüglichen Frage (die sich übrigens auch im Anschlusse an Nr. 10 (4) hätte beantworten lassen). Sei nämlich $\varkappa$ eine orientierte nicht-isotrope krumme Linie, und nach Annahme eines (festen) Punktes P_0 auf $\varkappa$ als Anfangspunktes der Bogenlänge von $\varkappa$, R der zu einem variablen Punkt P von $\varkappa$ gehörige Wert der Bogenlänge. Dann lautet die Frage: Wie viele Mongesche Flächen von der Zentrakurve $\varkappa$ und vom Krümmungsmaß $\frac{1}{R^2}$ gibt es und wie verteilen sich diese Flächen auf die beiden von uns unterschiedenen Arten[1])?

Sei P ein Punkt der Kurve $\varkappa$, τ die (orientierte) Tangente von $\varkappa$ in P, und m eine bestimmte der beiden Minimalebenen durch τ. Zieht man durch P in m alle mit τ gleichartig orientierten Geraden ν und trägt auf jeder von P aus die mit ν ungleichartig orientierte Strecke von der Länge R auf, so liegen die Endpunkte Q aller dieser Strecken auf eine Minimalgeraden μ. (Ist insbesondere Q_τ der Endpunkt der auf τ gelegenen Strecke, so ist der Ort aller Punkte Q_τ diejenige Filarevolvente von $\varkappa$, die $\varkappa$ im Punkte P_0 schneidet.) Beschreibt der Punkt P die Kurve $\varkappa$, so beschreibt die Minimalgerade μ die Minimalgeradenschar einer Mongeschen Fläche, wenn wir den Ausnahmefall, daß die Ebenen m alle untereinander identisch sind, vorläufig beiseite lassen. ν ist die Normale von f im Punkte Q, da τ nach Konstruktion die Normale von f im Punkte Q_τ ist [vgl. Nr. 6 (2) und (3)]. P ist der Hauptkrümmungsmittelpunkt und $\overrightarrow{QP} = R$ der Hauptkrümmungsradius der Fläche f im Punkte Q, und folglich hat in der Tat die Fläche f das Krümmungsmaß $\frac{1}{R^2}$ und die Zentrakurve $\varkappa$[2]).

[1]) Der erste Teil dieser Frage ist auf anderem Wege bereits in der Abhandlung [Einl. 19)] von Raffy beantwortet worden.

[2]) Das letzte würde nicht mehr der Fall sein, wenn man auf jeder Geraden ν von P aus die mit ν gleichartig orientierte Strecke von der Länge R aufgetragen hätte, da dann der Ort der Punkte Q_τ keine Filarevolvente von $\varkappa$ mehr sein würde, also die Geraden PQ nicht Normalen der Fläche f wären.

Die Durchführung des gleichen Verfahrens unter Zugrundelegung der zweiten isotropen Ebene $\bar{m}$ durch τ ergibt, unter der Voraussetzung, daß die Minimalebenen $\bar{m}$ nicht sämtlich zusammenfallen, eine zweite Mongesche Fläche $\bar{f}$. Also:

Alle Mongeschen Flächen, die eine gegebene nicht-isotrope krumme Linie zur Zentrakurve haben, lassen sich im allgemeinen in Paare von Flächen gleichen Krümmungsmaßes anordnen.

Eine Ausnahme von diesem Satze tritt dann und nur dann ein, wenn die krumme Linie in einer Minimalebene liegt.

Alsdann nämlich fällt die eine der beiden Minimalebenen m durch die Tangenten τ von $\varkappa$ beständig mit der Kurvenebene zusammen. Behalten wir die oben eingeführten Bezeichnungen bei, so ist in diesem Falle nach Nr. 1 (9) der Ort aller Punkte Q_r diejenige Minimalgerade μ von m, die durch P_0 geht; nach Nr. 1 (8) liegen dann sämtliche Punkte Q auf μ.

Die zweite Minimalebene $\bar{m}$ durch die Tangenten τ von $\varkappa$ umhüllt dagegen wieder eine unebene isotrope Fläche i, zu welcher nach der oben durchgeführten Konstruktion lauter Mongesche Flächen derselben Art gehören. Also:

Zu einer krummen ebenen singulären Linie als Zentrakurve gehört nur eine einzige Mongesche Fläche von bestimmtem, möglichen Krümmungsmaße. Alle Mongeschen Flächen, die eine gegebene krumme ebene singuläre Linie als Zentrakurve haben, sind von der gleichen Art.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten: welcher Art sind im Falle einer beliebigen nicht-isotropen krummen Linie $\varkappa$ die beiden Flächen des Paares von Mongeschen Flächen [bzw. die einzige Fläche], die $\varkappa$ zur Zentrakurve und $\frac{1}{R^2}$ zum Krümmungsmaß haben? Man hat dazu nur zu untersuchen, wie sich für eine solche gegebene Kurve $\varkappa$ die von den Minimalebenen durch die Tangenten τ von $\varkappa$ umhüllten isotropen

Flächen, soweit sie keine Minimalebenen sind, auf die beiden unterschiedenen Gattungen verteilen; mit anderen Worten, man hat die Bedingungen anzugeben, die eine nicht-isotrope krumme Linie $\varkappa$ erfüllen muß, damit keine, [eine, jede,] der beiden Minimalevoluten von $\varkappa$ sich auf einen Punkt reduziert. Diese Bedingungen hat Herr Study[1]) vollständig aufgestellt: sie führen im vorliegenden Falle zu folgenden Resultaten:

Von den beiden Mongeschen Flächen gleichen Krümmungsmaßes, die eine gegebene reguläre Kurve zur Zentrakurve haben, sind:

1) beide Mongesche Flächen erster Art, wenn die Kurve ein (regulärer) Kreis ist;

2) die eine Fläche eine Mongesche Fläche erster Art, die andere eine solche zweiter Art, wenn die Kurve eine doppelt gekrümmte Linie auf einem Minimalkegel ist;

3) beide Mongesche Flächen zweiter Art für jede andere reguläre Kurve.

Alle Mongeschen Flächen, die einen singulären Kreis [bzw. eine andere krumme ebene singuläre Linie] zur Zentrakurve haben, sind Flächen erster [bzw. zweiter] Art.

Diesen Resultaten fügen wir der Vollständigkeit halber den nach dem Bisherigen nahezu selbstverständlichen Satz an:

Alle Serretschen Flächen, die eine gegebene krumme Minimallinie zur Zentrakurve haben, lassen sich in Paare von Flächen gleichen Krümmungsmaßes anordnen. Alle Serretschen Flächen sind Mongesche Flächen zweiter Art.

12. Aus den in Nr. 8 und 9 aufgestellten Formeln folgt leicht eine bisher übersehene Eigenschaft der Mongeschen Flächen, die wir indes ohne Zuhilfenahme dieser Formeln beweisen wollen.

---

[1]) A. C.

Seien wieder E, F, G; D, D', D'' bezüglich die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer (nicht-isotropen) Fläche. Dann sind die Mongeschen Flächen dadurch charakterisiert, daß die drei quadratischen Differentialformen:

$$(1)\quad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ A = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \\ B = (ED' - FD)\,du^2 - (GD - ED'')\,du\,dv \\ \qquad\qquad + (FD'' - GD')\,dv^2, \end{cases}$$

die, gleich Null gesetzt, bzw. die Minimallinien, Asymptotenlinien und Krümmungslinien der Fläche geben, einen und denselben linearen Faktor gemeinsam haben.[1]) Die Quotienten $\frac{ds^2}{A}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{ds^2}$ sind also homogene lineare Funktionen in du, dv.

Die normale Krümmung $\frac{1}{R_n}$ und die geodätische Torsion $\frac{1}{T_g}$ einer regulären Kurve auf der Fläche sind für eine beliebige, nicht-isotrope Fläche bzw. durch

$$(2)\qquad \frac{1}{R_n} = \frac{A}{ds^2}, \quad \frac{1}{T_g} = -\frac{B}{ds^2}, \quad \frac{T_g}{R_n} = -\frac{A}{B}$$

gegeben. Die im Falle der Mongeschen Flächen aus der ersten dieser Gleichungen entspringende Eigenschaft hat Herr Scheffers[2]) angegeben; aus der zweiten folgt:

Die geodätischen Torsionen von irgend vier durch einen Punkt P einer Mongeschen Fläche gehenden regulären Flächenkurven in diesem Punkte haben dasselbe Doppelverhältnis wie die zugehörigen vier Normalschnittebenen, und (folglich), wie die zugehörigen vier Krümmungsmittelpunkte auf der in P errichteten Flächennormalen.

---

[1]) Etwas Analoges tritt bei den „halbisotropen Strahlensystemen", die Herr Weickmann [Einl. 20)], p. 33 ff. behandelt hat, ein: hier haben die beiden Kummerschen quadratischen Grundformen der Kongruenz einen linearen Faktor gemeinsam.

[2]) G. Scheffers [Einl. 8)], p. 113 ff.

III. Die einfachsten algebraischen Mongeschen Flächen.

13. Alle Mongeschen Flächen (erster Art), deren Zentrakurve ein singulärer Kreis[1]) ist, sind algebraische Flächen dritter Ordnung.

---

[1]) Die wichtigsten metrischen Eigenschaften eines singulären (oder „parabolischen") Kreises sind folgende:

Jeder singuläre Kreis $\varkappa$ hat den in seiner Minimalebene m gelegenen Punkt A des absoluten Kegelschnittes zugleich zum Mittelpunkt und (einzigen) Brennpunkt, und alle Geraden in m durch A zu Achsen. Die uneigentliche Gerade a der Minimalebene m berührt den singulären Kreis $\varkappa$ im (absoluten) Punkte A.

Wie üblich, ist in diesen Sätzen, wenn $\varkappa_2$ einen Kegelschnitt bezeichnet, verstanden unter:

Durchmesser von $\varkappa_2$: die Polare eines uneigentlichen Punktes der Kegelschnittebene in Bezug auf $\varkappa_2$;

Achse von $\varkappa_2$: ein zur Richtung nach seinem Pol in Bezug auf $\varkappa_2$ senkrecht stehender Durchmesser von $\varkappa_2$;

Mittelpunkt von $\varkappa_2$: der Pol der uneigentlichen Geraden der Kegelschnittebene in Bezug auf $\varkappa_2$;

Brennpunkt von $\varkappa_2$: der Mittelpunkt eines solchen Geradenbüschels (in der Kegelschnittebene) bei dem je zwei in Bezug auf $\varkappa_2$ konjugierte Gerade zueinander senkrecht stehen.

Weiter findet sich:

Jede automorphe Bewegung eines singulären Kreises $\varkappa$, die keine Identität ist, läßt sich auffassen als Kollineation allgemeiner Art der Minimalebene m des Kreises, deren sämtliche drei Doppelpunkte in den (absoluten) Punkt A und deren sämtliche drei Doppelgeraden in die uneigentliche Gerade a der Ebene m fallen; dagegen ist jede Umlegung der Minimalebene m, die $\varkappa$ in sich selbst transformiert, eine perspektive Transformation der Ebene m, deren Zentrum ein von A verschiedener uneigentlicher Punkt von m, und deren Achse eine eigentliche Gerade durch A, also eine Minimalgerade von m ist.

Das Gesagte zeigt, daß und inwiefern man einen singulären Kreis als Kreis mit uneigentlichem Mittelpunkt und unbestimmtem Halbmesser auffassen kann. Andererseits kann man einen singulären Kreis auch als Parabel auffassen, deren Ebene eine Minimalebene und deren uneigentlicher Punkt ein Punkt des absoluten Kegelschnittes ist.

Wählt man als Ausgangskurve den singulären Kreis $\varkappa$:

(1) $$\mathfrak{x} = \frac{i}{2}(1-p^2), \qquad \mathfrak{y} = -\frac{1}{2}(1+p^2), \qquad \mathfrak{z} = ip,$$

d. h. die Schnittkurve des Minimalkegels des Anfangspunktes mit der zur z-Achse parallelen Minimalebene:

(2) $$y + ix + 1 = 0,$$

so liefern die Formeln Nr. 9 (I*) folgende Parameterdarstellung derjenigen ∞^1 Mongeschen Flächen (erster Art), welche die Kurve (1) zur Zentrakurve haben:

(3) $$\begin{cases} x = \frac{i}{2}(1+p^2) + aip - \frac{1}{2}(1-p^2)q, \\ y = -\frac{1}{2}(1-p^2) + ap - \frac{i}{2}(1+p^2)q, & (a \text{ willk. Konstante.}) \\ z = \qquad -ai - pq. \end{cases}$$

Elimination von p und q gibt als Gleichung der Flächen (3):

(3a) $$(x^2+y^2+z^2)(y+ix+2)+y-ix+a^2(y+ix)+2aiz=0$$ [1].

Die erhaltenen Flächen sind sämtlich **Regelflächen dritter Ordnung vom allgemeinen Typus.**

Von den beiden Leitgeraden der zum Parameterwerte a gehörigen Fläche der Schar ist die Doppelgerade der Fläche eine Minimalgerade in der Ebene ihrer Zentrakurve (1); nämlich die Gerade

(4) $$y + ix + 1 = 0, \qquad z + ai = 0.$$

Die zweite Leitgerade ist eine zur ersten senkrecht stehende, also zur Ebene des singulären Kreises (1) parallele, nicht-isotrope Gerade, von den Gleichungen:

(5) $$y + ix + 2 = 0, \qquad y - ix + 2ai(z + ai) = 0$$ [2].

---

[1]) Die Enveloppe dieser Flächenschar besteht aus dem Minimalkegel des Anfangspunktes und der Ebene (2) ihrer gemeinsamen Zentrakurve.

[2]) Läßt man a variieren, so beschreibt die Leitlinie (4) das uneigentliche Büschel der Minimalgeraden der Ebene (2); die Leitlinie (5) umhüllt den singulären Kreis:

Die Punkte der Doppelgeraden (4) sind (bekanntlich), bis auf zwei uniplanare, sämtlich biplanare Punkte der Fläche; die beiden uniplanaren Punkte auf der Geraden (4) sind ihre Schnittpunkte mit dem singulären Kreise (1): also ihr uneigentlicher Punkt, in welchem die Ebene (2) des singulären Kreises (1) doppeltzählende Tangentialebene der Fläche ist, und der Punkt:

$$(6)\quad x = i\frac{1-a^2}{2},\ y = -\frac{1+a^2}{2},\ z = -ia,\ (\text{oder: } p = -a),$$

wo die (durch die Doppelgerade (4) gehende) Ebene

$$(7)\qquad a(x - iy) + z = 0$$

doppeltzählende Tangentialebene ist.

14. Alle Mongeschen Flächen (zweiter Art), deren zugehörige isotrope Fläche die Tangentenfläche der algebraischen rationalen gemeinen Minimalschraubenlinie (oder Minimalkurve dritter Ordnung)

$$(1)\quad \xi = \frac{i}{2}\left(-\frac{p^3}{3} + p\right),\ \eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3} + p\right),\ \zeta = \frac{i}{2}p^2$$

ist, und deren Hauptkrümmungsradius sich durch den natürlichen Parameter p dieser Kurve mittels der Formel

$$(2)\qquad R(p) = -\frac{i}{6}p^2 + a, \qquad (a \text{ willk. Konstante})$$

ausdrückt, sind algebraische Flächen dritter Ordnung.

Die Formeln [Nr. 9 (II)] liefern, nach einer leichten Veränderung der Bezeichnung, folgende Parameterdarstellung dieser Flächen:

$$y + ix + 2 = 0, \qquad z^2 = 2(y - ix),$$

in welchem die Ebene $y + ix + 2 = 0$ den Minimalkegel des Anfangspunktes schneidet.

$$(3)\quad \begin{cases} x = -\frac{i}{3}p^3 + \left(\frac{i}{2} + a\right)p + \frac{i}{2}(1 - p^2)q, \\ y = -\frac{1}{3}p^3 - \left(\frac{1}{2} + ai\right)p - \frac{1}{2}(1 + p^2)q, \\ z = \frac{2i}{3}p^2 - a + ipq; \end{cases}$$

ihre Gleichung wird demnach:

$$(4)\quad 3(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(z - a) + i(x + iy)^2 = 0.$$

Die gemeinsame Zentrakurve $\varkappa$ dieser Flächen läßt nach Nr. 9 (9) die Parameterdarstellung

$$(5)\quad \mathfrak{x} = \frac{i}{3}p, \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{3}p, \quad \mathfrak{z} = \frac{i}{6}p^2$$

zu; sie ist also eine in der Minimalebene

$$(6)\quad x + iy = 0$$

gelegene Parabel, deren (eigentliche) Achse die z-Achse, deren (eigentlicher) Scheitel und (eigentlicher) Brennpunkt[1]) der Koordinaten-Anfangspunkt, und deren (eigentliche) Direktrix die Minimalgerade

$$(7)\quad x + iy = 0, \quad z = 0$$

ist, welche die Parabel (5) im Koordinaten-Anfangspunkt tangiert[2]).

Die Doppelgerade der zum Parameterwert a gehörigen Fläche der Schar ist die Minimalgerade:

---

[1]) Allgemein gilt der Satz: Besitzt ein Kegelschnitt in einer Minimalebene (mindestens) einen (eigentlichen) Brennpunkt B, so liegt dieser auf dem Kegelschnitt selbst. Die in B tangierende Minimalgerade ist die zugehörige Direktrix.

[2]) Der Koordinaten-Anfangspunkt ist zugleich derjenige Punkt, in dem $R = a$ ist, d. h. in dem die (zum Parameterwerte $a = 0$ gehörige) Cayleysche Linienfläche der Schar die Tangente der Minimalkurve (1), die Minimalgerade (7), zur Erzeugenden hat. Die Minimalebene (6) ist die Schmiegungsebene der Minimalkurve (1) im Anfangspunkte, und die Zentrakurve $\varkappa$ der Schnitt dieser Ebene mit der Tangentenfläche der Minimalkurve (1).

(8) $$x + iy = 0, \quad z = a$$

in der Ebene (6) der Zentrakurve $\varkappa$. Die dem Parameterwert $a = 0$ entsprechende Fläche, deren Doppelgerade in die (eigentliche) Direktrix (7) der Zentrakurve $\varkappa$ fällt, ist eine Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung; alle übrigen Flächen der Schar sind Regelflächen dritter Ordnung vom allgemeinen Typus.

Die zweite Leitgerade der zum Parameterwert a $(a \neq 0)$ gehörenden Fläche der Schar ist eine nicht-isotrope Gerade von allgemeiner Lage[1]) gegen die erste Leitgerade (8); ihre Gleichungen sind:

(9) $$(6ai + 1)x - i(6ai - 1)y = 0, \quad z + a = 0.$$

Die beiden uniplanaren Punkte auf der Doppelgeraden (8) sind ihre Schnittpunkte mit der Zentrakurve $\varkappa$ der Fläche

(10) $$x = \pm \sqrt{\tfrac{2}{3} a i}, \quad y = \pm i \sqrt{\tfrac{2}{3} a i}, \quad z = a;$$

die zugehörigen doppeltzählenden Tangentialebenen sind bezüglich die beiden Ebenen:

(11) $$x + iy \mp i \sqrt{6ai}\,(z - a) = 0$$

durch die Doppelgerade.

Die (zum Parameterwerte $a = 0$ gehörige) Cayleysche Linienfläche der Schar wird in jedem Punkte der Doppelgeraden (7) von der Minimalebene (6) berührt; die zweite Tangentialebene der Fläche in einem eigentlichen Punkte $x = x_0$ der Doppelgeraden (7) ist die Ebene

(12a) $$x + iy - 6ix_0 z = 0,$$

und im uneigentlichen Punkte der Doppelgeraden (7) die Ebene

(12b) $$z = 0.$$

Der Koordinaten-Anfangspunkt ist der uniplanare Punkt der Fläche.

---

[1]) Eine nicht-isotrope Gerade liegt allgemein gegen eine Minimalgerade, wenn sie diese weder schneidet noch zu ihr senkrecht steht.

15. Jede Ähnlichkeitstransformation transformiert bekanntlich den absoluten Kegelschnitt automorph, erhält also die Orthogonalität und führt jede nicht-isotrope, bzw. isotrope Gerade oder Ebene bezüglich wieder in eine solche über.

Jede algebraische Mongesche Fläche erster oder zweiter Art wird durch eine beliebige Ähnlichkeitstransformation in eine algebraische Mongesche Fläche derselben Ordnung und derselben Art übergeführt. Unter den Mongeschen Flächen einer und derselben Ordnung gibt es aber verschiedene Typen, die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, derart, daß eine Fläche eines bestimmten Typus durch jede beliebige Ähnlichkeitstranformation immer nur in eine Fläche desselben Typus transformiert werden kann.

In den letzten beiden Nummern traten Repräsentanten der folgenden drei verschiedenen Typen von Mongeschen Flächen dritter Ordnung auf:

1. **Typus** [Flächen mit zwei Leitgeraden]: Die Doppelgerade ist eine Minimalgerade μ, die zweite Leitgerade ist eine nicht-isotrope Gerade γ von allgemeiner Lage gegen μ.
2. **Typus** [Flächen mit zwei Leitgeraden]: Die Doppelgerade ist eine Minimalgerade μ, die zweite Leitgerade ist eine μ senkrecht kreuzende nicht-isotrope Gerade γ.
3. **Typus** [Cayleysche Linienfläche]: Die doppeltzählende Leitgerade ist eine Minimalgerade μ, längs deren die Minimalebene von μ feste Berührungsebene bleibt.

Die Flächen des 1. und 3. Typus sind Mongesche Flächen zweiter, die des 2. Typus solche erster Art.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Die angeführten drei Flächentypen sind die einzigen Typen von (irreduziblen) Mongeschen Flächen dritter Ordnung, die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invariant sind.

Jede solche Mongesche Fläche dritter Ordnung läßt sich dadurch erzeugen, daß man den absoluten Kegelschnitt α auf eine eigentliche gerade Punktreihe[1]) γ projektiv bezieht und entsprechende Punkte verbindet; dabei ist, falls α und γ sich schneiden, vorauszusetzen, daß der Schnittpunkt nicht entsprechend gemeinsam sei.

Führt man einen Augenblick homogene Koordinaten x, y, z, t ein, so daß $t = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Ebene ist, und definiert man den absoluten Kegelschnitt α durch die beiden projektiven Büschel:

$$(1) \qquad \left.\begin{cases} z - \lambda(x - iy) = 0, \\ x + iy + \lambda z = 0, \end{cases}\right\} t = 0,$$

so folgt für die Koordinaten eines Punktes von α:

$$(2) \qquad x : y : z = \frac{i(1-\lambda^2)}{2} : -\frac{1+\lambda^2}{2} : i\lambda, \qquad t = 0.$$

Indem man dem uneigentlichen Punkte $(x_1, y_1, z_1, 0)$ der geraden Punktreihe γ, die auf α projektiv bezogen wird, den Punkt $\left(-\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ von α zuordnet, der dem Werte $\frac{1}{\lambda} = 0$ entspricht, kann man, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Koordinaten eines Punktes (x, y, z, t) von γ durch

$$(3) \qquad x = \lambda x_1, \quad y = \lambda y_1, \quad z = \lambda z_1, \quad t = t_0$$

geben.

Man gelangt so zu der folgenden Parameterdarstellung der erzeugten Mongeschen Fläche dritter Ordnung in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda x_1 + \frac{i}{2}(1-\lambda^2)\mu, \\ y = \lambda y_1 - \frac{1}{2}(1+\lambda^2)\mu, \\ z = \lambda z_1 + i\lambda\mu. \end{cases}$$

[1]) Unter einer eigentlichen geraden Punktreihe verstehen wir eine solche, die nur einen einzigen uneigentlichen Punkt enthält.

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$(5)\qquad x_1 + i y_1 = a, \quad x_1 - i y_1 = b, \quad z_1 = c$$

liefert Elimination von λ und μ aus (4) die Flächengleichung in der Form:

$$(6)\qquad \begin{aligned}(x^2+y^2+z^2+c(x+iy)-az)(c(x-iy)-bz+ab-c^2)\\ -(b(x+iy)+cz)^2=0.\end{aligned}$$

Die Doppelgerade der Fläche ist stets eine Minimalgerade, nämlich die Gerade:

$$(7)\qquad b(x+iy)+cz=0, \quad c(x-iy)-bz+ab+c^2=0.$$

Die zweite Leitgerade hat die Gleichungen:

$$(8)\qquad c(x+iy)-az=0, \quad c(x-iy)-bz=0;$$

sie steht insbesondere zur ersten Leitgeraden senkrecht, wenn:

$$(9)\qquad b=0,$$

oder wenn:

$$(10)\qquad ab+c^2=0$$ [1]

ist. Im zweiten Falle, und nur in diesem, ist auch die zweite Leitgerade eine Minimalgerade und mit der Doppelgeraden identisch. Die Fläche (6) ist dann eine Cayleysche Linienfläche, deren feste Tangentialebene längs der Doppelgeraden die durch sie gelegte Minimalebene:

$$(11)\qquad (b^2-c^2)x+i(b^2+c^2)y+2bcz=0$$

ist.

Man gelangt also in der Tat nur zu den drei obengenannten Flächentypen. Ihre Invarianz gegenüber jeder Ähnlichkeitstransformation erhellt aus dem weiter oben Gesagten.

Die im vorstehenden ausgeschlossene Annahme, daß die einfache Leitgerade der Fläche dritter Ordnung eine uneigentliche Gerade ist, ist offenbar unmöglich, ohne daß die Fläche

[1] $b=0$, $c=0$ kann nicht gleichzeitig erfüllt sein, ohne daß die Fläche (6) zerfällt.

zerfällt; denn die Minimalgeraden in einer Schar von ∞^1 parallelen Ebenen, die eine diese Ebenen schneidende eigentliche Gerade treffen, liegen sämtlich in einer oder zwei Ebenen durch diese Gerade.

Schließlich gilt noch der Satz:

Es gibt keine Regelfläche dritter Ordnung konstanten, von Null verschiedenen Krümmungsmaßes.

Einerseits führt nämlich eine beliebige Ähnlichkeitstransformation jede Fläche nicht konstanten Krümmungsmaßes wieder in eine Fläche der gleichen Eigenschaft über, so daß nach den Ergebnissen von Nr. 13 und 14 unter den drei angeführten Typen von Mongeschen Flächen dritter Ordnung keine Serretsche Fläche enthalten sein kann. Andererseits besitzt bekanntlich eine Regelfläche mit nicht-isotropen Erzeugenden niemals ein von Null verschiedenes konstantes Krümmungsmaß.

16. Die nach den (nicht-isotropen) Kugeln einfachsten algebraischen Regelflächen konstanter, von Null verschiedener Krümmung sind demnach diejenigen Serretschen Flächen (vierter Ordnung), deren Zentrakurve eine Minimalkurve dritter Ordnung ist oder die algebraischen Schraubenröhrenflächen[1]).

Seien die Koordinaten dieser Zentrakurve in Funktion eines natürlichen Parameters p durch

$$(1)\qquad \xi = \frac{i}{2}\left(-\frac{p^3}{3} + p\right), \qquad \eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3} + p\right), \qquad \zeta = \frac{i}{2}p^2$$

gegeben. Die Kurve (1) bildet — wenn für einen Augenblick wieder homogene Koordinaten x, y, z, t eingeführt werden, und $t = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Ebene ist — mit der uneigentlichen Tangente des absoluten Kegelschnittes:

$$(2)\qquad x - iy = 0, \qquad t = 0$$

zusammen den vollständigen Schnitt der beiden Flächen zweiter Ordnung:

[1]) E. Study, [Einl. 20)], p. 278.

(3) $2z(x-iy)+3i(x+iy)t=0, \quad (x-iy)^2-2izt=0,$

deren zweite ein unebener Minimalzylinder mit dem (uneigentlichen) Scheitel:

$$x-iy=0, \quad z=0, \quad t=0 \tag{4}$$

ist. Der Punkt (4) ist der (dreifach zählende) uneigentliche Punkt der Minimalkurve (1), die Gerade (2) ihre Tangente, und die uneigentliche Ebene ihre Schmiegungsebene im Punkte (4). Die Kurve (1) ist mithin eine kubische Parabel.

Ist nun a der Hauptkrümmungsradius einer Serretschen Fläche von der Zentrakurve (1), so ergibt sich, nach leichter Veränderung der Bezeichnung, aus Nr. 9 (II) die folgende Parameterdarstellung der Fläche:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{i}{6}p^3+\left(a+\frac{i}{2}\right)p+q\cdot\frac{i}{2}(1-p^2) \\ y &= -\frac{1}{6}p^3-i\left(a-\frac{i}{2}\right)p-q\cdot\frac{1}{2}(1+p^2) \\ z &= \frac{i}{2}p^2-a+q\cdot ip, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

und Elimination von p und q hieraus ergibt als Flächengleichung:

$$\begin{aligned} &12(x-iy)^2(x^2+y^2+z^2-a^2)-36iz(x^2+y^2) \\ &\quad +9(x+iy)^2-8i(2z-a)^2(z+a)=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Serretsche Fläche vierter Ordnung ist von Geschlechte Null, und gehört der ersten Spezies Cremonas[1]), der zehnten Cayleys[2]) an. Ihre Doppelkurve ist die kubische Parabel:

$$\begin{aligned} 2(z+a)(x-iy)+3i(x+iy)&=0, \\ (x-iy)^2-i(2z-a)&=0, \end{aligned} \tag{7}$$

---

[1]) L. Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto grado. Mem. Acc. Bologna (2) 8 (1868), p. 235—250.

[2]) A. Cayley, A third memoir on skew surfaces, otherwise scrolls. Phil. Trans. 159 (1869), p. 111—126 [vorgelegt 30. Mai, gelesen 18. Juni 1868]; auch Coll. math. papers VI., Cambridge 1893, p. 312—328.

die dem Werte $q = \sqrt{3ai}$ entspricht, und deren uneigentlicher Punkt (4), deren uneigentliche Tangente die Gerade (2) ist.

Die betrachtete Serretsche Fläche läßt sich auch erzeugen, indem man die einander entsprechenden Punkte der Parabel

$$\mathfrak{x} = p\left(\frac{i}{3} + a\right), \quad \mathfrak{y} = ip\left(\frac{i}{3} - a\right), \quad \mathfrak{z} = \frac{i}{6}p^2 - a \tag{8}$$

und des absoluten Kegelschnittes

$$x : y : z = \frac{i}{2}(1 - p^2) : -\frac{1}{2}(1 + p^2) : ip, \quad (t = 0) \tag{9}$$

verbindet.

IV. Von der isometrischen Abbildung der Mongeschen Flächen erster Art aufeinander und auf die Flächen zweiter Art.

17. Jede Mongesche Fläche erster Art läßt sich, ihrer in Nr. 7 angegebenen Erzeugungsweise nach, als Verallgemeinerung einer nicht-isotropen Kugel auffassen, in gleicher Weise, wie sich jede Fläche zweiter Art und variablen Krümmungsmaßes als Verallgemeinerung einer Serretschen Fläche ansehen läßt, die (in dem dort definierten Sinne) zu derselben isotropen Fläche gehört. Dementsprechend enthalten auch die meisten Eigenschaften der Flächen erster Art teils Eigenschaften der Kugeln als spezielle Fälle, teils sind sie mit solchen geradezu identisch [wie z. B. die in Nr. 8 2) und 3) genannten]. Das letztere gilt insbesondere auch von der Frage der Abwickelbarkeit zweier solcher Flächen aufeinander, der wir uns jetzt zuwenden. Es besteht hier nämlich der Satz:

Alle aufeinander abwickelbaren Mongeschen Flächen erster Art gehen aus einer beliebigen unter ihnen durch Bewegung oder Umlegung hervor.

Sind nämlich zwei Flächen erster Art f und f_1 bzw. dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= \xi_0 + R(u)\,(v\,\xi'(u) + i\,\xi''(u)),\\ y &= \eta_0 + R(u)\,(v\,\eta'(u) + i\eta''(u)),\\ z &= \zeta_0 + R(u)\,(v\,\zeta'(u) + i\,\zeta''(u)) \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_{01} + R_1(u_1)\,(v_1\,\xi'(u_1) + i\,\xi''(u_1)),\\ y_1 &= \eta_{01} + R_1(u_1)\,(v_1\,\eta'(u_1) + i\,\eta''(u_1)),\\ z_1 &= \zeta_{01} + R_1(u_1)\,(v_1\,\zeta'(u_1) + i\,\zeta''(u_1)),\end{aligned}$$

wo

$$(3)\quad \begin{cases} \xi'(a) = i\,\dfrac{1-a^2}{2}, \quad \eta'(a) = -\dfrac{1+a^2}{2}, \quad \zeta'(a) = i\,a, \\ \xi''(a) = -\,i\,a, \quad \eta''(a) = -\,a, \quad \zeta''(a) = i, \end{cases} \qquad (i^2 = -1)$$

ist, so sind zunächst notwendige Bedingungen dafür, daß die beiden Flächen aufeinander abwickelbar sind, und daß bei der Abwicklung dem Punkte (u, v) von f der Punkt (u_1, v_1) von f_1 entspricht: 1^0, daß u_1 eine Funktion von u allein ist

$$(4)\qquad u_1 = F(u), \qquad d\,u_1 = F'(u)\,d\,u$$

und 2^0, daß

$$(5)\qquad R_1(u_1) = \varepsilon\,R(u), \qquad (\varepsilon^2 = +1)$$

ist.

Führt man diese Beziehungen in die durch die Gleichheit der entsprechenden Bogenelemente dargestellte notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit der beiden Flächen

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\left\{-\,R(u)^2 v^2 + \left(\frac{d\,R(u)}{d\,u}\right)^2\right\} d\,u^2 + 2\,i\,R(u)^2\,d\,u\,d\,v \\ &= \left\{-\,R_1(u_1)^2\,v_1^2 + \left(\frac{d\,R_1(u_1)}{d\,u_1}\right)^2\right\} d\,u_1^2 + 2\,i\,R_1(u_1)^2\,d\,u_1\,d\,v_1 \end{aligned}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$(7)\qquad (v_1^2\,F'^2 - v^2)\,d\,u + 2\,i\,d\,v = 2\,i\,F'\,d\,v_1;$$

diese ist identisch mit dem Systeme

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial u} = \dfrac{i}{2\,F'} \quad (v^2 - v_1^2\,F'^2), \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial v} = \dfrac{1}{F'}, \end{cases}$$

dessen Integrabilitätsbedingung für v_1 den Wert

$$v_1 = \frac{1}{F'} \cdot v - i\,\frac{F''}{F'^2} \tag{9}$$

ergibt. Dieser Wert von v_1 erfüllt die zweite Gleichung (8) identisch; in die erste eingesetzt, gibt er schließlich

$$\{F, u\} \equiv \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = 0. \tag{10}$$

Das allgemeine Integral dieser Schwarzschen Differentialgleichung ist bekanntlich die gebrochene lineare Funktion von u, so daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit der beiden Flächen

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a\,u + b}{c\,u + d}, \qquad v_1 = \dfrac{c\,u + d}{a\,d - b\,c}\{(c\,u + d)\,v + 2\,i\,c\}, \\[2ex] R_1\left(\dfrac{a\,u + b}{c\,u + d}\right) = \varepsilon\, R(u) \end{cases}$$

lautet. Darin ist $\varepsilon^2 = +1$ und a, b, c, d bedeuten vier im übrigen beliebige Konstante derart, daß $a\,d - b\,c \neq 0$ ist.

Es handelt sich nur noch um die geometrische Deutung dieser Bedingung. Wählt man in (III) zunächst $\varepsilon = +1$ und setzt die Werte (III) von u_1 und v_1 in (2) ein, so erhält man mit Hilfe von (1) nach leichter Rechnung

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{a\,d - b\,c}(x - \xi_0) + \dfrac{i}{2}\,\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a\,d - b\,c}(y - \eta_0) \\[1ex] \qquad + \dfrac{c\,d - a\,b}{a\,d - b\,c}(z - \zeta_0) + \xi_{01}, \\[2ex] y_1 = -\dfrac{i}{2}\,\dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{a\,d - b\,c}(x - \xi_0) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a\,d - b\,c}(y - \eta_0) \\[1ex] \qquad + i\,\dfrac{c\,d + a\,b}{a\,d - b\,c}(z - \zeta_0) + \eta_{01}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{b\,d - a\,c}{a\,d - b\,c}(x - \xi_0) - i\,\dfrac{b\,d + a\,c}{a\,d - b\,c}(y - \eta_0) \\[1ex] \qquad + \dfrac{a\,d + b\,c}{a\,d - b\,c}(z - \zeta_0) + \zeta_{01}. \end{cases}$$

Die Fläche f_1 geht also aus der Fläche f durch eine Bewegung hervor, derart, daß bei der Abwicklung einander entsprechende Punkte einander auch durch diese Bewegung entsprechen.

Endlich ist, wie schon in Nr. 8, Anm. [1]) (auf p. 169) bemerkt wurde, die Vertauschung von $R(u)$ mit $-R(u)$ mit einer einfachsten Umlegung [Spiegelung am Scheitel des zur Fläche gehörigen Minimalkegels] gleichbedeutend.

Damit ist der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes vollständig geführt.

18. Eine leichte Abänderung der letzten Betrachtung führt auf eine besondere Gattung von Mongeschen Flächen erster Art, welche den Kugeln noch näher stehen als die allgemeinen Flächen dieser Art.

Ist nämlich der Hauptkrümmungsradius R einer durch Nr. 17 (1) — ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ — dargestellten Fläche erster Art f eine automorphe Funktion seines Argumentes u, so daß

$$(1)\quad R(u_k) = R\left(\frac{a_k u + b_k}{c_k u + d_k}\right) = R(u), \quad (a_k d_k - b_k c_k \neq 0, \ k = 1, 2 \ldots)$$

ist, so wird die Fläche f durch die (endliche oder unendliche diskontinuierliche) Gruppe aller Transformationen

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u_k &= \frac{a_k u + b_k}{c_k u + d_k}, \\ v_k &= \frac{c_k u + d_k}{a_k d_k - b_k c_k}\{(c_k u + d_k) v + 2 i c_k\}, \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2 \ldots)$$

in sich selbst übergeführt. Wir wollen die Gruppe (2) von Transformationen als die Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ bezeichnen; sie ist identisch mit der Gruppe der Rotationen

$$
(3)\quad \begin{cases}
x_k = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_k^2 - b_k^2 - c_k^2 + d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}x + \dfrac{i}{2}\dfrac{a_k^2 + b_k^2 - c_k^2 - d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}y \\
\qquad\qquad + \dfrac{c_k d_k - a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}z, \\
y_k = -\dfrac{i}{2}\dfrac{a_k^2 - b_k^2 + c_k^2 - d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}y \\
\qquad\qquad + i\dfrac{c_k d_k + a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}z, \\
z_k = \dfrac{b_k d_k - a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}x - i\dfrac{b_k d_k + a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}y + \dfrac{a_k d_k + b_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}z
\end{cases}
$$

um den Scheitel (0, 0, 0) des zugehörigen Minimalkegels. Durch eine solche Rotation wird auch die auf der Fläche f gelegene Minimalgeradenschar in sich selbst transformiert, so daß die Fläche f durch jede Rotation (3) auf sich selbst abgewickelt wird.

Wir bezeichnen eine solche Mongesche Fläche erster Art als eine zur Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörige automorphe (Mongesche) Fläche und nennen umgekehrt auch die Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ die zu dieser Fläche gehörige Gruppe.

Nach bekannten Sätzen über die automorphen Funktionen[1]) besteht zwischen den Krümmungsmaßen zweier zu derselben Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Flächen immer eine algebraische Beziehung, und das Krümmungsmaß einer automorphen Fläche läßt sich rational durch die Krümmungsmaße zweier zu derselben Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Flächen ausdrücken.

[1]) Vgl. R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen II. (Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen.) Leipzig und Berlin 1912, p. 19.

Man sieht, wie die Kugel sich als spezieller Fall dieser automorphen Flächen auffassen läßt: ihr (konstanter) Hauptkrümmungsradius hat die Eigenschaft (1) in Bezug auf jede Transformation $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$.

Als Beispiel einer automorphen Mongeschen Fläche führen wir die Fläche

$$(4) \qquad x = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u - 1)^2} \left(i v \frac{1 - u^2}{2} + u \right),$$

$$y = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u - 1)^2} \left(-v \frac{1 + u^2}{2} - i u \right), \; z = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u - 1)^2} (i v u - 1)$$

an, die zur anharmonischen Gruppe von linearen Substitutionen der Veränderlichen u gehört, d. h. durch jede der sechs Transformationen

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ & 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$$

auf sich selbst abgewickelt wird. Diese Transformationen sind bezüglich mit den Rotationen um den Anfangspunkt

$$(5^*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l|l|l} x_1 = x & x_2 = x & x_3 = -\frac{1}{2} x - \frac{i}{2} y - z \\ y_1 = y & y_2 = -y & y_3 = -\frac{i}{2} x - \frac{3}{2} y + i z \\ z_1 = z & z_2 = -z & z_3 = -x + i y + z \end{array} \\ \begin{array}{l|l|l} x_4 = -\frac{1}{2} x - \frac{i}{2} y - z & x_5 = -\frac{1}{2} x + \frac{i}{2} y + z & x_6 = -\frac{1}{2} x + \frac{i}{2} y + z, \\ y_4 = \frac{i}{2} x + \frac{3}{2} y - i z & y_5 = -\frac{i}{2} x + \frac{3}{2} y - i z & y_6 = \frac{i}{2} x - \frac{3}{2} y + i z, \\ z_4 = x - i y - z & z_5 = -x - i y - z & z_6 = x + i y + z \end{array} \end{array} \right.$$

identisch.

19. Aus den Entwicklungen der beiden letzten Nummern läßt sich noch eine Folgerung über gewisse Minimalkurven im R_4 ziehen.

Wegen der Relation Nr. 6 (b) kann man nämlich die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ der Hauptkrümmungsmittelpunkte einer beliebigen Mongeschen Fläche f und den (um eine beliebige Konstante vermehrten) mit i multiplizierten Hauptkrümmungsradius R von f als Koordinaten der Punkte einer gewissen krummen Minimallinie im R_4 auffassen[1]). Ist speziell die Fläche f eine Fläche erster Art, so ist, nach Nr. 8 (1) und (9), die entsprechende Minimalkurve im R_4, wenn man von einer beliebigen Translation absieht, dargestellt durch

$$(1)\quad x=\frac{dR}{du}\cdot\frac{1-u^2}{2},\quad y=i\frac{dR}{du}\cdot\frac{1+u^2}{2},\quad z=\frac{dR}{du}\cdot u,\quad t=R(u),$$

wo R eine nicht konstante Funktion von u bedeutet, und liegt daher im R_3

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=0,$$

der die t-Achse enthält.

Da im Falle einer durch Nr. 17 (1) (mit $\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$) dargestellten, zur Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Fläche f auch die Zentrakurve z von f durch die Gruppe der Rotationen Nr. 18 (3) um den Scheitel (0, 0, 0) des zugehörigen Minimalkegels in sich selbst übergeführt wird, so folgt der Satz:

Ist in den Gleichungen der krummen Minimallinie (1) $R(u)$ eine zur Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörende automorphe Funktion von u, so wird die Minimalkurve (1) durch die Gruppe

---

[1]) Über die krummen Minimallinien und „regulären" Minimalflächen [Study] im R_4 vgl. namentlich L. P. Eisenhart, Minimal surfaces in Euclidean four-space. Amer. J. math. 34 (1912), p. 215—236.

$$(3)\left\{\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{2}\frac{a_k^2-b_k^2-c_k^2+d_k^2}{a_k d_k-b_k c_k}x+\frac{i}{2}\frac{a_k^2+b_k^2-c_k^2-d_k^2}{a_k d_k-b_k c_k}y+\frac{c_k d_k-a_k b_k}{a_k d_k-b_k c_k}z+*,\\
y_k &= -\frac{i}{2}\frac{a_k^2-b_k^2+c_k^2-d_k^2}{a_k d_k-b_k c_k}x+\frac{1}{2}\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2}{a_k d_k-b_k c_k}y+i\frac{c_k d_k+a_k b_k}{a_k d_k-b_k c_k}z+*,\\
z_k &= \frac{b_k d_k-a_k c_k}{a_k d_k-b_k c_k}x-i\frac{b_k d_k+a_k c_k}{a_k d_k-b_k c_k}y+\frac{a_k d_k+b_k c_k}{a_k d_k-b_k c_k}z+*,\\
t_k &= * + * + * + t
\end{aligned}\right.$$

von Rotationen des R_4 um die t-Axe in sich selbst übergeführt.

Diese Rotationen führen zugleich den R_3 (2) in sich selbst über.

20. Schließlich soll noch die Frage der isometrischen Abbildung einer Mongeschen Fläche erster Art auf eine solche zweiter Art kurz behandelt werden[1]).

Die Fläche f zweiter Art sei durch die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned}
x &= \xi(p)+R(p)(q\,\xi'(p)+i\,\xi''(p)),\\
y &= \eta(p)+R(p)(q\,\eta'(p)+i\,\eta''(p)),\\
z &= \zeta(p)+R(p)(q\,\zeta'(p)+i\,\zeta''(p))
\end{aligned}$$

und die Fläche f_1 erster Art durch die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned}
x_1 &= \xi_{01}+R_1(u_1)\left(u_1+i\frac{1-u_1^2}{2}v_1\right),\\
y_1 &= \eta_{01}+R_1(u_1)\left(-i\,u_1-\frac{1+u_1^2}{2}v_1\right),\\
z_1 &= \zeta_{01}+R_1(u_1)(-1+i\,u_1 v_1)
\end{aligned}$$

gegeben, wo $\xi(p)$, $\eta(p)$, $\zeta(p)$ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p von λ, die Indizes Differentiation nach p, und ξ_{01},

[1]) Über die isometrische Abbildung der Serretschen Flächen, insbesondere der transzendenten Schraubenröhrenflächen auf die Kugeln vgl. E. Study, [Einl. 20)], p. 276 ff.

η_{01}, ζ_{01} willkürliche Konstante bedeuten. Ferner werde die charakteristische Invariante $(3|3)_p$ der Minimallinie λ mit J bezeichnet.

Man hat dann als Bedingungen für eine isometrische Abbildung der beiden Flächen aufeinander, bei welcher dem Punkte (p, q) von f der Punkt (u_1, v_1) von f_1 entspricht,

$$\text{(4 a)}\qquad \begin{cases} u_1 = F(p), \quad \text{also} \quad du_1 = F'(p)\,dp, \\ R_1(u_1) = \varepsilon\, R(p), \qquad (\varepsilon^2 = 1) \end{cases}$$

und

$$\text{(4 b)}\qquad \begin{aligned} &\left\{2\,i\,R(p) - R(p)^2\,(q^2 + J(p)) + \left(\frac{d\,R(p)}{d\,p}\right)^2\right\} d\,p^2 \\ &+ 2\,i\,R(p)^2\,d\,p\,d\,q = \left\{-R_1(u_1)^2\,v_1^2 + \left(\frac{d\,R_1(u_1)}{d\,u_1}\right)^2\right\} d\,u_1^2 \\ &\qquad + 2\,i\,R_1(u_1)^2\,d\,u_1\,d\,v_1 . \end{aligned}$$

Die Bedingungen (4 a) sind notwendig, die Bedingung (4 b) ist notwendig und hinreichend. Durch ähnliche Rechnungen, wie sie in Nr. 17 durchgeführt wurden, erhält man für v_1 den Wert

$$\text{(5)}\qquad v_1 = \frac{1}{F'}\,q - i\,\frac{F''}{F'^2}$$

und für F selbst die Riccatische Differentialgleichung

$$\text{(6)}\qquad \frac{d\left(\dfrac{F''}{F'}\right)}{d\,p} - \frac{1}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = \frac{i}{R} - \frac{J}{2}$$

oder die mit ihr äquivalente Schwarzsche Differentialgleichung

$$\text{(6*)}\qquad \{F, p\} \equiv \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = \frac{i}{R} - \frac{J}{2}.$$

Die isometrische Abbildung einer Mongeschen Fläche erster Art auf eine gegebene Mongesche Fläche zweiter Art und nicht konstanten Krümmungsmaßes [und ebenso die isometrische Abbildung einer Kugel auf eine gegebene Serretsche Fläche] hängt also, außer von der Forderung der Gleichheit der Krümmungsmaße in entsprechenden Punkten, nur von der Integration einer Riccatischen oder einer mit dieser äquivalenten Schwarzschen Differentialgleichung ab.

Kennt man ein partikuläres Integral F_0 von (6*), so ist das allgemeine Integral durch

$$F = \frac{a F_0 + b}{c F_0 + d}, \qquad (a, b, c, d \text{ Konstante, } ad - bc \neq 0) \tag{7}$$

bestimmt, was mit dem Resultate von Nr. 17 in vollkommenem Einklange steht.

Ein einfaches Beispiel bietet die isometrische Abbildung der Einheitskugel um den Koordinatenanfang auf die in Nr. 16 besprochene Serretsche Fläche vierter Ordnung, vom Krümmungsmaße 1. Wählt man für den Hauptkrümmungsradius beider Flächen den Wert $+1$, so ist die Serretsche Fläche — in einfachster Lage — durch

$$\begin{aligned} x &= -\frac{i}{6} p^3 + \left(1 + \frac{i}{2}\right) p + q \cdot \frac{i}{2} (1 - p^2), \\ y &= -\frac{1}{6} p^3 - i \left(1 - \frac{i}{2}\right) p - q \cdot \frac{1}{2} (1 + p^2), \\ z &= \frac{i}{2} p^2 - 1 + q \cdot ip \end{aligned} \tag{8}$$

gegeben, die charakteristische Invariante J ihrer Zentrakurve ist Null. Die Kugel ist durch

$$\begin{gathered} x_1 = i v_1 \frac{1 - u_1^2}{2} + u_1, \quad y_1 = -v_1 \frac{1 + u_1^2}{2} - i u_1, \\ z_1 = i v_1 u_1 - 1 \end{gathered} \tag{9}$$

dargestellt. Die Schwarzsche Differentialgleichung, von der das Problem abhängt, lautet in diesem Fall

$$\{F, p\} = i, \tag{10}$$

und ein partikuläres Integral derselben ist

$$u_1 \equiv F_0(p) = e^{ip\sqrt{2i}}. \tag{11}$$

Aus (5) ergibt sich ferner für v_1 der Wert

$$v_1 = -e^{-ip\sqrt{2i}}\left(\sqrt{\frac{i}{2}}\,q + i\right). \tag{12}$$

Bemerkt man noch, daß durch die Transformation

$$u = u_1, \qquad v = u_1 + \frac{2i}{v_1} \tag{13}$$

die Gleichungen (9) der Einheitskugel in die häufig gebrauchten

$$x_1 = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad y_1 = i\,\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad z_1 = \frac{u + v}{u - v} \tag{14}$$

übergehen, so folgt:

Die Einheitskugel (14) wird durch die Substitution

$$u = e^{ip\sqrt{2i}}, \qquad v = e^{ip\sqrt{2i}}\cdot\frac{q\sqrt{2i} - 2i}{q\sqrt{2i} + 2i} \tag{15}$$

auf die Serretsche Fläche (8) isometrisch abgebildet.