# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

Band XIV. Jahrgang 1884.

---

**München.**
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1885.

In Commission bei G. Franz.

Herr Wilhelm von Bezold theilt mit:

„Untersuchungen über dielektrische Ladung und Leitung."

## I.

## Die Theorie des Elektrophors unter Berücksichtigung der Dielektricitätskonstante des Kuchens.

In den Jahren 1870 und 1871 habe ich Untersuchungen veröffentlicht[1]), welche die Wirkungsweise des Elektrophors zum Gegenstande hatten und zwar sowohl vom experimentellen als vom theoretischen Standpunkte aus.

Was die experimentelle Seite dieser Untersuchungen betrifft, so dürfte sie auch heute noch als einwurfsfrei zu betrachten und nur die Deutung einiger Versuche etwas zu modificiren sein. Dagegen leidet der theoretische Theil an einem Mangel, dessen Beseitigung ich für nothwendig halte, wenn auch die Endresultate dadurch qualitativ nicht geändert werden.[2])

Bei meinen früheren Arbeiten auf diesem Gebiete befand ich mich nämlich stets in jenem eigenthümlichen Zwiespalte zwischen Faraday's Anschauungen über die sogenannte elektrische Fernwirkung und den bei den Mathe-

---

1) Sitzungsber. 1870, II, S. 134—153 und 1871, I, S. 18—28, ausführlicher in Pggdff. Ann. Bd. CXLIII S. 52—87. Die letzterwähnte Abhandlung, von welcher ich keine Correctur zu lesen bekam, ist übrigens voll von Druckfehlern.

2) Soferne es sich nur um letzteren handelt, ist dieser Mangel bereits von James Moser beseitigt worden. (Wien. Ber. f. 1881 Bd. CXXXIII. 2. S. 955 ff.)

matikern gebräuchlichen Vorstellungen, von welcher Maxwell in der Vorrede zu seinem Treatise so trefflich sagt, dass es den Anschein hatte, als stünden beide mit einander in Widerspruch, so dass keiner von der Sprache des andern befriedigt war.

Indem ich mich hinsichtlich der Theorie der Condensatoren wesentlich auf dem von Green geschaffenen und dann von Beer und anderen festgehaltenen Boden bewegte, verfiel ich in den all' diesen Untersuchungen gemeinsamen Fehler der Unterschätzung der Rolle, welche die Isolatoren spielen. Ich glaubte, die ganze dielektrische Ladung und Leitung mit der Rückstandsbildung zusammenwerfen und als blosse Functionen der Zeit ansehen zu dürfen, denen man nur eine beschränkte Bedeutung beizumessen habe. Es schien mir deshalb vollkommen berechtigt, alle derartigen Fragen so zu behandeln, als habe man es nur mit Luft zu thun, und die Abänderungen, welche man bei Anwendung anderer Isolatoren an den Formeln anzubringen hat, als blosse Correctionsglieder zu betrachten.

Seitdem besonders durch die Arbeiten Sir William Thomson's und Maxwell's der obenerwähnte scheinbare Widerspruch zwischen den Anschauungen der Mathematiker und jenen Faraday's gehoben ist, muss natürlich die ebenbezeichnete Auffassung fallen, und wurde dies für mich die Veranlassung, meine älteren Untersuchungen auf diesem Gebiete wieder aufzunehmen und sie mit den neuen Anschauungen in Einklang zu bringen.

Dabei mag übrigens gleich hier die Bemerkung Platz finden, dass die an den Formeln anzubringenden Abänderungen thatsächlich in gewisser Hinsicht den Charakter von Correctionen an sich tragen, indem man eben damals nur jene Elektricitätsmengen in Betracht zog, welche man jetzt als der „scheinbaren Elektrisirung“ zukommend bezeichnet.

Den Ausgangspunkt für die Umgestaltung der angedeuteten theoretischen Untersuchungen muss die Formel bilden, welche die Dichtigkeit der freien Elektricität in einer Fläche, beziehungsweise an der Grenzfläche zweier Medien giebt.

Diese Formel lautet unter der Annahme, dass sich Luft auf beiden Seiten der Fläche befindet

$$\frac{dV_2}{d\nu} - \frac{dV_1}{d\nu} = -4\pi\varrho' \qquad \text{(I}$$

und dies ist eben die Form, welche man früher bei theoretischen Untersuchungen ausschliesslich zu Grunde legte.

Befinden sich auf beiden Seiten der Fläche Dielektrica mit den Dielektricitätsconstanten $K_1$ und $K_2$, so gilt statt dessen die Formel

$$K_2\frac{dV_2}{d\nu} - K_1\frac{dV_1}{d\nu} = -4\pi\varrho \qquad \text{(II}$$

Hier ist unter $V_1$ der Werth der Potentialfunction im ersten, unter $V_2$ jener im zweiten Medium verstanden, $d\nu$ das Element der Normalen im Sinne des Uebergangs vom ersten nach dem zweiten Medium, $\varrho'$ und $\varrho$ die Dichtigkeit der Elektricität auf der Fläche. Dabei gebe ich jetzt im Gegensatze zu meiner früheren Gewohnheit der Potenialfunction positiver Massen auch das positive Vorzeichen, um die Formeln mit den von Sir William Thomson und Maxwell gebrauchten in vollkommenen Einklang zu bringen[1]). Die Kraft, welche alsdann im Sinne der X Axe an irgend einer Stelle auf die dort concentrirt gedachte Einheit positiver Elektricität ausgeübt wird[2]), ist alsdann

$$X = -\frac{dV}{dx}.$$

---

1) Nur für die Flächendichtigkeit habe ich die Bezeichnung $\varrho$ beibehalten anstatt $\sigma$, um die Endresultate dieser Untersuchung mit jenen meiner älteren Abhandlung vergleichbar zu erhalten.

2) Maxwell. Treatise I. S. 73 und 74.

Dabei wurde im ersten Falle der Index zugefügt, weil man die erste Formel auch auf den zweiten Fall anwenden kann, wenn man nur unter $\varrho'$ die sogenannte scheinbare oder wie ich sie lieber nennen möchte „ideale" Dichtigkeit versteht, d. h. die Dichtigkeit jener Elektricitätsmengen, die man sich auf der Fläche vertheilt denken müsste, wenn man auf beiden Seiten derselben Luft als Isolator hätte und wenn trotzdem der Verlauf der Potentialfunction allenthalben derselbe bleiben sollte, wie er es bei Vorhandensein der Dielektrica thatsächlich ist.

Gerade der Umstand, dass sich in allen Fällen, wo man es ganz oder theilweise mit anderen dielektrischen Medien zu thun hat als mit Luft, doch jederzeit derselbe Verlauf der Potentialfunction im ganzen Raume erzielen lässt, auch unter der Annahme, dass diese Medien sämmtlich die Dielektricitätskonstante 1 besässen, wenn man sich statt der effectiv vorhandenen Mengen freier Elektricität andere gegeben denkt, bildete wohl den Hauptgrund dafür, dass man besonders in Deutschland die Rolle, welche die Dielektrica spielen, so lange verkennen konnte.

Bevor nun die Formel II auf das Problem des Elektrophors angewendet wird, mag eine kleine Bemerkung über die graphische Darstellung dieser Formeln vorausgeschickt werden.

Untersucht man den Verlauf der Potentialfunction auf irgend einer die elektrisirte Fläche senkrecht durchsetzenden Linie, am einfachsten auf einer Geraden — eine krumme Linie könnte man sich übrigens auch zum Zwecke der Darstellung gerade ausgestreckt denken — so kann man diese Linie als Abscissenaxe in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme wählen und nun für jeden Punkt derselben den Werth der Potentialfunction als Ordinate auftragen.

Man kommt so zu der nämlichen Darstellungsweise, welche man in der Lehre vom galvanische Strome schon längst allgemein benutzt, und der Ausdruck $\frac{dV}{d\nu}$ ist alsdann nichts anderes, als das sogenannte Gefälle.

Dieses Gefälle wird im Allgemeinen beim Durchgange durch eine elektrisirte Fläche, oder durch die Grenzfläche zweier Medien eine plötzliche Aenderung erfahren und demnach die Curve, deren Ordinaten den Werth der Potentialfunction darstellen, an dieser Stelle eine Brechung erleiden.

Fig. 1

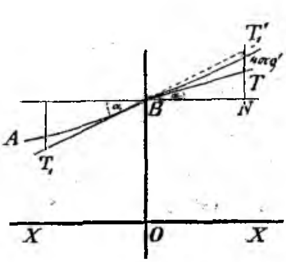
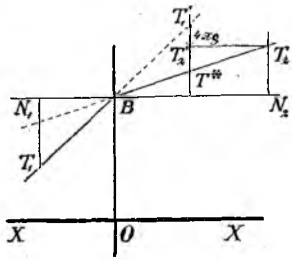



Fig. 2




Gesetzt, es sei O (Fig. 1) der Punkt, in welchem die Gerade XX eine solche Fläche schneidet, ABC[1]) die Curve, welche den Verlauf der Potentialfunction darstellt, so ist im Punkte O

$$\frac{dV_1}{d\nu} = \operatorname{tg}\alpha_1 \quad \text{und} \quad \frac{dV_2}{d\nu} = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

wenn $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Winkel sind, welche die in B an die Curve gelegten Tangenten mit der Abscissenaxe bilden.

Trägt man nun auf einer durch B gelegten Horizontalen eine beliebige Länge BN, die als Längeneinheit gelten soll, ab und zieht man durch den Endpunkt N derselben eine Parallele zur Ordinatenaxe, so sieht man sofort, dass man nur die Gerade $T_1$ B bis $T_1'$ zu verlängern hat, um durch die Länge von $T_1' T_2$ den Werth von $4\pi\varrho'$ zu versinnlichen.

Diese Länge giebt mithin in allen Fällen, wo $K_1 = K_2 = 1$ ist, d. h. wo sich auf beiden Seiten der elektrisirten

1) Durch Versehen ist C aus der Figur weggeblieben; es sollte oberhalb $\varrho'$ stehen.

Fläche Luft befindet, ein Maass für die wirkliche (effective) Dichtigkeit der in dem betreffenden Punkte befindlichen Elektricität, in allen anderen Fällen nur für die scheinbare oder „ideale".

Gesetzt nun, die Medien zu beiden Seiten der Fläche besässen verschiedene Dielektricitätsconstanten $K_1$ und $K_2$, so hat man an dieser Construction nur eine kleine Modification anzubringen. Trägt man nämlich auf NN (Fig. 2) Längen ab, von denen die eine $BN_1 = K_1$, die andere $BN_2 = K_2$ ist und errichtet man nun in $N_1$ und $N_2$ wieder die Senkrechten, so ist

$$K_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - K_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = - 4 \pi \varrho$$

und mithin auch

$$T_2 N_2 - T_1 N_1 = - 4 \pi \varrho$$

oder $$T_1 N_1 - T_2 N_2 = 4 \pi \varrho$$

oder endlich, wenn man $T_1 N_1$ auf die rechte Seite der Figur überträgt

$$T_1' T_2' = 4 \pi \varrho.$$

Diese Linie $T_1' T_2'$ giebt nun in allen Fällen ein Maass für die wirkliche Elektrisirung der betrachteten Fläche in dem Punkte O, d. h. für die Dichtigkeit der in diesem Punkte vorhandenen Elektricität, beziehungsweise für das Product aus dieser Dichtigkeit in $4 \pi$.

Betrachtet man die Figuren 1 und 2 etwas genauer, so sieht man, dass in Fällen, wo sich zu beiden Seiten der elektrisirten Fläche dasselbe Dielektricum befindet, die den Verlauf der Potentialfunction darstellende Curve eine Knickung oder Brechung erfährt, während bei verschiedener Dielektricitätskonstante der zu beiden Seiten liegenden Medien sehr wohl eine solche Brechung vorhanden sein kann, ohne dass deshalb die Fläche thatsächlich elektrisirt ist. Diesen Fall hat man vor sich, sowie in Fig. 2 $T_1'$ mit $T_2'$ zusammenfällt. Umgekehrt entspricht stetiger Verlauf des Gefälles durch eine solche Fläche hindurch jederzeit einer ganz bestimmten Elektrisirung der Fläche. Denkt man sich z. B. die Linie, welche den Verlauf der Potentialfunction darstellt, als die ungebrochen verlängerte Linie $BT_2$, so würde $T_1'$ nach $T^*$ fallen und $T_2' T^*$ die effective (in diesem Falle negative) Elektrisirung repräsentiren.

Dies ist nichts anderes als der graphische Ausdruck des Satzes, dass an der Grenzfläche zweier verschiedener Dielektrica eine effective Elektrisirung vorhanden ist, wenn die scheinbare null ist, und dass umgekehrt eine scheinbare Elektrisirung vorhanden ist, wenn die effective gleich null ist.

Ist die „effektive" Elektrisirung der Trennungsfläche gleich null, d. h. $\varrho = 0$, so gilt die Gleichung

$$K_1 \operatorname{tg}\alpha_1 - K_2 \operatorname{tg}\alpha_2 = 0$$

oder

$$K_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = K_2 \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Die Brechung der Curven, deren Ordinaten den Verlauf der Potentialfunction darstellen, erfolgt demnach an der Trennungsfläche zweier Dielektrica nach einem Gesetze, das jenem ganz ähnlich ist, welches die Brechung der Kraftlinien an dieser Fläche ausdrückt, mit dem einzigen Unterschiede, dass im letzteren Falle die reciproken Werthe der Constanten zu benützen sind.

Das Gesetz für die Brechung der Kraftlinien lautet nämlich

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{K_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{K_2}.$$ [1])

Ich habe mich bei diesen Entwickelungen stets des Wortes „scheinbare" Elektrisirung bedient und zwar in dem von Sir William Thomson und Maxwell definirten Sinne. Ich kann mich jedoch der Anschauung nicht er-

1) Vgl. Stzb. 1883. S. 456.

wehren, dass der Ausdruck „scheinbare" Elektrisirung nicht sehr glücklich gewählt sei. Er leitet sich offenbar von dem Umstande her, dass verschiedene Versuche auf einer Oberfläche scheinbar das Vorhandensein von Elektricität andeuten können, ohne dass sich daselbst thatsächlich welche befindet, sondern nur in Folge von Fernwirkung (Influenzwirkung). Solche Versuche lassen sich mit Hilfe einer Flamme, mit der abgeleiteten Probescheibe oder auch mit dem Gemische aus Schwefel und Mennige mit zahlreichen Abänderungen ausführen.

Die durch diese Versuche zu Tage tretende scheinbare Elektrisirung deckt sich jedoch nicht ganz mit der oben gegebenen Definition.

Gesetzt z. B. es sei

$$\frac{dV_2}{d\nu} - \frac{dV_1}{d\nu} = 0,$$

ohne dass deshalb die Differentialquotienten selbst $= 0$ sind, so wäre nach dieser Definition die scheinbare Elektrisirung $= 0$, und doch würde sich die Fläche für den Fall, dass

$$\frac{dV_1}{d\nu} = \frac{dV_2}{d\nu} > 0,$$

bei Bestreuen mit dem Pulvergemische mit Schwefel bedecken, oder beim Ueberfahren mit der Flamme negative Elektricität aufnehmen.

Nun könnte man freilich einwenden, in einem solchen Falle muss aber dann eine effective Elektrisirung vorhanden sein, und eben diese verräth sich hiedurch. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn das Dielektricum auf beiden Seiten der Fläche eine verschiedene Constante besitzt. Gäbe es ein starres Dielektricum mit der Dielektricitätsconstante 1 und befände sich dieses in einem elektrischen Felde, so könnte sehr wohl „scheinbare" und „effective" Elektrisirung $= 0$ sein und seine Oberflächen würden sich trotz dem Bestäuben mit Schwefel oder Mennige bedecken, beim Ueberfahren mit einer Flamme sich elektrisiren und bei Untersuchung mit der abgeleiteten Probescheibe eine elektroscopische Anzeige liefern.

Hat man dagegen einen zur Erde abgeleiteten Conductor im elektrischen Felde, so ist er sowohl effectiv, als auch nach der obengegebenen Definition „scheinbar" elektrisirt und doch wird durch Bestreichen mit einer Flamme in diesem Falle an seiner Elektrisirung gar nichts geändert und nicht, wie Maxwell sagt[1]), die scheinbare Elektrisirung nun in effective mit entgegengesetztem Vorzeichen verwandelt.

Die obenerwähnten Versuche, welche zur Benützung des Wortes „scheinbare" Elektrisirung führten, geben eben sämmtlich nur über Richtung und Grösse der auf der einen Seite der Fläche wirkenden Kraft Aufschluss und über nichts weiter.

Ich möchte deshalb vorschlagen, analog den Worten physisches und ideales Pendel die Bezeichnung „scheinbare" Elektrisirung durch „ideale" Elektrisirung zu ersetzen und dieselbe, abgesehen von ihrer Definition durch die Formel, folgendermassen zu charakterisiren: „In einem Systeme von Leitern und Nichtleitern kann man in einem gegebenen Augenblicke[2]) die letzteren immer durch Dielektrica von der Dielektricitätsconstante 1 ersetzt denken, wenn man dafür an die Stelle der effectiv vorhandenen Elektrisirung eine andere gesetzt denkt, welche man die „ideale" nennt.

Dies vorausgeschickt, soll nun die Theorie des Elektrophors selbst entwickelt werden, und dabei immer wieder auf die Versuche zurückgegriffen werden, welche ich in den oben angezogenen Abhandlungen beschrieben habe.

---

1) Treatise I, S. 87.

2) d. h. also unter Ausschluss jener Vorgänge, welche Functionen der Zeit sind.

Ich nehme zu diesem Zwecke an, es seien eine Anzahl parallele auf der X Axe senkrechte Ebenen gegeben, deren Ausdehnung im Verhältnisse zu ihren Entfernungen so gross sei, dass die Dichtigkeit auf jeder derselben als constant, d. h. dass die Ebenen selbst als unendlich gross betrachtet werden können.

Diese Ebenen sollen der Reihe nach durch $S_1$, $S_2$, $S_3$ u. s. w. bezeichnet werden, die Werthe der Potentialfunction auf denselben durch $V_1$, $V_2$, $V_3$ u. s. w. die entsprechenden Dichtigkeiten durch $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ . . . . . Dagegen sollen die Entfernungen $S_1 S_2$ durch $\delta'$, $S_2 S_3$ durch $\delta''$ . . ., die den Schichten mit den Dicken $\delta'$, $\delta''$ . . . . entsprechenden Werthe der Dielektricitätsconstanten durch $K'$, $K''$ . . . ., jene der Potentialfunction durch $V'$, $V''$ . . ., jene der Differentialquotienten $\frac{dV}{dx}$ aber durch $-X$, beziehungsweise durch $-X'$, $-X''$ u. s. w. dargestellt werden. Der Ursprung der Coordinaten liege in $S_1$.

Bei dieser Bezeichnungsweise gelten nun die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} V' &= V_1 - xX' \\ V'' &= V_2 - (x - \delta')X'' \\ V''' &= V_3 - (x - \delta' - \delta'')X''' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Unter der Annahme, dass $V_1 = 0$ und links von $S_1$ keinerlei Elektricitätsmengen mehr vorhanden seien, ist X für $x < 0$ allenthalben $= 0$ und man hat

$$\begin{aligned} 4\pi\varrho_1 &= K'X' \\ 4\pi\varrho_2 &= K''X'' - K'X' \\ 4\pi\varrho_3 &= K'''X''' - K''X'' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

oder

$$\begin{aligned} K'X' &= 4\pi\varrho_1 \\ K''X'' &= 4\pi(\varrho_1 + \varrho_2) \\ K'''X''' &= 4\pi(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 0 \\
V_2 &= -\frac{4\pi\varrho_1}{K'}\delta' \\
V_3 &= -\frac{4\pi\varrho_1}{K'}\delta' - \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2)}{K''}\delta'' \\
V_4 &= -\frac{4\pi\varrho_1}{K'}\delta' - \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2)}{K''}\delta'' - \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)}{K'''}\delta'''
\end{aligned}
\tag{4}
$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Nimmt man nun an, $S_1$ sei die Bodenplatte eines Elektrophors, $S_2$ die auf ihr aufliegende oder kurzweg die nicht geriebene Seite des Kuchens, $S_3$ die geriebene Seite desselben, $S_4$ der Schild, dann treten in den Formeln die folgenden Vereinfachungen ein:

$K'$ und $K'''$ werden beide $= 1$, da sich zwischen Bodenplatte und Kuchen, sowie zwischen Kuchen und Schild im Allgemeinen nur Luft als Isolator befindet. Ferner wird $X'''' = 0$, da das Medium rechts von $S_4$ alsdann Leiter ist.[1])

Die Formeln nehmen demnach die folgenden Gestalten an:

$$
\begin{aligned}
X' &= 4\pi\varrho_1 \\
X'' &= \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2)}{K''} \\
X''' &= 4\pi(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3) \\
0 &= 4\pi(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\varrho_4)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

1) Freilich hätte man eigentlich noch eine fünfte Fläche, nämlich die obere Seite des Schildes, in Betracht zu ziehen, doch ist die Dichtigkeit unter der Annahme der Kreisform auf dieser Platte nur von der Ordnung $\frac{\delta}{R}$, wenn $\delta$ die Entfernung von Bodenplatte und Schild und R der Radius des letzteren ist. Sie verschwindet demnach unter der hier gemachten Annahme einer unendlichen Ausdehnung der Flächen.

Der Werth von $V_4$ aber wird nun:

$$V_4 = -4\pi\varrho_1\delta' - \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2)}{K''}\delta'' - 4\pi(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\delta'''$$

$$= -4\pi\varrho_1\delta' - \frac{4\pi(\varrho_1+\varrho_2)}{K''}\delta'' + 4\pi\varrho_4\delta'''.$$

Leitet man $S_4$ ebenfalls ab, so wird $V_4 = 0$ und man erhält demnach

$$\varrho_1\delta' + \frac{\varrho_1+\varrho_2}{K''}\delta'' - \varrho_4\delta''' = 0 \qquad (6)$$

Nun ist es nothwendig, sich davon Rechenschaft zu geben, wie diese Elektricitätsmengen eigentlich entstanden sind.

$\varrho_3$ ist die durch Reiben primär erregte.

Hat man nur sehr schwach gerieben, so ist $\varrho_2 = 0$.

Das Gleiche ist der Fall, wenn man reibt, ohne den Kuchen auf die Bodenplatte aufzulegen und wenn Zuströmen von Elektricität aus Spitzen u. s. w. vermieden wird.

Sowie jedoch $\varrho_3$ eine gewisse Grenze übersteigt, findet man auf der der Bodenplatte zugewendeten Seite Elektricität, deren Vorzeichen jenem der primär erregten entgegengesetzt, und deren Dichtigkeit absolut betrachtet, geringer ist, als jene der primär erregten.

Man hat demnach allgemein

$$\varrho_2 = -\varepsilon\varrho_3$$

wobei

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

ist, d. h. wobei $\varepsilon$ ein ächter Bruch ist, der jedoch der Null sehr nahe stehen kann und allenfalls auch genau $= 0$ werden kann.

Dass sich dies thatsächlich so verhält, geht einerseits aus den Versuchen mit dem Pulvergemische hervor, welche ich a. a. O. auf S. 70 ff. als die Versuche 2 und 3 beschrieben habe, ganz schlagend aber auch aus dem Versuche 5, wonach das Vorzeichen der im Schilde aufgesammelten Elektricität umspringt, wenn man den Kuchen nach dem Reiben umkehrt und dann die Entfernung zwischen Bodenplatte und der geriebenen Seite des Kuchens allmälig vergrössert.

Ich werde auf diesen Punkt noch einmal zurückkommen.

Setzt man nun diesen Werth ein, so geht Gleichung (6) über in

$$\varrho_1 \delta' + \frac{\varrho_1 - \varepsilon \varrho_3}{K''} \delta'' + (\varrho_1 - \varepsilon \varrho_3 + \varrho_3) \delta''' = 0.$$

Und hieraus ergeben sich alsdann die weiteren

$$\varrho_1 = \varrho_3 \frac{\varepsilon \frac{\delta''}{K''} - (1 - \varepsilon) \delta'''}{\delta' + \delta''' + \frac{\delta''}{K''}} \tag{7}$$

$$\varrho_4 = - \varrho_3 \frac{\frac{\delta''}{K''} + (1 - \varepsilon) \delta'}{\delta' + \delta''' + \frac{\delta''}{K''}} \tag{8}$$

zwei Gleichungen, aus welchen man sofort die in der älteren Abhandlung aufgeführten erhält, sowie man $K'' = 1$ setzt.

Der ganze Unterschied im Endresultate besteht also schliesslich darin, dass die Dicke des Kuchens durch die Dielektricitätsconstante desselben zu dividiren ist.

Hieraus erklärt es sich auch, dass die von mir gegebenen theoretischen Entwickelungen, obwohl auf nicht ganz richtiger Grundlage fussend, in ihren Folgerungen mit den nur qualitativen Versuchen doch in vollkommenem Einklange stunden.

Es scheint nun zweckmässig, die hier entwickelten Formeln noch etwas zu discutiren und auf jene Fälle anzuwenden, welche eine direkte Prüfung durch den Versuch gestatten.

Nehmen wir an, man habe nur die eine Fläche des Elektrophorkuchens gerieben, während man ihn so hielt, dass der andern Seite keine Gegenstände nahe waren, welche ein Ueberströmen von Elektricität ermöglichen konnten.

In diesem Falle hat man nur auf $S_3$ eine bestimmte Dichtigkeit $\varrho_3$, während $\varrho_2 = 0$ ist.

Die Flächen $S_1$ und $S_4$ aber hat man alsdann einfach als nicht existirend zu betrachten.

Dann gehen die 2. und 3. Gleichung der Gruppe (2) in die folgenden über

$$0 = K'' X'' - X'$$
$$4 \pi \varrho_3 = X''' - K'' X''$$

woraus man sofort

$$4 \pi \varrho_3 = X''' - X'$$

erhält.

Ausserdem aber muss $X' = - X'''$ sein, wie sich aus folgender Ueberlegung ergiebt:

Man kann sich das Dielektricum von der Dicke $\delta''$ mit der Dielektricitätskonstante $K''$ stets durch ein solches von der Dielektricitätsconstante 1 ersetzt denken, wenn man sich auf der Fläche $S_2$ eine scheinbare (ideale) Elektrisirung von der Dichtigkeit

$$- \varrho_2{}' = \frac{1}{4\pi} X' \left(1 - \frac{1}{K''}\right)$$

gegeben denkt.

Nehmen wir nun auf beiden Seiten des Dielektricums Punkte, welche beide gleichweit von $S_1$ und $S_2$ abstehen und zwar soweit, dass die Dicke $\delta''$ gegen diese Entfernung verschwindet, dann kann man sich die beiden Schichten mit den Dichtigkeiten $\varrho_3$ und $\varrho_2{}'$ einfach übereinander gelagert denken und man sieht alsdann sofort, dass die in diesen Punkten wirkenden Kräfte $X'$ und $X'''$ gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Da nun X′ und X‴ Konstante sind, wenigstens so lange man innerhalb Entfernungen bleibt, gegen welche die Dimensionen der Flächen als unendlich betrachtet werden können, so ist demnach innerhalb der Grenzen, für welche die Betrachtungen hier überhaupt nur giltig sind, allgemein

$$-X' = X''' = 2\pi\varrho_3 \tag{9}$$

In graphischer Darstellung übersieht man diese Entwickelung mit einem Blicke auf Fig. (3); man sieht, dass die Kraft auf beiden Seiten des Dielektricums die gleiche ist und dass demnach, wenn $\varrho_3$ negativ ist, wie bei einer geriebenen Ebonitplatte ein positiv elektrisches Theilchen auf beiden Seiten mit gleicher Kraft nach der Platte hingezogen wird, wie hier durch die Richtung der Pfeile angedeutet ist. Es müssen sich mithin bei Anwendung des Gemisches aus Schwefel und Mennige unter den hier vorausgesetzten Bedingungen beide Flächen der Platte mit Mennige bedecken, gerade so wie es der Versuch thatsächlich lehrt (a. a. O. S. 70.)

Fig. 3

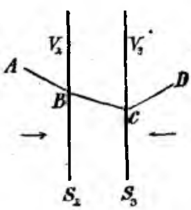



Fig. 4

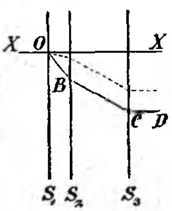
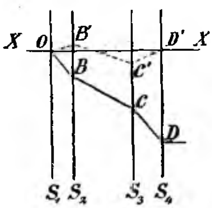



Fig. 5




Nimmt man nun an, man habe den schwach elektrisirten Kuchen auf die Bodenplatte aufgelegt und zwar bei so schwacher Elektrisirung, dass kein Uebergang von Elektricität zwischen Bodenplatte und Kuchen stattfindet, dann hat man die folgenden Gleichungen:

Zunächst einmal $X''' = 0$, wie man sofort aus einer Betrachtung ersieht, welche der im vorigen Abschnitte durchgeführten vollkommen analog ist, und wonach $X^{(0)} = -X'''$

sein muss, wenn man unter $X^{(0)}$ die Werthe von X für $x < 0$ versteht.

Da nun $X^{(0)} = 0$, so ist auch $X''' = 0$.

Daraus ergiebt sich dann ferner

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0$$

und mithin für

$$\varrho_2 = 0, \quad \varrho_1 = - \varrho_3,$$

die Werthe von V aber werden

$$V_2 = 4\pi \varrho_3 \delta'$$

$$V_3 = 4\pi \varrho_3 \left(\delta' + \frac{\delta''}{K''}\right).$$

Der Verlauf von V aber wird in dem Diagramm Fig. (4) durch die gebrochene Linie OBCD dargestellt.

Ist die Kraft zwischen $S_1$ und $S_2$ gross genug, um einen Uebergang von Elektricität zwischen Bodenplatte und Kuchen zu bewirken, so wird $\varrho_2 = - \varepsilon \varrho_3$. Die gebrochene Linie, deren Ordinaten die Werthe von V geben, geht alsdann in jene über, welche in Fig. 4 punktirt gezeichnet ist, nach Auflegen des Schildes aber in die in Fig. 5 ebenso angedeutete.

Denkt man sich nun den Kuchen abgehoben, so verhält es sich gerade, als sei die Bodenplatte mit der Dichtigkeit $\varrho_1$ gar nicht mehr vorhanden und die Gleichungen (2) gehen in die folgenden über:

$$4\pi\varrho_2 = K'' X'' - X'$$

$$4\pi\varrho_3 = X''' - K'' X''$$

woraus sich unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\varrho_2 = - \varepsilon \varrho_3$ ist, sofort ergibt

$$4\pi (1 - \varepsilon) \varrho_3 = X''' - X'$$

oder da nach ganz ähnlicher Betrachtung, wie sie oben angestellt wurde, wiederum

$$X' = - X''' \quad \text{ist,}$$

$$X''' = 2\pi\,(1-\varepsilon)\,\varrho_3$$

und
$$X' = -\,2\pi\,(1-\varepsilon)\,\varrho_3\,,$$

eine Formel, die sich von der obengegebenen (9) nur durch den Factor $1 - \varepsilon$ unterscheidet.

Die Potentialfunction verläuft demnach auf beiden Seiten des von der Bodenplatte abgehobenen Kuchens gerade so, als ob derselbe nur auf der einen Fläche $S_3$ elektrisirt sei und zwar schwächer als in dem oben gegebenen Falle.

Es wird demnach bei Anwendung eines Harzkuchens ein positiv elektrisirter Körper von beiden Seiten her angezogen werden, obwohl sich auf Fläche $S_2$ positive Elektricität befindet, und würde auch diese selbst mit dem Pulvergemische nicht nachweisbar sein, wenn sie ganz gleichförmig auf der Fläche vertheilt wäre und nicht nur an einzelnen Stellen, wie sie durch das Ueberspringen schwacher Funken bedingt und als kleine Lichtenberg'sche Figuren kenntlich sind.

Dies ist eben einer der Fälle, wo die Untersuchung mit dem Pulvergemische allen anderen gegenüber einen gewaltigen Vorzug besitzt.

Zum Schlusse mag nun auch noch die Formel (7), welche die Dichtigkeit auf der Bodenplatte bei der gewöhnlichen Gebrauchsweise des Elektrophors darstellt, einer Discussion unterworfen werden.

Diese Formel lautet:

$$\varrho_1 = \varrho_3\,\frac{\varepsilon\,\dfrac{\delta''}{K''} - (1-\varepsilon)\,\delta'}{\delta' + \delta''' + \dfrac{\delta''}{K''}}$$

Sie führt zu der merkwürdigen Folgerung, dass bei stetigem Wachsen der Entfernung zwischen Schild und Bodenplatte im Vorzeichen der auf letzterer vorhandenen Elektricität bei einem bestimmten Werthe dieser Entfernung ein Umspringen eintritt. Der experimentelle Nachweis dieses Satzes, auf den ich meines Wissens zuerst aufmerksam gemacht habe, wurde bereits a. a. O. geliefert.

Dagegen gewinnt er unter Berücksichtigung des dielektrischen Verhaltens des Kuchens noch an besonderem Interesse, indem man dadurch in den Stand gesetzt ist, den Werth von $\varepsilon$ thatsächlich zu ermitteln.

Das Umspringen des Vorzeichens tritt nämlich ein, wenn

$$\varepsilon \frac{\delta''}{K''} - (1 - \varepsilon)\,\delta' = 0$$

oder

$$\delta' = \frac{\varepsilon \delta''}{(1 - \varepsilon)\,K''} \quad \text{ist.}$$

Daraus folgt aber auch

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{1}{K''}\frac{\delta''}{\delta'}}.$$

Ermittelt man demnach jene Entfernung zwischen Bodenplatte und Kuchen, welche erforderlich ist, um bei Aenderungen in dem einen oder in dem anderen Sinne ein Umspringen des Zeichens zu verursachen, so kann man unter Benützung der Dielektricitätskonstante des Kuchens und der Dicke des letzteren berechnen, welchen Bruchtheil der primär erregten Elektricität jene bildet, welche während des Reibens von der Bodenplatte auf die Unterfläche des Kuchens überging.

Die bis jetzt gezogenen Folgerungen finden sich mit Ausnahme der allerletzten der Hauptsache nach bereits in der älteren Arbeit, natürlich ohne jene Modificationen, in denen eben das Wesen dieser Untersuchung besteht.

Dagegen lassen sich noch einige andere ziehen, auf welche ich erst jetzt aufmerksam geworden bin, und die mir besonderes Interesse zu verdienen scheinen.

Ich knüpfe hiebei zunächst an die letzte Formel der Gruppe (4) für $V_4$ an. Setzt man in dieser Formel $K' = K''' = 1$ und $\varrho_2 = \varrho_3 = 0$, d. h. nimmt man an, man habe ein Dielektricum von bestimmter Dicke zwischen zwei leitenden Platten von festem Abstande, deren eine abgeleitet ist, also etwa zwischen jenen eines Luftcondensators, so erhält man

$$V_4 = -4\pi\varrho_1\left[\delta' + \delta''' + \frac{\delta''}{K''}\right] = -4\pi\varrho_1\left[\delta - \delta''\left(1 - \frac{1}{K''}\right)\right]$$

Es ist demnach ganz gleichgiltig, an welchen Stellen zwischen den leitenden Platten sich die ihnen parallele dielektrische befindet, man kann eine Parallelverschiebung vornehmen, ohne dass dadurch der Potentialwerth $V_4$ irgendwie verändert wird, ein Umstand, auf den schon Boltzmann hingewiesen hat.[1])

Dies gilt jedoch nicht nur so lange als sich auf den Oberflächen des Dielektricums keine Elektricität befindet, sondern sowie auf beiden Flächen gleich grosse aber entgegengesetzte Elektricitätsmengen vorhanden sind, d. h. so oft $\varrho_2 + \varrho_3 = 0$ ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man nämlich

$$V_4 = -4\pi\left[\varrho_1(\delta' + \delta''') + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{K''}\delta''\right]$$
$$= -4\pi\left[\varrho_1(\delta - \delta'') + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{K''}\delta''\right]$$

In dieser Formel kommen die Werthe $\delta'$ und $\delta'''$, d. h. die Entfernungen der Oberflächen des Dielektricums von den leitenden Platten gar nicht mehr vor und ist mithin der Satz bewiesen.

Ist jedoch $\varrho_2 + \varrho_3 \gtrless 0$, dann wird

$$V_4 = -4\pi\left[\varrho_1\delta' + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\delta''' + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{K''}\delta''\right]$$

1) Wien. Ber. f. 1873 Bd. LXVII. 2. S. 17 ff.

und nun lassen sich $\delta'$ und $\delta'''$ nicht mehr aus der Formel entfernen oder wenigstens nur eine derselben, z. B.

$$\delta' = \delta - \delta'' - \delta'''$$

und mithin ist jetzt eine Verschiebung der dielektrischen Platte zwischen den leitenden nicht mehr ohne Einfluss auf den Werth von $V_4$.

Dies übersieht man mit einem Blicke auf Fig. 5 und zwar auf die gebrochene Linie OBCD. So oft $\varrho_2 + \varrho_3 = 0$ ist, sind nämlich die Linien OB und CD parallel, alsdann kann man aber die beiden Flächen $S_2$ $S_3$ mit dem constanten Abstande $\delta''$ bei unveränderten Winkeln in O, B, C und D beliebig zwischen $S_2$ und $S_3$ verschieben, ohne dass dadurch der Punkt D eine Verrückung erfährt.

Sowie jedoch OB nicht parallel CD, is dies nicht mehr statthaft. Fällt z. B. CD steiler als OB, so bedingt eine Verschiebung der beiden Flächen $S_2$ $S_3$, d. h. des Dielektricums, gegen $S_1$ zu ein Herabrücken von D, d. h. eine Vergrösserung von D D', eine Verschiebung gegen $S_4$ ein Aufsteigen von D.

Es ergibt sich demnach als Folgerung:

Stellt man eine planparallele dielektrische Platte zwischen die Platten eines Luftcondensators, dessen eine Platte geladen, die andere mit der Erde in Verbindung steht, so äussert eine Parallelverschiebung der dielektrischen Platte auf das Potential der geladenen Collectorplatte keinen Einfluss, so lange sich auf den Oberflächen des Dielektricums keine oder gleichgrosse aber entgegengesetzte Elektricitätsmengen befinden. Ist dies nicht der Fall, so muss es sich durch eine solche Verschiebung sofort verrathen.

Endlich lassen sich aus den Formeln über die Grösse der auf die leitenden Platten ausgeübten Kräfte noch Folgerungen ziehen, die zu neuen Versuchen Veranlassung geben.

Setzt man nämlich wiederum in den Formeln (5) $\varrho_2 =$

$\varrho_3 = 0$, d. h. nimmt man an, dass die Oberflächen des Dielektricums nicht elektrisirt seien, so wird wie oben

$$V_4 = 4\pi\varrho_4\left[\delta - \delta''\left(1 - \frac{1}{K''}\right)\right]$$

d. h. wenn die eine Platte zur Erde abgeleitet, die andere mit Elektricität von bestimmter Dichtigkeit geladen ist, so wird durch Einschieben einer dielektrischen Platte der Potentialwerth auf der geladenen Platte herabgedrückt.

Die Werthe von $X'$ und $X'''$ aber bleiben nach wie vor die gleichen, nämlich

$$X' = X''' = 4\pi\varrho_1 = -4\pi\varrho_4.$$

Die Kraft, welche auf die Oberflächeneinheit von $S_1$ ausgeübt wird, ist demnach

$$P_1 = X'\varrho_1 = -4\pi\varrho_1{}^2 = 4\pi\varrho_4{}^2.$$

Die Kraft aber, mit welcher die Oberflächeneinheit von $S_4$ gegen $S_1$ hin gezogen wird, ist

$$P_4 = -X'''\varrho_4 = 4\pi\varrho_1{}^2 = -4\pi\varrho_4{}^2,$$

oder wenn man $V_4$ als gegeben ansieht

$$P_1 = -P_4 = \frac{V_4{}^2}{4\pi\left[\delta - \delta''\left(1 - \frac{1}{K''}\right)\right]^2}$$

Hat man demnach zwei unendlich grosse parallele leitende Platten in endlichem Abstande mit gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladen, so wird die Wechselwirkung zwischen diesen Platten durch Einschieben einer dielektrischen Platten vergrössert, wenn die Potentialdifferenz zwischen beiden (durch Zufuhr von Elektricität) constant erhalten wird, sie bleibt unverändert, wenn die Elektricitätsmengen constant bleiben.

Das letztere gilt jedoch nur, so lange die Voraussetzung zulässig ist, dass die Dimensionen der Platten im Vergleiche zu ihrer Entfernung unendlich grosse seien.

Sind sie endlich, so wird bei konstanten Elektricitätsmengen die Wechselwirkung durch Einschieben eines Dielektricum's von grösserer Ausdehnung vermindert.

## II.

## Ueber den Einfluss eingeschobener dielektrischer Platten auf die Wechselwirkung elektrisirter Körper.

Die am Schlusse des vorigen Abschnittes mitgetheilten Untersuchungen über die Wechselwirkung elektrisirter Körper unter dem Einflusse zwischengeschobener Dielektrica haben zu Sätzen geführt, die einer experimentellen Prüfung zugänglich sind, und zwar einer Prüfung so einfacher Natur, dass sie sogar zum Verlesungsversuch benutzt werden kann.

Der erste dieser Sätze lautete:

„Die Wechselwirkung zwischen zwei mit entgegengesetzter Elektricität geladenen parallelen Platten wird durch eine eingeschobene parallele Platte eines Dielektricums vergrössert, wenn die Potentialdifferenz constant erhalten wird.“

Hat man zwei Luftcondensatoren von gleichen Dimensionen und gleichem Plattenabstande, deren Collectorplatten und deren Condensatorplatten unter sich leitend verbunden sind, so hat man auf beiden die gleichen Potentialdifferenzen.

Schiebt man nun bei einem dieser Condensatoren zwischen die beiden Platten eine dielektrische ein, so muss die Wechselwirkung zwischen diesem Plattenpaare eine grössere werden, als zwischen dem anderen.

Dies kann man folgendermassen darthun:

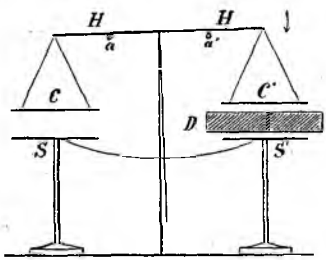
Zwei gleichgrosse und gleichschwere Metallscheiben CC' (Fig. 6) mit abgerundeten Kanten werden mit Drähten an den beiden Enden eines Wagebalkens HH aufgehangen. Der letztere steht durch die mit der Erde leitend verbundene Tragsäule ebenfalls mit der Erde in Verbindung.

Die beiden Scheiben dienen als Condensatorplatten. Ihnen gegenüber d. h. unter ihnen befinden sich in einiger Entfernung zwei ähnliche Platten S und S′ auf gleichhohen isolirenden Stützen. Sie können unter einander leitend verbunden werden und dienen als Collectorplatten.

Sowie nun diese Verbindung hergestellt und die Collectorplatten geladen sind, steht das System in labilem Gleichgewichte, und würde jene Condensatorplatte, welche der Collectorplatte nur um eine Spur näher steht, mehr und mehr nach abwärts gezogen und dadurch das Gleichgewicht immer erheblicher gestört werden.

Dies lässt sich jedoch vermeiden durch passende Arretirungsvorrichtungen a und a′, welche die Bewegungen des Wagebalkens in enge Grenzen einschliessen.

Fig. 6.




Gesetzt nun, es sei im Momente der Ladung die Entfernung CS um eine Spur kleiner gewesen als C′S′ und habe sich in Folge dessen der Wagebalken gegen den Arretirungsstift a gelegt, so genügt es, zwischen C′ und S′ eine dielektrische Platte D einzuschieben, um sofort einen Ausschlag im entgegengesetzten Sinne einzuleiten, bis der Stift a′ der Bewegung ein Ziel setzt.

Vielleicht wird mancher in diesem Versuche nur einen Beweis dafür erblicken, dass der Condensator mit zwischengeschobenem Dielektricum eine grössere Capacität besitzt als der andere, immerhin ist er alsdann sehr geeignet, diese Thatsache in höchst einfacher Weise anschaulich zu machen.

Er gestattet jedoch noch einige Modificationen.

Ersetzt man die dielektrische Platte durch eine an einer isolirenden Handhabe befindliche Metallplatte, so gelingt der Versuch ebenso wie mit dem Dielektricum, vorausgesetzt, dass die Metallplatte nicht wesentlich grösser ist als die Condensatorplatte.

Ist sie grösser, so wirkt sie als Schirm und alsdann wird die Wirkung von S′ auf C′ durch Einschieben der Platte nicht vergrössert sondern verkleinert, so dass nun ein Ausschlag im entgegengesetzten Sinne eintritt, gerade wie wenn man eine abgeleitete Platte einführt.

Nun lässt sich aber der Versuch mit der dielektrischen Platte so abändern, dass man nicht mit gleicher Potentialdifferenz in den beiden Condensatoren, sondern mit gleichen Elektricitätsmengen arbeitet.

Wie oben gezeigt, lehrt die Theorie, dass in diesem Falle ein Einschieben des Dielektricums gar keinen Einfluss auf die Wechselwirkung ausübt, wenn nur die Platten gegen ihre Entfernung sehr gross sind. Wenn dies nicht der Fall ist, wird sogar die Wechselwirkung vermindert und nähert sich eine dielektrische Platte, deren Ausdehnung jene der Condensatorplatten übertrifft, in ihrem Verhalten dem eines leitenden Schirmes.

Dies lässt sich folgendermassen durch den Versuch darthun:

Die leitende Verbindung zwischen den beiden Collectorplatten S und S′ wird aufgehoben und die ersteren, bevor sie an ihre Stellen unterhalb der Condensatorplatten gebracht werden, während oder nach erfolgter Ladung mit einander in Berührung gebracht.

Alsdann sind sie gleich stark geladen. Stellt man sie nun an ihre im Schema angedeuteten Plätze und nimmt man wieder an, dass die Entfernung CS etwas geringer sei als C′S′, so dass der Wagebalken bei a anliegt, so ist es nicht mehr wie oben möglich durch Einschieben des Dielektricums zwischen C′ und S′ einen Ausschlag nach dieser Seite hin hervorzurufen.

Dagegen genügt die Einführung zwischen C und S, um eine Bewegung im Sinne des Pfeiles und ein Anschlagen bei a′ zu bewirken.

---

Ferner spricht Herr Wilhelm von Bezold:

„Ueber zündende Blitze im Königreich Bayern während des Zeitraumes 1833 bis 1882“.

Die Abhandlung wird in den Denkschriften zur Veröffentlichung gelangen.