Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1887.

1. Herr E. Lommel legt eine von dem correspondirenden Mitgliede Oskar Emil Meyer in Breslau eingesandte Abhandlung: „über die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren" vor.

2. Herr L. Radlkofer macht eine zweite Mittheilung „über einige Capparis-Arten".

3. Herr L. v. Seidel überreicht eine von dem correspondirenden Mitgliede Leo Königsberger in Heidelberg überschickte Abhandlung: „über die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen".

Ueber die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren.

Von Oskar Emil Meyer.

(Eingelaufen 5. November.)

Für den Reibungscoefficienten einer Flüssigkeit oder eines Gases erhält man aus Versuchen, welche in der Weise Coulomb's[1]) mit schwingenden Scheiben ausgeführt sind, bekanntlich etwas zu grosse Werthe,[2]) wenn man sich der

1) Mém. de l'Inst. nat. T. 3, an IX.

2) Poggendorffs Annalen Bd. 113 S. 67, 1861.

von Stokes[1]) und von mir[2]) theoretisch entwickelten Formeln zur Berechnung bedient. Dieser Uebelstand rührt daher, dass es nicht gelungen ist, die mathematische Theorie soweit durchzuführen, dass der Einfluss der inneren Reibung ganz vollständig in Rechnung gezogen wäre. Es ist nur diejenige Reibung berücksichtigt worden, welche zwischen den horizontalen, der schwingenden Scheibe parallelen Schichten der Flüssigkeit ausgeübt wird, nicht aber diejenige, durch welche die Bewegung über den Rand der Scheibe und über die Cylinderfläche, welche die Verlängerung der Randfläche bildet, hinaus an die im äusseren Theile des Behälters befindlichen Flüssigkeitsmassen übertragen wird.

Ein glücklicher Versuch, diesen Mangel auszugleichen, ist kürzlich von Walter König[3]) gemacht worden, indem er zu der auch von mir benutzten Stockes'schen Formel für das logarithmische Decrement der Amplituden ein Correctionsglied hinzufügte. Bei der Berechnung seiner eigenen Beobachtungen bewährte sich diese Verbesserung vortrefflich; ebenso genügt sie, wie ich durch die weiterhin mitgetheilten Zahlen zeigen werde, in sehr befriedigender Weise, um die Abweichung zu beseitigen, welche bisher zwischen meinen Versuchen über die Reibung von Flüssigkeiten und von Luft einerseits und den Beobachtungen über die Strömung in Röhren andrerseits zu bestehen schien.

Das Verfahren, durch welches Herr König zu seiner Verbesserung der älteren Formel gelangt, beruht im wesentlichen auf folgender Betrachtung. Die Reibung des umgebenden Mediums übt auf die Bewegung eines schwingenden Apparats einen doppelten Einfluss aus, indem sie nicht bloss die Schwingungsbögen allmählich verkleinert, sondern auch

---

1) Cambr. phil. Transact. IX, p. II, S. [78]. 1850.

2) Crelle's Journ. f. Math. Bd. 59, S. 274, 1861.

3) W. König, über die Bestimmung von Reibungscoefficienten u. s. w. Habilitationschrift. Leipzig 1887. Wied. Ann. Bd. 32, S. 193.

die Schwingungszeit so vergrössert, als ob das Trägheitsmoment um einen dem logarithmischen Decrement der Amplituden angenähert proportionalen Betrag zugenommen hätte. Diese zunächst einen schwingenden festen Körper betreffende Bemerkung darf auf eine flüssige Masse übertragen werden, und zwar in unserem Falle auf eine über oder unter der Scheibe des Coulomb'schen Apparats befindliche flüssige Scheibe von gleichem Durchmesser, weil nach der angenähert richtigen Voraussetzung der älteren Theorie innerhalb einer solchen, als unendlich dünn gedachten Scheibe keine Verschiebungen der Bestandtheile gegen einander vorkommen. Das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe, welches den Werth $\frac{1}{2}\pi\varrho R^4\delta$ hat, wenn ich, wie in meinen früheren Abhandlungen, durch ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, durch R den Halbmesser der Scheibe und durch δ die Dicke der flüssigen Scheibe bezeichne, wird durch die Reibung an ihrem äusseren Rande scheinbar vermehrt zu dem Betrage

$$\tfrac{1}{2}\pi\varrho R^4\delta(1+2l),$$

worin l nach einer von Klemenčič für das Decrement πl der Schwingungen eines Cylinders in einer Flüssigkeit aufgestellten Formel den Werth

$$l=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\eta}{\pi\varrho}T}$$

zukommt, wenn η der Reibungscoefficient der Flüssigkeit und T die Schwingungszeit bedeutet. Demnach ist nach König an meinen Formeln die Verbesserung anzubringen, dass die Grösse R^4 durch $R^4(1+2l)$ zu ersetzen sei, oder dass die Zahl

$$\varkappa=\frac{\pi\varrho R^4}{4M}\sqrt{\frac{2\eta}{\pi\varrho}T},$$

welche aus dem beobachteten Decrement zunächst berechnet wird, um aus ihr mittelst des bekannten Werthes des Trägheitsmoments M und der übrigen vorkommenden Grössen den Reibungscoefficienten η zu erhalten, noch mit dem Factor $1 + 2l$ versehen werden müsse.

Theorie.

Es wird nicht überflüssig sein, die Richtigkeit dieses Schlusses durch eine mathematische Rechnung, welche sich auf die in meiner theoretischen Abhandlung enthaltenen Differentialgleichungen stützt, strenger zu beweisen.

Die Auflösung, welche ich jetzt gebe, geht in der Annäherung einen Schritt weiter, als die früher gefundene; doch beruht auch sie noch auf Voraussetzungen, welche der Wirklichkeit nicht völlig genau entsprechen. Ich muss auch jetzt noch einen Theil der wirklich stattfindenden Reibung vernachlässigen, so dass auch die nach den neuen Formeln berechneten Werthe des Reibungscoefficienten noch etwas zu gross ausfallen.

Wenn wir Punkte gleicher Winkelgeschwindigkeit in der Flüssigkeit suchen, so werden wir finden, dass sie geschlossene Oberflächen bilden, welche die Scheibe des Apparats umschliessen, und welche, je näher sie der Scheibe liegen, um so mehr der Gestalt der Scheibe selber, also der Form eines flachen Cylinders ähnlich werden. Daraus folgt, dass an Stellen, welche dicht über oder unter der Scheibe und der Drehungsaxe näher, als der Rand der Scheibe, liegen, die Winkelgeschwindigkeit ψ sich nur sehr wenig mit dem Abstande r von der Axe verändert, dagegen weit stärker mit dem senkrechten Abstande x von der wagrecht gelegenen Mittelebene der Scheibe. Dagegen gilt für Stellen, deren Entfernung r von der Drehungsaxe grösser als der Radius R der Scheibe ist, gerade das umgekehrte, insofern als die Winkelgeschwindigkeit ψ sich nur wenig mit der verticalen Höhe x ändert, dagegen desto stärker mit der Entfernung r von der Axe. Hierauf beruhen die Vernachlässigungen, welche ich einführen will.

Um ihren Sinn klarer hervortreten zu lassen, stelle ich mir statt des wirklichen Vorganges einen anderen vor, welcher freilich durch ein Experiment nicht herzustellen, aber doch denkbar ist. Die Flüssigkeit, und zwar sowohl die innerhalb des über und unter der Scheibe stehenden Cylinders vom Radius R, als auch die ausserhalb desselben befindliche, theile ich durch horizontale Ebenen in unendlich dünne Schichten. In irgend einer dieser Schichten soll die Winkelgeschwindigkeit innerhalb des Cylinders, also so lange, als $r < R$ bleibt, nicht variiren, wohl aber ausserhalb, also für $r > R$. Zwei solcher Schichten, welche einander berühren, üben Reibung auf einander aus; aber diese Reibung will ich nur auf dem Theile der Berührungsfläche, welcher in den Cylinder $r = R$ hineinfällt, berücksichtigen; ausserhalb desselben vernachlässige ich sie, denke mir also die ausserhalb befindliche Flüssigkeit in einem solchen Zustande, dass eine Uebertragung von Geschwindigkeit durch Reibung nur in horizontaler, nicht aber in verticaler Richtung geschehen kann.

Demgemäss ersetze ich die früher aufgestellte zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ψ der Flüssigkeit dienende partielle Differentialgleichung[1])

$$\varrho \frac{d\psi}{dt} = \eta \left\{ \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d}{r\,dr} \left(\frac{d \cdot r^2 \psi}{r\,dr} \right) \right\}$$

für $r > R$ durch die einfachere Gleichung

$$\varrho \frac{d\psi}{dt} = \eta \frac{d}{r\,dr} \left(\frac{d \cdot r^2 \psi}{r\,dr} \right) = \eta \left\{ \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\psi}{dr} \right\},$$

welche nur noch die Coordinate r und die Zeit t als unab-

1) Crelle's Journ. f. Math. Bd. 59, S. 244, Formel (6).

hängige Variabeln enthält. Doch bleibt dabei zu bemerken, dass ψ auch von x abhängt.

Für Punkte innerhalb des durch den Scheibenrand gelegten Cylinders, also für $r < R$, ist ein so einfaches Verfahren zur Aufstellung der Differentialgleichung nicht zulässig; denn es ist zu berücksichtigen, dass eine flüssige Scheibe vom Halbmesser R und der Höhe dx ohne innere Verschiebungen, also wie eine feste Scheibe um ihren Schwerpunkt schwingt unter dem Einflusse einer dreifachen Reibung an der unteren und der oberen ebenen Fläche, sowie an dem kreisförmig begrenzenden Rande. Bildet man die Summe der Drehungsmomente dieser Kräfte,[1] so gelangt man zu der für $r < R$ geltenden Differentialgleichung

$$\varrho \frac{d\psi}{dt} = \eta \left\{ \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4}{R} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)_{r=R} \right\},$$

in deren letztem Gliede für die Variabele r der Grenzwerth R einzusetzen ist.

Durch ein ganz gleiches Verfahren erhält man ebenso wie früher die Differentialgleichung[2])

$$M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi + 2\pi\eta \left\{ R^3 \int_{-c_1}^{c_1} dx \left(\frac{d\psi}{dr} \right)_R \right.$$
$$\left. + \int_0^R dr\, r^3 \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{c_1} - \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{-c_1} \right] \right\},$$

welche zusammen mit der Bedingung, dass sowohl für $r = R$ als auch für $x = \pm c_1$

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt}$$

wird, den Winkel φ bestimmt, um welchen die Scheibe zur Zeit t aus ihrer Gleichgewichtslage herausgedreht ist; c_1 ist die halbe Dicke der Scheibe, und die den Differentialquotienten

1) Vergl. L. Grossmann, Inaug.-Diss. Breslau 1880. Wiedemann's Annalen Bd. 16, S. 619, 1882.

2) Crelle's Journ. f. Math. Bd. 59, S. 244, Formel (7.)

angehängten Indices bezeichnen die Werthe, welche den Coordinaten r oder x in diesen Functionen zu geben sind.

Den Differentialgleichungen suche ich zu genügen, indem ich unter Rücksicht auf die Bedingung der Stetigkeit bei $r = R$

$$\text{für } r > R \quad \psi = \Omega(x) P(r) e^{-m^2 t}$$
$$\text{„} \quad r < R \quad \psi = \Omega(x) P(R) e^{-m^2 t}$$

setze, worin Ω und P Functionen bedeuten, welche die Differentialgleichungen

$$0 = \frac{d^2 \Omega(x)}{dx^2} + p^2 \Omega(x)$$
$$0 = \frac{d^2 P(r)}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d P(r)}{dr} + q^2 P(r)$$

erfüllen, während die constanten Parameter m, p, q unter einander durch die Bedingungen

$$\frac{\varrho}{\eta} m^2 = q^2 = p^2 - \frac{4}{R}\left(\frac{1}{P(r)}\frac{d P(r)}{d r}\right)_{r=R}$$

verbunden sind. Durch Integration ergiebt sich zunächst der Ausdruck

$$\Omega(x) = A \cos p x + B \sin p x,$$

in welchem eine der beiden Constanten A und B durch die Bedingung bestimmt werden kann, dass in einem Abstande c_2 von der Mittelebene der Scheibe, wo wir uns einen festen Boden oder Deckel des Gefässes denken, die Bewegung aufhört; so erhalten wir

$$\Omega(x) = C \frac{\sin p (c_2 \mp x)}{\sin p (c_2 - c_1)},$$

wo das obere Vorzeichen für positive, das untere für negative Werthe von x gilt, während C eine neue Constante ist, durch welche die Ablenkung der Scheibe nach der Formel

$$\psi = -\frac{C}{m^2} e^{-m^2 t}$$

bestimmt wird. Der zweiten Differentialgleichung genügen zwei Functionen von r, von welchen die eine

$$P(qr) = \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1 - z^2}\, e^{qirz} \qquad i = \sqrt{-1}$$

ist, während die andere mit Hülfe dieser ersten durch die Gleichung

$$Q(qr) = P(qr) \int \frac{dr}{r^3 (P(qr))^2}$$

gefunden wird; dieselbe kann aber in dem Falle, dass die Constante qi einen reellen Theil von negativem Werthe besitzt, auch in der Form

$$Q(qr) = \int_1^\infty dz \sqrt{z^2 - 1}\, e^{qirz}$$

dargestellt werden. Von diesen beiden Functionen P und Q behalte ich nur die letztere bei, weil ich voraussetzen will, dass die Flüssigkeit in horizontaler Richtung unbegrenzt sei, wodurch die Bedingung, dass ψ für $r = \infty$ verschwindet, nothwendig wird. Somit setze ich schliesslich als Werthe der Winkelgeschwindigkeit ψ und des Ablenkungswinkels φ die Summe folgender particularen Lösungen an:

$$\text{für } r < R \qquad \psi = \Sigma C \frac{\sin p(c_2 \mp x)}{\sin p(c_2 - c_1)} e^{-m^2 t}$$

$$\text{„} \quad r > R \qquad \psi = \Sigma C \frac{\sin p(c_2 \mp x)}{\sin p(c_2 - c_1)} \frac{Q(qr)}{Q(qR)} e^{-m^2 t}$$

$$\varphi = -\Sigma \frac{C}{m_2} e^{-m^2 t}.$$

Von der Bestimmung der Constanten C aus dem Anfangszustande zur Zeit $t = 0$ können wir hier absehen, müssen aber den Parameter m näher untersuchen, von welchem p und q nach der Doppelgleichung

$$\frac{\varrho}{\eta} m^2 = q^2 = p^2 - \frac{4}{R} Q'(qR)$$

abhangen, wenn

$$Q'(qr) = \frac{1}{Q(qr)} = \frac{d\,Q(qr)}{dr}$$

die logarithmische Derivirte von Q bedeutet. Wir erhalten m aus der Differentialgleichung für die Bewegung der Scheibe, welche durch Einsetzen der Functionen die Form

$$0 = M m^4 + \tau - \pi \eta m^2 \{p R^4 \operatorname{cotg} p (c_2 - c_1) - 4 c_1 R^3 Q'(qR)\}$$

annimmt. Diese Gleichung besitzt, wie die früher untersuchte einfachere, unendlich viele Wurzeln m; doch kommen von diesen aus den früher erörterten Gründen für das Experiment nur die complex-imaginären in Betracht, und von diesen brauchen nur die eine Wurzel

$$m = a + bi,$$

in der beide Grössen a und b reell und positiv sind, zu berechnen, um durch Vertauschung der Vorzeichen die übrigen zu erhalten. Dasselbe gilt nach der obigen Doppelgleichung von q und, wie wir gleich einsehen werden, auch von p. Aus dem Quadrate

$$m^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

erhält man dann die Schwingungsdauer T und das logarithmische Decrement ε nach den Formeln

$$T = \frac{\pi}{2ab} \qquad \varepsilon = (a^2 - b^2) T.$$

Bei der Berechnung beschränke ich mich auf den Fall, dass der Abstand der Scheibe von der ruhenden Grenze $c_2 - c_1 = \infty$ gesetzt, und dass zugleich der Radius R der Scheibe im Verhältniss zu der Grösse $\sqrt{\frac{\eta}{\varrho} T}$ als sehr gross angesehen werden darf. Dann ist die in der hier zulässigen Form von

$$Q(qr) = \int_1^\infty dz \sqrt{z^2 - 1}\, e^{iqrz}$$

vorkommende Exponentialfunction, in deren Exponent

$$i r q z = (a i - b) r z \sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}$$

die Variabele r nie kleiner als R ist, eine mit wachsendem z sehr rasch abnehmende Function; denn nach früheren Rechnungen ist annäherungsweise

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{2T}},$$

also

$$b r \sqrt{\frac{\varrho}{\eta}} = r \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2 \eta T}}$$

eine Grösse von beträchtlichem Werthe. Daraus folgt, dass der Werth der als bestimmtes Integral Q dargestellten Summe hauptsächlich durch denjenigen Werth bestimmt wird, welchen die zu integrirende Function in der Nähe ihres kleinsten Argumentes $z = 1$ annimmt. Dieselbe Eigenschaft besitzt die derivirte Function

$$\frac{d Q(qr)}{dr} = i q \int_1^\infty dz\, z \sqrt{z^2 - 1}\, e^{iqrz}.$$

Also ist angenähert der Werth des Verhältnisses

$$\frac{1}{Q(r)} \frac{d Q(r)}{dr} = Q'(qr) = iq.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst für p^2 der angenäherte Werth

$$p^2 = q^2 + 4 i \frac{q}{R}$$

und weiter, da q und R bei den Experimenten grosse Werthe haben, für p angenähert

$$p = q + 2\frac{i}{R} = a\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}} + \left(b\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}} + \frac{2}{R}\right)i \ .$$

Da der imaginäre Theil dieser Grösse mit einem positiven Factor behaftet ist, so ist für $c_2 - c_1 = \infty$

$$\cotg p(c_2 - c_1) = -i \ .$$

Nach diesen Erörterungen wird die zur Bestimmung von m dienende Formel angenähert

$$0 = M m^4 + \tau - \pi\eta m^2 \left\{\left(\frac{2}{R} - q i\right) R^4 - 4 c_1 R^3 q i\right\}$$

oder nach einer kleinen Umgestaltung

$$0 = \left(m^2 - \pi\eta\frac{R^3}{M}\right)^2 + \frac{\tau}{M} - \left(\pi\eta\frac{R^3}{M}\right)^2 + \pi\frac{R^4 + 4c_1 R^4}{M}\sqrt{\eta\varrho}\, m^3 i \, .$$

Diese Gleichung 4. Grades unterscheidet sich von der in meiner früheren Arbeit aufgestellten[1]) durch zwei hinzugetretene Glieder. Das eine derselben besteht in der bereits früher angebrachten Correction der Grösse R^4, welche in

$$R^4 + 4c_1 R^3 = (R + c_1)^4$$

verwandelt ist, so dass der Radius R annäherungsweise um die halbe Dicke c_1 der Scheibe zu vermehren ist.

Das andere, neu hinzugekommene Glied enthält die König'sche Correction. Vernachlässigen wir in der Gleichung alle Potenzen von η, welche höher als die erste sind, so erkennt man, ohne die Gleichung aufzulösen, dass der früher berechnete Werth von

$$m^2 = a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}$$

1) Crelle's Journ. f. Math. Bd. 59, S. 256 Formel (6.); S. 248 Gleichungen (3.).

um die Grösse

$$\pi\eta\frac{R^3}{M}$$

vermehrt werden muss. Dieser Zuwachs ist reell, betrifft also nur den reellen Theil $a^2 - b^2$ und somit das logarithmische Decrement der Schwingungen

$$\varepsilon = (a^2 - b^2)\,T\,,$$

welches um

$$\pi\eta\frac{R^3}{M}T$$

zu vergrössern ist. Das aber ist die König'sche Correction; denn es wird angenähert

$$\varepsilon = \pi\frac{\pi\varrho R^4}{4M}\sqrt{\frac{2\eta}{\pi\varrho}T} + \pi\eta\frac{R^3}{M}T = \pi x(1 + 2l)\,.$$

Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

Nach den so verbesserten Formeln habe ich meine mit dem Coulomb'schen Apparat ausgeführten Beobachtungen neu berechnet. Früher hatte ich die Reihenentwicklung[1])

$$\varepsilon = \pi x\left(1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \cdots\right)$$

benutzt, um aus dem beobachteten Decrement ε zunächst x und aus dieser Grösse die Reibungsconstante η herzuleiten. Statt dieser Formel ist jetzt

$$\varepsilon = \pi x\left\{1 - \left(1 - \frac{8M}{\pi\varrho R^5}\right)x + \cdots\right\}$$

zu schreiben, da unter Vernachlässigung des unerheblichen Unterschiedes zwischen der Schwingungszeit des Apparats im

---

1) Poggendorff's Ann. Bd. 113, S. 74, 1861.

leeren Raume und in der Flüssigkeit das hinzutretende Correctionsglied

$$\pi\,\eta\,\frac{R^3}{M}\,T = \frac{8\,M}{\varrho\,R^5}\,\varkappa^2$$

zu setzen ist. Durch Umkehrung der Reihe erhalte ich

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{\pi} + \left(1 - \frac{8\,M}{\pi\,\varrho\,R^5}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2 + \cdots$$

Also ist an den früher berechneten Werthen von $\varkappa$ eine Verbesserung von der Ordnung des Quadrats des logarithmischen Decrements anzubringen, und in Folge dessen ist die aus $\varkappa$ berechnete Constante

$$\sqrt{\frac{\pi\,\varrho\,\eta}{8}}\ \text{um}\ \frac{8}{\pi\,\varrho\,R\sqrt{T}}\left(\frac{M}{R^4}\,\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2$$

zu vermindern. Der Betrag dieser Correction wird noch geringer, wenn wir an derselben die Verbesserung anbringen, erstens R^4 durch $R^4 + 2\,R^3 c_1$ und zweitens ε durch $\varepsilon - \varepsilon_0$ zu ersetzen, wo ε_0 das ausserhalb der Flüssigkeit beobachtete Decrement bedeutet.

Dieses Verfahren habe ich zunächst auf die Werthe jener Constanten[1]), welche ich durch eine mit verschiedenen Scheiben in destillirtem Wasser von etwa 15°, 5 c angestellte Beobachtungsreihe erhalten hatte.

Apparat mit	Radius cm	Contsante frühere	Contsante verbesserte	Reibungscoefficient frühere	Reibungscoefficient verbesserte
Ansatzscheiben	2,44	0,09194	0,06787		0,01174
kl. Messingscheibe	5,59	7388	6704	0,01393	1146
Glasscheibe	5,83	7421	6753	1405	1162
gross. Messingscheibe	7,87	7254	6780	1328	1172
Weissblechscheibe	10,75	7159	6878	1308	1206

Für dieselbe Temperatur fand Poiseuille aus Beobachtungen über Strömung in Röhren $\eta = 0{,}01127$. Demnach genügt die König'sche Correction recht befriedigend, um

1) Pogg. Ann. Bd. 113, S. 233 unten.

die bisher den Ergebnissen meiner Versuche fehlende Uebereinstimmung unter einander und mit den aus Strömungsbeobachtungen herzustellen.

Dieselben Beobachtungen habe ich mit der Formel König's[1]) auch so verglichen, dass ich aus dem Poiseuille'schen Werthe $\eta = 0{,}001127$ nach der Formel den Werth des Decrements theoretisch berechnet habe.

	berechnet	beobachtet
Apparat mit Ansatzscheiben	0,00091	0,00105
mit der kl. Messingsch.	0,01930	0,01972
„ „ Glasscheibe	0,02438	0,02496
„ „ gross. Messingsch.	0,05777	0,05880
„ „ Weissblechscheibe	0,16747	0,17434

Die beobachteten Werthe sind also ohne Ausnahme grösser als die berechneten, wie es nach den Voraussetzungen der oben entwickelten Theorie zu erwarten war. Doch muss anerkannt werden, dass durch die König'sche Verbesserung der Formel der Einklang zwischen Theorie und Beobachtung erheblich gewonnen hat, besonders bei den kleineren Scheiben.

Nach diesem Erfolge habe ich es der Mühe werth erachtet, auch die meisten anderen, in meiner ersten Abhandlung weiterhin mitgetheilten[2]) Beobachtungen nach der neuen Formel umzurechnen.

Reibungscoefficienten des destillirten Wassers.

Temperatur	Alte Berechnung.	Neue Berechnung.	Nach Poiseuille	Hyperbolische Formel
8,7	0,0169	0,0141	0,0136	0,0139
10,1	157	129	131	133
12,5	150	127	122	125
15,5	137	117	113	116
17,8	126	110	107	110
17,9	130	111	106	110
21,6	119	102	097	104
23,9	112	097	092	097
28,5	102	089	083	089
33,7	093	081	074	081

1) König, Habilitationsschrift S. 29; Wied. Ann. Bd. 32, S. 218.

2) Pogg. Ann. Bd. 113, S. 399 u. folg. 1861.

Den hier aufgeführten neu berechneten Zahlen, welche sich von den früher angenommenen zum Theil erheblich unterscheiden, habe ich zur Vergleichung diejenigen gegenübergestellt, welche eine von mir aus Poiseuille's Beobachtungen abgeleitete Formel[1])

$$\eta = \frac{0{,}01775}{(1 + 0{,}01104\,\vartheta)(1 + 2 \cdot 0{,}01104\,\vartheta)}$$

liefert. Besser werden meine Zahlenwerthe in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur ϑ durch das aus ihnen berechnete hyperbolische Gesetz, welches mit dem von Rosencranz aufgestellten fast übereinstimmt,

$$\eta = \frac{0{,}0183}{1 + 0{,}0369\,\vartheta}$$

wiedergegeben, wie die letzte Zahlenreihe lehrt.

Alaunlösung von 3,650 Th. wasserfreien Alauns in 100 Th. Wasser oder 3,521 Th. Salz in 100 Th. Lösung.

Temp.	Alte	Neue Berechnung
10,°4	0,0193	0,0164
12,15	180	150
22,3	141	120

Der Reibungscoefficient wächst bei Alaunlösung in demselben Verhältniss wie der Salzgehalt, so dass aus diesen Zahlen der Werth für jede andere Concentration leicht berechnet werden kann.

Lösung von schwefelsaurem Natron.

Salzgehalt		Temp.	Alt.	Neu.	η_0	Temp. Coeff.
10,425	9,441	10,4	0,0229	0,0185	0,0296	0,0580
		12,6	209	170		
		17,9	176	146		
7,780	7,218	12,4	189	155	0,0253	0,0502
		13,4	185	152		
		18,1	159	133		
5,160	4,907	9,9	189	156	0,0230	0,0459
		13,75	171	143		
		18,1	149	125		
2,567	2,503	10,2	174	145	0,0205	0,0412
		12,75	161	135		
		18,0	138	117		

1) Wied. Ann. Bd. 2, S. 387. 1877.

Der Salzgehalt ist hier, wie weiterhin überall, so angegeben, dass die erste Zahl ausdrückt, wie viel wasserfreies Salz in 100 Theilen Wasser gelöst war, die zweite, wie viel in 100 Theilen Lösung. Aus den unter der Ueberschrift „Neu" zusammengestellten neu berechneten Werthen des Reibungscoefficienten habe ich Formeln von der Gestalt

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \beta\vartheta}$$

für jede Lösung berechnet; die beiden letzten Zahlenreihen enthalten die Werthe von η_0 und β.

Lösung von schwefelsaurem Kali.

Salzgehalt		Temp.	Alt.	Neu.
13,30	11,74	17,5	0,0155	0,0133
		30,3	121	104
8,865	8,14	10,95	170	142
		17,9	145	123
		35,0	107	089
4,43	4,24	11,6	163	138
		18,0	146	124
		34,4	098	086

Lösung von salpetersaurem Natron.

Salzgehalt		Temp.	Alt.	Neu.	η_0	Temp. Coeff.
82,62	45,24	17,9	0,0351	0,0255		
57,11	36,35	12,8	299	228	0,0291	0,0233
		17,0	266	207		
		23,3	231	187		
35,26	26,07	— 3,0	340	257	0,0233	0,0280
		14,1	211	166		
		16,5	199	161		
		23,9	166	137		
16,31	14,02	— 2,35	253	200	0,0191	0,0306
		9,3	185	152		
		16,5	150	126		
		24,1	131	111		

Lösung von salpetersaurem Kali.

Salzgehalt		Temp.	Alt.	Neu.	η_0	Temp. Coeff.
16,76	14,35	10,55	0,0147	0,0123	0,0155	0,0279
		10,7	142	119		
		12,7	132	111		
		17,85	124	106		
		21,65	111	095		
11,81	10,57	10,45	150	126	0,0166	0,0307
		23,2	113	097		
7,70	7,15	10,42	151	127	0,0169	0 0322
		23,8	111	096		
4,79	4,57	10,5	151	127	0,0179	0,349
		23,5	113	098		

Aus den letzten 4 Tabellen habe ich die in der folgenden zusammengestellten Werthe für 17°,9 berechnet, um die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten vom Salzgehalt anschaulich zu machen. Ebenso wie früher habe ich versucht, diese Abhängigkeit durch Formeln von der Gestalt

$$\eta = \left\{\eta_w + 2\,\eta_{ws}\sigma + \eta_s\sigma^2\right\}\left(\frac{\varrho}{1+\sigma}\right)^2$$

darzustellen, indem ich für σ den Salzgehalt in 1 Theil Wasser, für ϱ die Dichtigkeit der Lösung und für η_w die innere Reibung des Wassers einführte; die berechneten Werthe der Constanten η_{ws} und η_s, welche die Reibung des Salzes gegen Wasser und die innere Reibung des flüssigen Salzes bedeuten sollen, habe ich beigefügt.

	$100\,\sigma$	Alt.	Neu.	η_{ws}	η_s
Schwefels. Natron	10,425	0,0176	0,0145	0,0112	0,186
	7,780	160	133		
	5,160	150	126		
	2,567	138	117		
Schwefels. Kali	13,298	0,0154	0,0132	0,0127	0,000
	8,865	145	127		
	4,432	146	125		

	100σ	Alt	Neu.	η_{ws}	η_s
Salpeters. Natron	82,62	0,0351	0,0255	0,0078	0,033
	57,11	261	205		
	35,26	193	155		
	16,31	147	124		
Salpeters. Kali	16,76	0,0124	0,0103	0,0029	0,000
	11,81	128	107		
	7,70	129	107		
	4,80	130	110		
Wasser	0	0,0130	0,0110		

Reibung von gemischten Salzlösungen.

Salzgehalt				Temp.	Alt.	Neu.
Lösung von Kali- und Natron-Salpeter.						
0,00	NO_3K	13,01	NO_3Na	16,9	0,0148	0,0124
5,11	„	9,04	„	16,2	145	122
7,69	„	7,04	„	16,2	138	116
11,57	„	4,02	„	15,5	136	115
13,93	„	2,20	„	16,0	132	111
Lösung von schwefelsaurem und salpetersaurem Natron.						
5,86	SO_4Na_2	5,71	NO_3Na	15,8	0,0164	0,0136
Lösung von schwefelsaurem und salpetersaurem Kali.						
6,65	SO_4K_2	4,18	NO_3K	18,0	0,0139	0,0117
7,34	„	2,88	„	—	142	119
Lösung von salpetersaurem Kali und schwefelsaurem Natron.						
13,87	NO_3K	1,80	SO_4Na_2	16,0	0,0137	0,0115
11,49	„	3,28	„	15,6	145	121
7,58	„	5,71	„	15,5	159	132
5,02	„	7,30	„	16,0	166	138
Lösung von salpetersaurem Natron und schwefelsaurem Kali.						
4,08	SO_4K_2	9,02	NO_3Na	14,5	0,0160	0,0132
7,52	„	6,01	„	14,8	161	134
10,47	„	3,00	„	15,1	164	136

Reibungscoefficient des Rüböls.

Temperatur	Alte	Neue Berechnung
0°	69,3	25,3
6.5	14.9	5.18
12,4	7.52	3,08
13.9	6,79	2,82
18,1	3.44	1,69
27,0	2,19	1,20
29.5	1 65	0,96
31,6	1,50	0,90

Bei Flüssigkeiten von so grosser Zähigkeit, wie Oel, ist also der Betrag der Correction sehr erheblich, und es ist anzunehmen, dass die neu berechneten Werthe noch beträchtlich grösser als die wahren sein mögen.

Reibung der Luft.

Das Rechnungsverfahren, welches ich auf meine mit tropfbaren Flüssigkeiten angestellten Beobachtungen mit gutem Erfolge angewandt habe, bewährt sich nicht bei der Berechnung der über die Reibung der Luft ausgeführten Versuche; denn der Werth der Correction fällt, da im Nenner die Dichtigkeit ϱ vorkommt, bei Flüssigkeiten von so geringer Dichte und verhältnissmässig so starker Reibung, wie die Luft sie besitzt, sehr gross aus. Es ist daher zweckmässiger, die früher berechneten Werthe gar nicht zu benutzen, sondern den Reibungscoefficienten aus den unmittelbar beobachteten Grössen neu zu berechnen.

Bei meinen Versuchen über die Reibung der Luft[1]) habe ich das Verfahren Coulomb's so abgeändert, dass ich am Apparat statt einer drei Scheiben anbrachte, welche auf der Axe verschoben werden konnten. Ich liess diese drei Scheiben einmal von einander getrennt schwingen und dann

1) Pogg. Ann. Bd. 125, S. 177.

so auf einander liegend, dass die Reibung der Luft an den vier mittleren Scheibenflächen beseitigt war. Die Differenz der bei beiden Anordnungen beobachteten logarithmischen Decremente ε' und ε stellte ich dann durch die Formel[1])

$$\lambda = \varepsilon' - \varepsilon = 2\varkappa = \frac{\pi R^4}{M}\sqrt{\frac{\pi}{2}\eta\varrho T}$$

dar, da es wegen der Kleinheit von η und ϱ erlaubt ist, höhere Potenzen von $\varkappa$ zu vernachlässigen.

Diese Formel ist jetzt durch das von König hinzugefügte Glied zu vervollständigen, so dass wir zur Bestimmung der zuvörderst gesuchten Unbekannten $\sqrt{\eta}$ eine quadratische Gleichung

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{R^4}{M}\left\{\sqrt{2\pi\eta\varrho T} + \frac{4}{R}\eta T\right\}$$

erhalten, welche aufgelöst wird durch die Wurzel

$$\sqrt{\eta T} = \sqrt{\frac{M}{\pi R^3}\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{32}\varrho R^2} - \frac{R}{8}\sqrt{2\pi\varrho}\ .$$

Nach dieser Formel habe ich drei Beobachtungsreihen[2]) neu berechnet. Die Ergebnisse enthält die folgende Zusammenstellung, in welcher alle Masse auf Gramm, Centimeter und Secunden reducirt sind.

1. Apparat mit Messingscheiben. $M = 55545$; $R = 9{,}988$; $T = 14{,}19$.

Temp.	Druck	λ	$\sqrt{\eta}$	η	früh. Berechn.
22,4	75,75	0,001676	0,0145	0,000217	0,000332
3	50,06	1311	135	182	307
6	25,11	0813	115	135	236
25	0,80	0559	160	255	

1) Pogg. Ann. Bd. 125, S. 402.

2) Die erste vom Februar 1863 wurde auf S. 578, die zweite vom April 1863 auf S. 580—581, die dritte vom December 1863 auf S. 582 der erwähnten Abhandlung in Poggendorff's Annalen Bd. 125 mitgetheilt.

2. Zweite Reihe mit demselben Apparat.

Temp.	Druck	λ	$\sqrt{\eta}$	η	früh. Berechn.
22,5	74,72	0,001619	0,0142	0,000201	0,000313
20,9	49,49	1368	141	198	336
21,0	23,97	0741	107	115	204
21,8	7,12	0579	121	147	
20,7	0,46	0537	162	263	

3. Apparat mit Glasscheiben. $M = 0584$; $R = 7{,}566$; $T = 8{,}895$.

17,6	74,91	0,00342	0,0136	0,000185	0,000288
19,6	49,97	323	148	218	385
20,1	25,05	208	127	162	318
21,6	1,18	073	110	122	817

Die neu berechneten Zahlen stimmen sehr viel besser als die früher gefundenen unter einander überein, so dass meine Beobachtungen jetzt recht befriedigend die Thatsache bestätigen, dass der Reibungscoefficient der Luft, wie es Maxwell's Theorie verlangt, von ihrer Dichtigkeit unabhängig ist; damals aber durfte ich nur behaupten, dass nach meinen Beobachtungen das Maxwell'sche Gesetz mindestens annäherungsweise zutreffe.

Die Abweichungen der Zahlen sind freilich auch jetzt noch nicht ganz verschwunden; doch liegt ohne Zweifel der Grund hauptsächlich in dem störenden Einfluss der den Apparat umschliessenden Glasglocke. Die Bewegung breitet sich in dem reibenden Medium um so weiter aus, je grösser die Reibung, je kleiner die Dichtigkeit desselben und je grösser die Schwingungszeit des Apparats ist. Daher muss die Störung durch die feste Wand der Glocke am stärksten bei den mit den grösseren Messingscheiben in möglichst verdünnter Luft angestellten Versuchen sich fühlbar machen. Abgesehen von diesen zwei Beobachtungen, stimmen alle Ergebnisse ziemlich gut mit den aus Transspirationsversuchen so auf einander liegend, dass die Reibung der Luft an den vier mittleren Scheibenflächen beseitigt war. Die Differenz der bei beiden Anordnungen beobachteten logarithmischen Decremente ε' und ε stellte ich dann durch die Formel[1])

$$\lambda = \varepsilon' - \varepsilon = 2\varkappa = \frac{\pi R^4}{M} \sqrt{\frac{\pi}{2} \eta \varrho T}$$

dar, da es wegen der Kleinheit von η und ϱ erlaubt ist, höhere Potenzen von $\varkappa$ zu vernachlässigen.

Diese Formel ist jetzt durch das von König hinzugefügte Glied zu vervollständigen, so dass wir zur Bestimmung der zuvörderst gesuchten Unbekannten $\sqrt{\eta}$ eine quadratische Gleichung

$$\lambda = \frac{\pi R^4}{2 M} \left\{ \sqrt{2\pi \eta \varrho T} + \frac{4}{R} \eta T \right\}$$

erhalten, welche aufgelöst wird durch die Wurzel

$$\sqrt{\eta T} = \sqrt{\frac{M}{\pi R^3} \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{32} \varrho R^2} - \frac{R}{8} \sqrt{2\pi\varrho} \, .$$

Nach dieser Formel habe ich drei Beobachtungsreihen[2]) neu berechnet. Die Ergebnisse enthält die folgende Zusammenstellung, in welcher alle Masse auf Gramm, Centimeter und Secunden reducirt sind.

1. Apparat mit Messingscheiben. $M = 55545$; $R = 9{,}988$; $T = 14{,}19$.

Temp.	Druck	λ	$\sqrt{\eta}$	η	früh. Berechn.
22,4	75,75	0,001676	0,0145	0,000217	0,000332
3	50,06	1311	135	182	307
6	25,11	0813	115	135	236
25	0,80	0559	160	255	

1) Pogg. Ann. Bd. 125, S. 402.

2) Die erste vom Februar 1863 wurde auf S. 578, die zweite vom April 1863 auf S. 580—581, die dritte vom December 1863 auf S. 582 der erwähnten Abhandlung in Poggendorff's Annalen Bd. 125 mitgetheilt.

2. Zweite Reihe mit demselben Apparat.

Temp.	Druck	λ	$\sqrt{\eta}$	η	früh. Berechn.
22,5	74,72	0,001619	0,0142	0,000201	0,000313
20,9	49,49	1368	141	198	336
21,0	23,97	0741	107	115	204
21,8	7,12	0579	121	147	
20,7	0,46	0537	162	263	

3. Apparat mit Glasscheiben. $M = 6584$; $R = 7{,}566$; $T = 8{,}895$.

17,6	74,91	0,00342	0,0136	0,000185	0,000288
19,6	49,97	323	148	218	385
20,1	25,05	208	127	162	318
21,6	1,18	073	110	122	817

Die neu berechneten Zahlen stimmen sehr viel besser als die früher gefundenen unter einander überein, so dass meine Beobachtungen jetzt recht befriedigend die Thatsache bestätigen, dass der Reibungscoefficient der Luft, wie es Maxwell's Theorie verlangt, von ihrer Dichtigkeit unabhängig ist; damals aber durfte ich nur behaupten, dass nach meinen Beobachtungen das Maxwell'sche Gesetz mindestens annäherungsweise zutreffe.

Die Abweichungen der Zahlen sind freilich auch jetzt noch nicht ganz verschwunden; doch liegt ohne Zweifel der Grund hauptsächlich in dem störenden Einfluss der den Apparat umschliessenden Glasglocke. Die Bewegung breitet sich in dem reibenden Medium um so weiter aus, je grösser die Reibung, je kleiner die Dichtigkeit desselben und je grösser die Schwingungszeit des Apparats ist. Daher muss die Störung durch die feste Wand der Glocke am stärksten bei den mit den grösseren Messingscheiben in möglichst verdünnter Luft angestellten Versuchen sich fühlbar machen. Abgesehen von diesen zwei Beobachtungen, stimmen alle Ergebnisse ziemlich gut mit den aus Transspirationsversuchen hergeleiteten und den nach Maxwell's Methode bestimmten Werthen überein.

Die von Herrn W. König zu meinen früher benutzten Formeln hinzugefügte Correction befindet sich also nicht nur mit der Theorie im Einklange, sondern hat sich auch bei Anwendung auf meine Beobachtungen in allen Fällen aufs beste bewährt.