BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Funktionsgleichung von G. Aumann

Von W. Benz in Hamburg

1. Im Zusammenhang grundlagen-topologischer Untersuchungen wurde G. Aumann [2] auf die Funktionalgleichung (sie ist vom Rang 2, s. J. Aczel [1])

$$(1) \qquad f(x)f(y)f(1+x+y) = f(x)f(y)$$

geführt. Dabei liegt ein Boolescher Ring R zugrunde. Gefragt wird nach Funktionen $f: R \to R$, die (1) für alle $x, y \in R$ erfüllen. Ist beispielsweise T ein topologischer Raum, ist R der Boolesche Ring aller Teilmengen von T, so ist $f(x) = \underset{\sim}{x}$ eine Lösung von (1), wenn $\underset{\sim}{x}$ den offenen Kern von $x \subset T$ bezeichnet. G. Aumann interessiert sich für die Herauskristallisierung derjenigen Lösungen f von (1), die Endomorphismen der multiplikativen Struktur von R sind, was durch die Monotonie von f erreicht wird. In der vorliegenden Note beschäftigt uns zunächst die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aller Lösungen der Aumannschen Funktionalgleichung (1), die wir in Abschnitt 2 mit Hilfe eines multiplikativ abgeschlossenen Teilsystems eines Booleschen Ringes $\bar{R}$, dessen Elemente Funktionen $H: R \times R \to R$ sind, darstellen.

Außerdem geben wir in Abschnitt 2 einen Satz an, der eine Aussage macht über die Abweichung der Lösungen von (1) von Endomorphismen von $(R, \cdot)$. Abschnitt 3 ist Unabhängigkeitsfragen gewidmet: Eine Lösung von (1) braucht nicht Endomorphismus von $(R, \cdot)$ zu sein. Man verifiziert unmittelbar, daß ein Endomorphismus f von (R, +) genau dann Lösung von (1) ist, wenn $f(x)f(1) = f(x)$ für alle $x \in R$ gilt. Umgekehrt braucht eine Lösung von (1), wie leicht zu sehen ist, nicht Endomorphismus von $(R, +)$ zu sein. Ist R der Boolesche Ring aller Teilmengen der Menge T, so braucht zur Lösung f von (1) keine Topologie von T so zu existieren, daß $f(x)$ der offene Kern von $x \subset T$ ist für alle $x \in R$. Wir konstruieren weiterhin eine Lösung f von (1), die $f(1) = 1$, $f(x) \subset x$ für alle x genügt, die aber nicht Endomorphismus von $(R, \cdot)$ ist. Bekanntlich (s. H. Hermes [3]) ist ein

Boolescher Ring auch eine Boolesche Algebra. So besagt $(1+x)(1+y)=0$ dasselbe wie $x \cup y = 1$. In Abschnitt 4 beweisen wir nun den folgenden Satz: Ist R Boolescher Ring, ist $f: R \to R$ eine Funktion mit

(i) (1) gilt in den Fällen $x \cup y = 1$

(ii) $x \subset y$ impliziert $f(x) \subset f(y)$,

so ist f Lösung von (1) und darüberhinaus Endomorphismus von $(R, \cdot)$.

Für den Fall, daß f als Lösung von (1) vorausgesetzt wird, hat G. Aumann einen Beweis dieses Satzes angegeben (mündliche Mitteilung).

Der Autor möchte Herrn Aumann für freundlich gewährte Hinweise sehr herzlich danken.

2. Sei R ein Boolescher Ring. Die Elemente von $R^2 := R \times R$ nennen wir Punkte. Sei gesetzt

$$\overline{(x, y)} := (x, 1+x+y), \qquad (x, y)' := (y, x).$$

Bezeichnet dann $\varphi(A)$ für den Punkt A die kleinste – A enthaltende – Punktmenge, die gegenüber den Bildungen $^-$,$'$ abgeschlossen ist, so gilt

$$\varphi(A) = \{A, \bar{A}, A', \bar{A}', \overline{A'}, \overline{\bar{A}'}\}.$$

Offenbar folgt $\varphi(A) = \varphi(B)$ aus $\varphi(A) \cap \varphi(B) \neq \emptyset$. Sei

$$[R^2] := \{\varphi(A) \mid A \in R^2\}.$$

Ist dann ω eine beliebige Abbildung von $[R^2]$ in R, so stellt $H(x, y) := \omega\left(\varphi((x, y))\right)$ eine Lösung von

$$(2) \qquad \begin{cases} H(x, y) = H(x, 1+x+y) \\ H(x, y) = H(y, x) \\ H: R^2 \to R \end{cases}$$

dar. Andere Lösungen von (2) gibt es nicht, da H auf $\varphi\left((x, y)\right)$ konstant sein muß. Bezeichne $\bar{R}$ die Menge aller Funktionen (2). Für $H_1, H_2 \in \bar{R}$ sei $H_1 \cdot H_2$, $H_1 + H_2$ definiert:

$$(H_1 H_2)(x, y) := H_1(x, y) H_2(x, y),$$

$$(H_1 + H_2)(x, y) := H_1(x, y) + H_2(x, y).$$

Offenbar bildet dann $\tilde{R} = \tilde{R}\,(+, \cdot)$ selbst einen Booleschen Ring. Eine Funktion $H \in \tilde{R}$ heiße zerlegbar, wenn gilt

$$H(x, y) = H(x, 1) \cdot H(1, y) \text{ für alle } x, y \in R. \tag{3}$$

Die Menge $Z(\tilde{R})$ der zerlegbaren $H \in \tilde{R}$ ist in $\tilde{R}$ multiplikativ abgeschlossen.

Satz 1: Ist f eine Lösung von (1), so existiert ein $H \in Z(\tilde{R})$ mit $f(x) = H(x, 1)$. Ist umgekehrt ein $H \in Z(\tilde{R})$ gegeben, so stellt $f(x) = H(x, 1)$ eine Lösung von (1) dar.

Beweis: Sei f eine Lösung von (1). Mit $x = y$ in (1) folgt dann

$$f(x) f(1) = f(x). \tag{4}$$

Setzen wir $H(x, y) := f(x) f(y)$, so gilt also $f(x) = H(x, 1)$, $H(x, y) = H(y, x)$, $H(x, y) = H(x, 1) \cdot H(1, y)$.
Mit $y = 1 + x + a$ folgt aus (1)

$$f(x) f(1 + x + a) f(a) = f(x) f(1 + x + a).$$

Für die linke Seite kann man mit (1) $f(x) f(a)$ schreiben. Also ist $H(x, a) = H(x, 1 + x + a)$ und damit $H \in Z(\tilde{R})$.

Sei nun umgekehrt ein $H \in Z(\tilde{R})$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß dann $f(x) := H(x, 1)$ eine Lösung von (1) darstellt. Aus (2) und (3) folgt $H(x, y) = f(x) f(y)$ und also

$$f(x) f(y) = f(x) f(1 + x + y).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $f(y)$, so ergibt sich (1).

Den Ring $\tilde{R}$ haben wir konstruieren können. Einfache Beispiele von Elementen aus $\tilde{R}$ sind etwa $H = 0$, $H =$ const. oder auch $H(x, y) = xy$. Wir wollen jetzt den Ring $\tilde{R}$ benutzen, um eine Aussage über die Abweichung der Lösungen von (1) von Endomorphismen der multiplikativen Struktur zu machen.

Satz 2: Sei $H \in \tilde{R}$ gegeben und weiterhin eine Funktion $f: R \to R$ mit

$$f(xy) = f(x) f(y) + H(x, y) \tag{5}$$

für alle $x, y \in R$. Dann ist f eine Lösung von (1). Ist umgekehrt f eine Lösung von (1), so existiert ein $H \in \tilde{R}$ mit (5).

Beweis: Wie schon im Beweis von Satz 1 geschehen, ersetzen wir (1) durch die Funktionalgleichung

$$(1') \qquad f(x)f(y) = f(x)f(1+x+y).$$

Mit (5) ist nun

$$f(x)f(y) = f(xy) + H(x, y)$$
$$f(x)f(1+x+y) = f(xy) + H(x, 1+x+y),$$

d. h. $f \in \mathfrak{A}$.

Ist umgekehrt $f \in \mathfrak{A}$, so setze man

$$H(x, y) := f(xy) + f(x)f(y).$$

Mit (1′) folgt dann $H \in \tilde{R}$.

Bemerkung: Die Funktionalgleichung (1) kann also durch die Menge der Funktionalgleichungen (5), $H \in \tilde{R}$, ersetzt werden. Allerdings braucht (5) bei einem vorgegebenen $H \in \tilde{R}$ keine Lösung f zu besitzen, wie etwa im Falle

$$f(xy) = f(x)f(y) + 1,$$

was über $x = y$ bestätigt wird für $|R| > 1$.

3. Der Einfachheit halber sei $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $|T| = n$, eine endliche Menge. Die Elemente des Booleschen Ringes $R(T)$ aller Teilmengen von T schreiben wir in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu A_\nu = k_1 A_1 + \ldots + k_n A_n$$

mit $k_\nu \in \{0, 1\}$. Addiert und multipliziert wird komponentenweise modulo 2. Es ist $1 = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu$. Gibt man nun

$$\mathrm{f}\colon T \to R(T)$$

beliebig vor und setzt man

$$f(\Sigma k_\nu A_\nu) = \Sigma k_\nu f(A_\nu),$$

so liegt ein Endomorphismus von $R(+)$ vor, der also Lösung von (1) ist, falls durchweg

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu f(A_\nu) \subset \sum_{\nu=1}^{n} f(A_\nu)$$

gilt. Sei $n \geq 3$. Wir setzen $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_1 + A_2$, $f(A_3) = A_1 + A_3$, $f(A_i) = 0$ für $i > 3$ falls $n > 3$. Dann ist (6) erfüllt. Die zugehörige Lösung

$$f : R \to R$$

von (1) ist kein Endomorphismus von $(R, \cdot)$ wegen

$$f(A_1 \cdot A_2) = f(0) = 0,$$

$$f(A_1) \cdot f(A_2) = A_1 \cdot (A_1 + A_2) = A_1.$$

Es ergibt sich die Frage, ob unter den Endomorphismen von $R(+)$ eine Lösung von (1) zu finden ist, die durchweg $f(x) \subset x$ genügt, die aber nicht Endomorphismus von $R(\cdot)$ ist. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt der

Satz 3: Sei R ein Boolescher Ring und sei f ein Endomorphismus von $R(+)$, der durchweg $f(x) \subset x$ genügt. Dann ist f sogar ein Endomorphismus des Ringes R.

Beweis: Aus

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$x f(x) = f(x),\ y f(y) = f(y),\ (x + y) f(x + y) = f(x + y)$$

folgt

$$f(x + y) = (x + y)\,(f(x) + f(y)), \text{ d. h.}$$

$$x f(y) = y f(x)$$

für alle $x, y \in R$. Setzt man hier $y = 1$, so ist $f(x) = x f(1)$. Dies ist aber ein Endomorphismus des Ringes R.

Bemerkung: Die Abbildungen $f(x) = ax$ sind also genau die Endomorphismen von $R(+)$, die durchweg $f(x) \subset x$ genügen.

Sei R Boolescher Ring, sei $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ und $ab = 0$. Dann ist $f(x) = ax + b$ eine Lösung von (1), die Endomorphismus von $R(\cdot)$, aber nicht Endomorphismus von $R(+)$ ist.

Ist T topologischer Raum, so gilt $\underline{xy} = \underline{x} \cap \underline{y}$ für $x, y \subset T$. Im angegebenen Beispiel $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ kann also $x \to f(x)$

nicht die Form $x \to \underline{x}$ für eine geeignete Topologie von T haben, da nicht durchweg $f(xy) = f(x)f(y)$ gilt.

Sei $T = \{A_1, A_2, A_3\}$. In $R(T)$ definieren wir

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(A_i) = A_i \text{ für } i = 1, 2, 3,$$
$$f(A_1 + A_2) = A_2, f(A_2 + A_3) = A_2 + A_3, f(A_1 + A_3) = A_3.$$

Offenbar gilt $f(1) = 1$ und durchweg $f(x) \subset x$.

Für $x = A_1$, $y = A_1 + A_2$ gilt

$$f(xy) = A_1 \neq 0 = A_1 A_2 = f(x)f(y).$$

Außerdem ist f Lösung von (1): Wir schreiben (1) in der Form

$$f(x)f(y) \subset f(1 + x + y).$$

Diese Bedingung ist als unmittelbar erfüllt einzusehen in den Fällen

a) $x = y$,

b) $\{x, y\} \frown \{0, 1\} \neq \emptyset$,

c) $x = A_\nu$, $y = A_\mu$ mit $\nu \neq \mu$.

Die verbleibenden 12 Fälle sind leicht durchgerechnet, zumal in 6 dieser 12 Fälle noch $f(x)f(y) = 0$ ist.
Auch dieses Beispiel kann sofort zu einem Beispiel für $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $n > 3$, oder auch für unendliche Mengen fortgesetzt werden, indem $f(\sum k_\nu A_\nu) = 0$ gesetzt wird, falls ein $k_\nu \neq 0$ für $\nu > 3$ ist. Dem genannten Beispiel im Falle $T = \{A_1, A_2, A_3\}$ liegt gemäß Satz 2 die Funktion $H(x,y)$ zugrunde mit $\omega(\varphi(A_1, A_1 + A_2)) = A_1$ und $\omega(\varphi(x,y)) = 0$ für $(x,y) \notin \varphi(A_1, A_1 + A_2)$.

4. Es gilt der

Satz 4: Sei R Boolescher Ring und sei $f: R \to R$ eine Funktion, die (1) in den Fällen $x \cup y = 1$ genügt. Ist dann noch durchweg $f(x) \subset f(y)$ eine Folge von $x \subset y$, so ist f ein Endomorphismus von $R(\cdot)$ und damit Lösung von (1). (Daß umgekehrt für einen Endomorphismus f von $R(\cdot)$ auch $x \subset y \Rightarrow f(x) \subset f(y)$ gilt, liegt auf der Hand.)

Beweis: Aus $xy \subset x$ folgt $f(xy) \subset f(x)$. Also ist

$$f(xy) \subset f(x) f(y).$$

Für $x, y \in R$ setze $z = 1 + y + xy$. Dann ist $xz = x$ und also $f(x) \subset f(z)$ wegen $x \subset z$. Hieraus folgt $f(x) f(y) \subset f(z) f(y)$. Wegen $(1 + z)(1 + y) = 0$ ist $y \cup z = 1$. Also gilt

$$f(y) f(z) f(1 + y + z) = f(y) f(z).$$

Mit $1 + y + z = xy$ bedeutet dies

$$f(y) f(z) \subset f(xy).$$

Insgesamt ist also

$$f(x) f(y) \subset f(y) f(z) \subset f(xy),$$

d. h. $f(xy) = f(x) f(y)$ mit dem ersten Schritt des Beweises.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczel, Lectures on functional equations and their applications. Academic Press. New York and London, 1966.

[2] G. Aumann, Durchschnittsdistributivität. Vortrag, 16. Internationales Symp. Funktionalgln. Graz, 3.–10. Sept. 1978. Wird veröffentlicht. (s. auch G. Aumann, Der abbildungstheoretische Zugang zur Topologie, 2. Mitt., Sitz. Ber. Bayer. Ak. d. Wiss., Math. Nat. Kl. 1978)

[3] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie. Springer Verlag. Berlin, 1955.