

# Sitzungsberichte

der

**mathematisch-physikalischen Klasse**

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu **München.**

---

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

---



**München.**

Verlag der K. Akademie.

1905.

---

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

## Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden.

Von S. Flusterwalder.

(Eingelaufen 14. April.)

Unter flüchtigen photogrammetrischen Aufnahmen sollen im Folgenden solche verstanden werden, bei welchen die Standpunkte des photographischen Apparates nicht durch eigene Messungen höheren Genauigkeitsgrades festgelegt werden. In diesem Sinne sind insbesondere die photogrammetrischen Aufnahmen vom Luftballon aus als flüchtige zu bezeichnen und die Methoden, welche ich früher für Ballonaufnahmen<sup>1)</sup> angegeben habe, lassen eine sinngemässe Anwendung auf alle andern flüchtigen Aufnahmen zu. Bei Ballonaufnahmen ist man zu- meist auf die Kenntnis der inneren Orientierung (Bildweite und Hauptpunkt) des verwendeten Apparates angewiesen, da sich die äussere Orientierung desselben gegen die Vertikale oder den Meridian nur durch umständliche und wenig genaue Mittel gewinnen lässt. Bei Aufnahmen jedoch, welche auf festem Boden ausgeführt werden, begnügt man sich nicht mit der Kenntnis der inneren Orientierung des photogrammetrischen Apparates, sondern man nimmt die leicht genau auszuführende Orientierung gegen die Lotrichtung dazu und verschmäht unter Umständen auch die weniger sichere Orientierung gegen

---

<sup>1)</sup> Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abhdlgn. der K. Bayer. Akad. der Wiss., II. Kl., XXII. Bd., 2. Abt., 1903, S. 223, sowie: Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichsrechnung und solchen der Statik. Diese Berichte Bd. 33, 1903, S. 683.

die Nord-Südrichtung mittels der Magnetnadel nicht. Dadurch vereinfachen sich die Konstruktionen wesentlich und ausserdem lässt sich die Genauigkeit steigern. Legt man auf letzteren Umstand weniger Gewicht, so kann man die Konstruktionen rein graphisch ausführen und erzielt damit Raschheit und Übersichtlichkeit. Während bei alleiniger Kenntnis der inneren Orientierung der Aufnahmen die Rekonstruktion des Objektes nur auf dem Wege des Tastens gelingt, wobei vier oder doch mindestens drei Grössen zu verändern sind, lässt sich bei Hinzuziehung der Orientierung gegen die Lotrichtung dieselbe Aufgabe auf eine einzige Gleichung 6. Grades zurückführen, die man durch eine sehr anschauliche geometrische Konstruktion ersetzen kann. Wird auch noch die magnetische Orientierung benützt, so fallen alle Verwickelungen fort und die Lösung läuft auf das Ziehen gerader Linien hinaus.

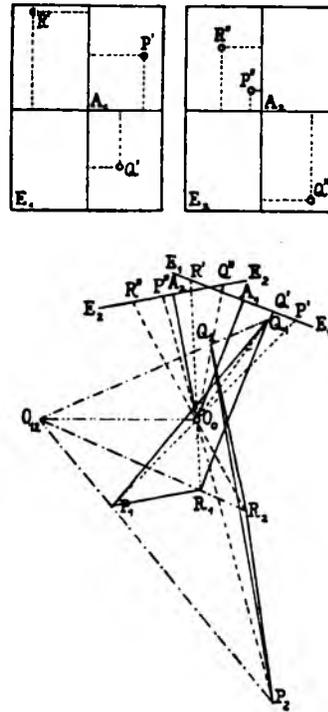
## I.

Wir betrachten zwei Aufnahmen mit den Standpunkten  $O_1$  und  $O_2$ . Die Strahlen, welche von ihnen aus nach einem Raumpunkt  $P$  hinlaufen, denken wir uns parallel verschoben, bis sie durch einen festen Punkt  $O$  gehen. Durch diesen Punkt legen wir auch eine Parallele zur Standlinie  $O_1 O_2$ . Diese drei Parallelen müssen in ein und derselben Ebene liegen. Wir schneiden nun die Figur derselben durch eine Horizontalebene (Bezugsebene) in der Entfernung „Eins“ von  $O$  und bezeichnen den Schnittpunkt der Parallelen zu  $O_1 P$  mit  $P_1$ , jenen der Parallelen zu  $O_2 P$  mit  $P_2$  und den der Parallelen zur Standlinie  $O_1 O_2$  mit  $O_{12}$ . Es liegen dann die drei Punkte  $P_1, P_2, O_{12}$  in einer Geraden. Ist die volle äussere Orientierung der Aufnahmen gegeben, so kann man in einfachster Weise die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  zeichnen und erhält in ihrer Verbindungslinie einen geometrischen Ort für den Punkt  $O_{12}$ . Die Strahlen von  $O_1$  und  $O_2$  nach einem zweiten Raumpunkt  $Q$  liefern zwei weitere Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  in der Bezugsebene, deren Verbindungslinie ebenfalls durch den Punkt  $O_{12}$  geht. Hat man so  $O_{12}$  als Schnitt von  $P_1 P_2$  und  $Q_1 Q_2$  gefunden, so bestimmt die Ver-

bindungslinie  $O_1, O$  Richtung und Neigung der Basis  $O_1, O_2$ . Ist  $O_0$  der Fusspunkt des Lotes von  $O$  auf die Bezugsebene, so wird  $O_1, O_0$  die Richtung und der Winkel  $O, O_1, O_0$  die Neigung der Basis ergeben. Die Länge der Basis ist der Natur der Sache nach unbestimmt und kann vorläufig beliebig angenommen werden. Ihre Grösse bestimmt den Massstab der Rekonstruktion des Objektes.

Das Verfahren bei der Wiederherstellung des Objektes aus zwei Bildern, welche nach Lotrichtung und Meridian orientiert sind, lässt sich hiernach folgendermassen schildern, wobei der Einfachheit halber lotrechte Bildebenen vorausgesetzt werden (vergl. Fig. 1). Die Koordinaten der Bildpunkte von  $P, Q, R, \dots$ , bezogen auf ein durch den Hauptpunkt ( $A_1$  bzw.  $A_2$ ) gehendes, aus Hauptvertikale und Horizont bestehendes Koordinatenkreuz werden mit  $x_p, y_p, x_q, y_q, x_r, y_r, \dots$  in der Bildebene  $E_1$  und  $x_p^*, y_p^*, x_q^*, y_q^*, x_r^*, y_r^*, \dots$  in der Bildebene  $E_2$  bezeichnet. Zuerst zieht man von einem Punkte  $O_0$  die Richtungen der optischen Achsen  $O_1, A_1$ , bzw.  $O_2, A_2$  nach den Ablesungen der Magnetnadel, trägt auf ihnen die Bildweite  $O_0, A_1$  bzw.  $O_0, A_2$  ab und errichtet in den Endpunkten Senkrechte, welche den Grundrissen der Bildebenen  $E_1$  und  $E_2$  entsprechen. Auf diese Senkrechten überträgt man die X-Koordinaten von den Fusspunkten ( $A_1$ , bzw.  $A_2$ ) aus und verbindet die Endpunkte  $P', Q', R', \dots$  bzw.  $P'', Q'', R'', \dots$  mit  $O_0$ . Auf den so erhaltenen Strahlen

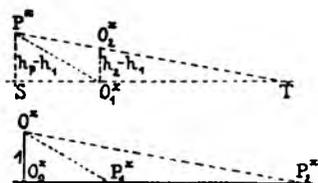
Fig. 1.



findet man die Punkte  $P_1 Q_1 R_1 \dots$  bzw.  $P_2 Q_2 R_2 \dots$ , indem man die Strecken:  $O_0 P_1 = O_0 P'_1 : y'_1$ ,  $O_0 P_2 = O_0 P''_2 : y''_2$  u. s. w. berechnet und von  $O_0$  aus abträgt, bei positiven Vorzeichen in der rückwärtigen Verlängerung von  $O_0 P'_1$  bzw.  $O_0 P''_2$ , bei negativem in umgekehrter Richtung. Die Verbindungslinien  $P_1 P_2, Q_1 Q_2, R_1 R_2, \dots$  schneiden sich dann sämtlich im Punkte  $O_{12}$ , der mit  $O_0$  verbunden die Richtung der Basis gibt, während die Neigung derselben aus der Formel  $\text{ctg } \varphi = O_{12} O_0$  hervorgeht.

Wird nun das Strahlenbüschel  $O_0 (P_2 Q_2 R_2 \dots)$  in der Richtung  $O_{12} O_0$  der Basis um eine Strecke  $b$  gleich der Länge derselben in der Horizontalprojektion verschoben und werden seine Strahlen mit jenen von  $O_0 (P_1 Q_1 R_1 \dots)$  zum Schnitt gebracht, so erhält man die Grundrisse  $P_0 Q_0 R_0 \dots$  der Objektpunkte.

Fig. 2.



Die Höhen kann man entweder in der üblichen Weise doppelt berechnen oder auch vor Ausführung der Konstruktion des Grundrisses aus den Elementen der Figur 1 direkt ermitteln. Zu diesem Zweck betrachten wir in Fig. 2 den Aufriss auf eine zu  $O_0 O_{12}$  senkrechte Ebene. Die Punkte des Aufrisses seien durch den Exponenten  $x$  gekennzeichnet. Die Höhen der Punkte  $O_1, O_2, P$  über einem beliebigen Horizont mögen  $h_1, h_2, h_p$  heißen. Durch  $O_1^x$  wird eine Horizontale  $ST$  gezogen. Aus der Ähnlichkeit der Figuren:  $P^x S T O_1^x$  und  $O^x O_0^x P_2^x P_1^x$  folgt die Proportion:

$$S P^x : O_1^x O_2^x = (h_p - h_1) : (h_2 - h_1) = S T : O_1^x T = O_0^x P_2^x : P_1^x P_2^x.$$

Aus der Grundrissfigur 1 im Zusammenhang mit der Aufrissfigur 2 folgt

$$O_0^x P_2^x : P_1^x P_2^x = O_{12} P_2 : P_1 P_2,$$

somit:

$$h_p - h_1 = \frac{h_2 - h_1}{P_1 P_2} O_{12} P_2 = \frac{b}{O_0 O_{12}} \frac{O_{12} P_2}{P_1 P_2},$$

wenn man an Stelle des Höhenunterschiedes  $h_2 - h_1$  der Basis-

endpunkte deren Horizontaldistanz  $b$  einführt. Wenn der Höhenunterschied  $h_2 - h_1$  gleich Null wird, nähert sich das Verhältnis  $O_{12} P_2 : O_{12} O_0$  der Einheit, da der Punkt  $O_{12}$  ins Unendliche rückt und die Formel für den Höhenunterschied  $h_2 - h_1$  wird:

$$h_2 - h_1 = \frac{b}{P_1 P_2}.$$

Für Punkte in gleicher Höhe ist das Verhältnis  $O_{12} P_2 : P_1 P_2$ , oder, wenn der Höhenunterschied  $h_2 - h_1$  der Basisendpunkte Null ist, die Entfernung  $P_1 P_2$  konstant.

## II.

Wenn die Orientierung beider Aufnahmen gegen den Meridian nicht bekannt ist, wohl aber jene gegen die Vertikale, so kann man die beiden Figuren der Punkte  $O_0 P_1 Q_1 R_1$  und  $O_0 P_2 Q_2 R_2$  (Fig. 1) für sich zeichnen, sie dann derart aufeinanderlegen, dass die Punkte  $O_0$  sich decken und den Winkel beider Figuren gegeneinander solange ändern, bis die Verbindungslinien  $P_1 P_2$ ,  $Q_1 Q_2$ ,  $R_1 R_2$  durch einen Punkt  $O_{12}$  hindurchgehen. Das lässt sich mit Hilfe von Pauspapier mechanisch sehr leicht ausführen. Wenn wir aber den Winkel  $\psi$  berechnen wollen, um den die zweite Figur gegen die erste zu drehen ist, damit die drei Verbindungslinien durch einen Punkt gehen, so stossen wir auf eine Gleichung 6. Grades. Es seien nämlich die rechtwinkligen und Polarkoordinaten der Punkte  $P_1 Q_1 R_1 P_2 Q_2 R_2$  auf  $O_0$  als Anfangspunkt bezogen folgende:

$$P_1: x_1 y_1 r_1 \varphi_1; \quad Q_1: x_2 y_2 r_2 \varphi_2; \quad R_1: x_3 y_3 r_3 \varphi_3;$$

$$P_2: x'_1 y'_1 r'_1 \varphi'_1; \quad Q_2: x'_2 y'_2 r'_2 \varphi'_2; \quad R_2: x'_3 y'_3 r'_3 \varphi'_3.$$

Wird nun die zweite Figur um den Winkel  $\psi$  gegen die erste gedreht, so ändern sich die Polarwinkel der zweiten Figur um diesen Betrag und die Koordinaten der gedrehten Punkte  $P'_2, Q'_2, R'_2$  werden folgende:

$$P'_2 \quad x''_1 = r'_1 \cos(\varphi'_1 + \psi) \quad y''_1 = r'_1 \sin(\varphi'_1 + \psi)$$

$$Q'_2 \quad x''_2 = r'_2 \cos(\varphi'_2 + \psi) \quad y''_2 = r'_2 \sin(\varphi'_2 + \psi)$$

$$R'_2 \quad x''_3 = r'_3 \cos(\varphi'_3 + \psi) \quad y''_3 = r'_3 \sin(\varphi'_3 + \psi).$$

Die Verbindungslinie  $P_1 P_2$  hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ r_1 \cos(\varphi_1 + \psi) & r_1 \sin(\varphi_1 + \psi) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder ausgerechnet:

$$x(y_1 - y_1 \cos \psi - x_1 \sin \psi) + y(-x_1 + x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi) \\ + (x_1 y_1 - y_1 x_1) \cos \psi + (x_1 x_1 + y_1 y_1) \sin \psi = 0.$$

Führt man

$$\sin \psi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \psi = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

wo

$$u = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

ist, ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$x(y_1 - y_1 + 2x_1 u + (y_1 + y_1)u^2) + y(x_1 - x_1 - 2y_1 u - (x_1 + x_1)u^2) \\ + (x_1 y_1 - y_1 x_1)(1 - u^2) + 2(x_1 x_1 + y_1 y_1)u = 0.$$

Analoge Gleichungen gelten für die Verbindungslinien  $Q_1 Q_2$  und  $R_1 R_2$ . Die Bedingung dafür, dass sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden, erhält man durch Nullsetzen der dreireihigen Determinante der Koeffizienten der drei Gleichungen, welche in  $u$  vom 6. Grade wird, da jene Koeffizienten quadratisch in  $u$  sind. Durch Nullsetzen der Diskriminante dieser Gleichung würde man die Bedingung dafür erhalten, dass die auf den gegebenen Bildern gewählten Punkte keine praktisch brauchbare Lösung der Aufgabe zulassen; leider ist dieser Weg wegen der Verwickelung der Formeln nicht gangbar.

Hingegen ist leicht einzusehen, dass die Lösung der Aufgabe dann versagt, wenn die 3 Punkte  $PQR$  mit den Standpunkten  $O_1$  und  $O_2$  in einer Ebene, mag sie nun horizontal oder geneigt sein, liegen. Man kann dann nämlich die beiden Bündel, die aus den Loten in den Standpunkten und den Strahlen, die von letzteren nach den Objektpunkten laufen, gebildet sind, noch auf mannigfache Weise so gegeneinander bewegen, dass

entsprechende Strahlen sich schneiden, ohne dass die Lote aufhören senkrecht zu stehen. Aus dem gleichen Grunde wird die Lösung ganz unsicher, wenn die Lotebenen durch die Strahlen des einen Bündels senkrecht auf den Ebenen stehen, die durch die entsprechenden Strahlen des andern Bündels und die Basis gebildet werden. In diesen Fällen ist noch eine unendlich kleine Bewegung, nämlich eine Drehung um das Lot des ersten Bündels möglich. Aus diesen Gründen wird man sich in der Regel nicht mit dem Zusammenpassen dreier Strahlen begnügen, sondern eine grössere Zahl hereinziehen, aus welchen dann der Punkt  $O_{12}$  auf dem Wege der Ausgleichung hervorgeht.

### III.

Das in den vorhergehenden Abschnitten auseinandergesetzte Verfahren erfährt eine beachtenswerte Erweiterung, wenn, wie es in der Praxis in der Regel der Fall sein wird, zur Bestimmung des Objektes nicht nur zwei, sondern mehrere Photographien zu Gebote stehen. Man wird dann zu allen vorkommenden Geraden und Ebenen Parallele durch einen festen Punkt  $O$  legen und ihre Richtung, bezw. Stellung durch den Schnitt mit einer horizontalen Bezugsebene in der Entfernung „Eins“ von  $O$  bestimmen.<sup>1)</sup> Sobald von zwei Standpunkten  $O_i$  und  $O_k$  einige zusammengehörige Strahlen, welchen in der Bezugsebene die Punkte:  $P_i Q_i R_i \dots, P_k Q_k R_k \dots$  entsprechen, gefunden sind, ist der Punkt  $O_{ik}$  (je nach den Verhältnissen mittels der Methode des ersten oder zweiten Abschnittes) zu ermitteln. Zwischen den Punkten der Bezugsebene bestehen nun mannigfache Beziehungen. Da, z. B., die beiden Dreiecke  $P_i Q_i R_i$  und  $P_k Q_k R_k$  in bezug auf den Punkt  $O_{ik}$  perspektivisch liegen, schneiden sich  $P_i P_k, Q_i Q_k, R_i R_k$  in den Punkten einer Geraden die mit  $O$  zusammen die Stellung der Ebene  $PQR$

---

<sup>1)</sup> Die hier verwendete Art Richtungen und Stellungen im Raum auf einer Bezugsebene festzulegen, wird in der Krystallographie angewendet und führt dort den Namen „gnomonische Projektion oder Neumann'sche Polarprojektion.“

bestimmt. Drei Punkte  $O_{ik}$ , deren Indices durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen, liegen ebenfalls auf einer Geraden, die mit  $O$  zusammen die Stellung der Ebene der drei Standpunkte bestimmt. Hat man, um ein Beispiel zu geben, vier Standpunkte  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , so gibt es sechs Punkte  $O_{ik}$ , die viermal zu je dreien auf einer Geraden liegen, wie folgt:  $O_{12} O_{23} O_{13}, O_{23} O_{34} O_{24}, O_{34} O_{14} O_{13}, O_{12} O_{24} O_{14}$ . Die vier Punkte  $P_1 P_2 P_3 P_4$ , welche den Strahlen von den Standpunkten nach einem Raumpunkt  $P$  entsprechen, bilden die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen sechs Seiten durch die gleichnamigen Punkte  $O_{ik}$  hindurchgehen. Da sich der Höhenunterschied  $h_p - h_1$  des Punktes  $P$  gegenüber  $O_1$  gleich gross ergeben muss, von welcher Basis man auch ausgeht, erhält man die Beziehung:

$$h_p - h_1 = (h_2 - h_1) \frac{O_{13} P_2}{P_1 P_2} = (h_3 - h_1) \frac{O_{13} P_3}{P_1 P_3} = (h_4 - h_1) \frac{O_{14} P_4}{P_1 P_4}.$$

Die Figur in der Bezugsebene ist ein vollständiges Schema aller Horizontal- und Vertikalwinkel, die in der aus dem Objekt und den Standpunkten gebildeten Raumfigur vorkommen. Will man etwa Azimut und Neigung der Verbindungslinie  $PQ$  zweier Objektpunkte wissen, so ziehe man die Verbindungslinien  $P_1 Q_1, P_2 Q_2, P_3 Q_3, P_4 Q_4$ . Diese müssen sich in einem Punkte schneiden, der mit  $O_0$  verbunden das Azimut der Linie  $PQ$  liefert, während seine Entfernung von  $O_0$  der Kotangente des Neigungswinkels gleich ist.

Die erwähnten Beziehungen gewähren eine überreiche Zahl von Kontrollen, welche zur Ausgleichung der aus den Punkten  $O_{ik}$  gebildeten Figur benützt werden können. Durch diese Figur ist das trigonometrische Netz der Standpunkte mit allen Winkeln bis auf den Massstab festgelegt. Sind die Beziehungen erfüllt, so bestehen auch keine Netz widersprüche mehr. Die grossen Vorteile des Verfahrens werden nur durch den Umstand beeinträchtigt, dass dasselbe versagt, wenn das Objekt eben ist und die Standpunkte sich in der gleichen Ebene mit dem Objekt befinden, oder wenn das, wie in vielen Fällen der Praxis, auch

nur annähernd der Fall ist. Eine Rekonstruktion des Objektes aus zwei Aufnahmen ist dann ausgeschlossen. Aus drei oder mehreren Aufnahmen ist sie dagegen möglich, jedoch nicht auf dem hier eingeschlagenen Wege. Für den Fall dreier Aufnahmen, welche gegen den Meridian orientiert sind, ist die Rekonstruktion des Objektes bereits von Lambert<sup>1)</sup> geleistet worden und seine Lösung spielt als das Problem der sechs Punkte (wovon drei die Standpunkte und die drei übrigen Objektpunkte sind) in der Nautik eine gewisse, allerdings bescheidene Rolle. Für drei nicht orientierte Aufnahmen wird man auf ein bisher noch nicht behandeltes Problem der acht Punkte (drei Standpunkte und fünf Objektpunkte) geführt, während vier Aufnahmen auf ein anderes, von Lambert mittels einer Gleichung zweiten Grades sehr umständlich gelöstes Problem der acht Punkte (mit vier Standpunkten und vier Objektpunkten) führt.<sup>2)</sup> Alle diese Probleme können für besondere Aufgaben der Photogrammetrie von Bedeutung werden. Das eigentliche Anwendungsgebiet der Photogrammetrie setzt jedoch grössere Höhenunterschiede zwischen Standpunkten und Objektpunkten voraus und hierfür sind die im Vorstehenden entwickelten Methoden geeignet.

---

<sup>1)</sup> *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und ihrer Anwendung.* Berlin 1765—72, 3. Band, S. 186.

<sup>2)</sup> Siehe auch Grunert: Über eine merkwürdige Relation zwischen den rechtwinkligen Koordinaten von vier Punkten in einer Ebene und den drei Winkeln, welche die vier von diesem Punkte nach einem fünften Punkt in derselben Ebene gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen und über zwei wichtige geodätische Aufgaben. *Archiv für Mathematik und Physik*, 1. Band, S. 89.