Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XIX. Jahrgang 1889.

München.
Verlag der K. Akademie.
1890.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 6. Juli 1889.

1) Herr Aurel Voss hielt einen Vortrag: „Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen“.

2) Herr C. v. Voit machte eine Mittheilung über eine in seinem Laboratorium von Herrn Prof. Dr. Erwin Voit ausgeführte Untersuchung: „Ueber den geringsten Eiweissbedarf in der Nahrung“. Dieselbe soll anderweitig veröffentlicht werden.

Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 6. Juli.)

Nach Herrn Weierstrass ist es bekanntlich für die Aequivalenz zweier linearen Schaaren $A - rB$ und $A_1 - rB_1$ von bilinearen Formen A, B; A_1, B_1, nothwendig und hinreichend, dass die beiden Determinanten

$$|A - rB|, \ |A_1 - rB_1|$$

die nämlichen Elementartheiler besitzen, vorausgesetzt, dass dieselben bei willkürlichem r nicht identisch verschwinden.

Unter dieser Annahme liefert das von Herrn Weierstrass[1]) auseinandergesetzte Verfahren zwei Substitutionen P und Q der x und y von nicht verschwindender Determinante, vermöge welcher

$$PAQ = A_1,$$
$$PBQ = B_1,$$

wird. Man kann noch voraussetzen, worin keine Beschränkung liegt, dass die Determinante von B nicht verschwindet. Diese Formen P und Q mögen die Weierstrass'schen Substitutionen heissen. Ausser diesen gibt es aber noch andere Formen P_1, Q_1 derselben Eigenschaft. Ist nämlich auch

$$P_1 A Q_1 = A_1,$$
$$P_1 B Q_1 = B_1,$$

so folgt

$$P_1 A Q_1 = P A Q,$$
$$P_1 P Q_1 = P B Q;$$

oder, wenn man den aus der zweiten dieser letzteren Gleichungen folgenden Werth

$$Q_1 = B^{-1} P_1^{-1} P B Q$$

in die erstere einsetzt,

$$P_1 A B^{-1} P_1^{-1} P B Q = P A Q;$$

oder, wenn der Factor Q von nicht verschwindender Determinante fortgelassen wird,

$$P^{-1} P_1 A B^{-1} = A B^{-1} P^{-1} P_1.$$

Setzt man also

$$P^{-1} P_1 = W,$$

so ist

$$W A B^{-1} = A B^{-1} W;$$

d. h. die Form W ist mit AB^{-1} vertauschbar. Und umgekehrt sind, wenn W irgend eine mit AB^{-1} vertauschbare Form von nicht verschwindender Determinante ist,

1) Monatsber. d. Berl. Akad. 1868.

1) $P_1 = P\,W$,

2) $Q_1 = B^{-1}\,W^{-1}P^{-1}P\,B\,Q = B^{-1}\,W^{-1}B\,Q$

zwei Substitutionen, für welche

$$P_1\,A\,Q_1 = P\,W\,A\,B^{-1}\,W^{-1}\,B\,Q = P\,A\,Q = A_1,$$
$$P_1\,B\,Q_1 = P\,W\,B\,B^{-1}\,W^{-1}\,B\,Q = P\,B\,Q = B_1$$

wird. Es giebt daher genau so viel von einander linear unabhängige Formen P_1, Q_1, welche die Schaar $A - rB$ in $A_1 - rB_1$ transformiren, als es Formen dieser Art giebt, die mit AB^{-1} vertauschbar sind, und deren Determinante nicht Null ist. Denn unter dieser Voraussetzung sind die aus 1) und 2) folgenden Formen linear von einander unabhängig.

Ueber die mit einer Form A vertauschbaren Formen P hat zuerst, soviel mir bekannt, Herr Frobenius[1]) ohne Beweis einige Sätze mitgetheilt, von denen der auf die Anzahl der linear unabhängigen Formen dieser Art bezügliche der wichtigste zu sein scheint. Diese Zahl ist sodann von Herrn L. Maurer[2]) auf einem Wege hergeleitet worden, auf dem gleichzeitig das Problem der Aequivalenz zweier Formen erledigt wird. Da aber die wirkliche Ermittelung der vertauschbaren Formen sich hierbei verhältnissmässig umständlich gestaltet, andererseits gerade dieses Problem bei vielen Untersuchungen über cogrediente und conjugirte Transformationen von Bilinearformen in sich selbst[3]) eine fundamentale Rolle spielt, so schien es mir wünschenswerth, einen anderen Weg einzuschlagen, der die Bildung sämmtlicher Formen auf einen übersichtlicheren Process zurückführt, welcher zugleich die

---

1) Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Borchardt's Journal, Bd. 84.

2) L. Maurer, Zur Theorie der linearen Substitutionen, Inauguraldissertation, Strassburg, 1887.

3) Vgl. meine Mittheilung in diesen Sitzungsberichten, Juni 1889.

Untersuchung der characteristischen Function der mit einer gegebenen Form vertauschbaren Formen gestattet. Indem ich im Folgenden einen solchen bezeichne, möge nur noch bemerkt werden, dass sich derselbe unmittelbar an die von Herrn Frobenius dargelegte Symbolik der bilinearen Formen anschliesst.

§ 1.

Die Grundlage des Folgenden bildet der von Herrn Frobenius bewiesene Satz:[1])

„Sind in der Gleichung

$$PA = BP$$

die characteristischen Functionen von A und B theilerfremd, so ist P identisch Null."

In der Gleichung

$$1) \qquad PA = AP,$$

welche ausdrückt, dass die Form A, über deren Determinante nichts vorausgesetzt sein soll, mit der Form P vertauschbar ist, sei nunmehr A zerlegbar in die Theile

$$A = A_1 + A_2,$$

von denen der erste nur die Variabelnpaare $x_1 y_1 \ldots x_\varrho y_\varrho$, der zweite nur die Variabelnpaare $x_{\varrho+1} y_{\varrho+1} \ldots x_n y_n$ ententhält. Bezeichnet man die Formen

$$\sum_1^\varrho x_i y_i, \quad \sum_{\varrho+1}^n x_i y_i$$

durch E_1 und E_2, so folgt aus der Gleichung 1)

$$P(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) P,$$

durch das Verfahren der associativen und distributiven Multiplication

1) a. a. O. S. 28.

$$\begin{aligned} E_1 P A_1 &= A_1 P E_1, \\ E_1 P A_2 &= A_1 P E_2, \\ E_2 P A_2 &= A_2 P E_1, \\ E_2 P A_2 &= A_2 P E_2. \end{aligned}$$

Schreibt man hierfür

$$\begin{aligned} E_1 P E_1 A_1 &= A_1 E_1 P E_1, \\ E_1 P E_2 A_2 &= A_1 E_1 P E_2, \\ E_2 P E_1 A_1 &= A_2 E_2 P E_1, \\ E_2 P E_2 A_2 &= A_2 E_2 P E_2 ; \end{aligned}$$

und setzt

$$\begin{aligned} E_1 P E_1 &= P_1, \quad E_1 P E_2 = Q; \\ E_2 P E_1 &= R, \quad E_2 P E_2 = P_2; \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} P_1 A_1 &= A_1 P_1, \\ P_2 A_2 &= A_2 P_2, \\ R\, A_1 &= A_2 R, \\ Q\, A_2 &= A_1 Q. \end{aligned}$$

Sind daher die characteristischen Functionen von A_1 und A_1 theilerfremd, so folgt

$$Q = R = o;$$

mithin

$$P = (E_1 + E_2) P (E_1 + E_2) = P_1 + P_2.$$

Man hat also folgenden Satz:

Ist die Form A zerlegbar in Formen, deren characteristische Functionen unter einander theilerfremd sind, so ist jede mit A vertauschbare Form P in derselben Weise zerlegbar.[1])

Man schreibe nun die Gleichung 1) in der Form

$$W P W^{-1} W A W^{-1} = W A W^{-1} W P W^{-1}.$$

---

1) Zwei Formen heissen in gleicher Weise zerlegbar, wenn jedem Bestandtheil der einen ein (möglicherweise auch identisch verschwindender) von den nämlichen Variabelnpaaren abhängiger Bestandtheil der anderen entspricht.

Bezeichnet man dann die Elementartheiler der characteristischen Function von A durch $(\varrho - a_i)^{\alpha_i}$, wobei die Zahlen a, α in beliebiger Weise unter einander gleich sein können, so hat die Normalform[1])

$$N = \Sigma_i (x_1 y_1 + \ldots x_{\alpha_i} y_{\alpha_i})\, a_i + (x_1 y_2 + \ldots x_{\alpha_i - 1} y_{\alpha_i})$$

dieselben Elementartheiler wie A. Demnach existirt eine Form W von nicht verschwindender Determinante, für welche

$$W A W^{-1} = N$$

wird. Bezeichnet man endlich

$$W P W^{-1}$$

durch p, so ist die Aufgabe auf die Behandlung der Gleichung

$$2) \qquad p N = N p$$

zurückgeführt. Unter W sei dabei etwa die Weierstrass'sche Substitution verstanden. Man zerlege nun die Form N in die Summe der Formen

$$N_1 + N_2 + \ldots N_h,$$

deren characteristische Functionen je für sich nur eine einzige vielfache Wurzel, jedoch mit beliebigen Elementartheilern besitzen. Nach dem eben bewiesenen Satze kommt die Lösung der Gleichung 2) dann zurück auf die Lösung des Systemes der Gleichungen

$$3) \qquad p_i N_i = N_i p_i; \quad i = 1, 2 \ldots h.$$

§ 2.

Die Lösungen der Gleichungen 3), § 1) lassen sich aber unmittelbar hinschreiben.

Es sei ϱ_i eine $n_i = \nu$-fache Wurzel der characteristischen

1) Weierstrass, a. a. O.

Function von A, deren zugehörige Elementartheiler die Exponenten

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \ldots \geqq \alpha_k > o$$

haben. Der zugehörige Bestandtheil N_i der Normalform N ist dann

$$1) \quad \begin{aligned} N_i = \varrho_i E_\nu &+ [x_1 y_2 + \ldots x_{t_1 - 1} x_{t_1}] \\ &+ [x_{t_1+1} y_{t_1+2} + \ldots x_{t_2-1} y_{t_2}] \\ &+ [x_{t_2+1} y_{t_2+2} + \ldots x_{t_3-1} y_{t_3}] \\ &+ \ldots \\ &+ [x_{t_{k-1}+1} y_{t_{k-1}+2} + \ldots x_{\nu-1} y_\nu], \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_k = \nu, \\ &\alpha_1 = t_1, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = t_2, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = t_3, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_h = t_h; \end{aligned}$$

mithin auch

$$\begin{aligned} &t_k = \nu, \\ &t_h + \alpha_{h+1} = t_{h+1} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man den in 1) eingeklammerten Theil durch W_i, so ist demnach die von den Variabeln $x_1 y_1, \ldots x_\nu y_\nu$ abhängige Bilinearform p_i so zu bestimmen, dass

$$2) \qquad p_i W_i = W_i p_i$$

wird.

Das Gleichungssystem 2) aber lautet, wenn die Coefficienten von p_i mit p_{ik} bezeichnet werden, so dass

$$p_i = \Sigma x_i y_k p_{ik}$$

ist, folgendermassen

$$
\begin{aligned}
& \Sigma x_m (p_{m1}\, y_2 + \ldots p_{mt_1-1}\, y_{t_1}) \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma x_m \left(p_{mt_\lambda+1}\, y_{t_\lambda+2} + \ldots p_{mt_{\lambda+1}-1}\, y_{t_{\lambda+1}}\right) \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma x_m \left(p_{mt_\mu+1}\, y_{t_\mu+2} + \ldots p_{mt_{\mu+1}-1}\, y_{t_{\mu+1}}\right) * \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma x_m \left(p_{mt_{\nu-1}+1}\, y_{t_{\nu-1}+2} + \ldots p_{mt_\nu-1}\, y_{t_\nu}\right) \\
= \quad & \Sigma y_m (p_{1m}\, x_1 + \ldots p_{t_1 m}\, x_{t_1-1}) \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma y_m \left(p_{t_\lambda+2\, m}\, x_{t_\lambda+1} + \ldots p_{t_{\lambda+1}}\, x_{t_{\lambda+1}-1}\right) * \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma y_m \left(p_{t_\mu+2\, m}\, x_{t_\mu+1} + \ldots p_{t_{\mu+1}\, m}\, x_{t_{\mu+1}-1}\right) \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \Sigma y_m \left(p_{t_{\nu-1}+2\, m}\, x_{t_{\nu-1}+1} + \ldots p_{t_\nu m}\, x_{t_\nu-1}\right)
\end{aligned}
$$

und muss für alle Werthe des Index $m = 1, 2 \ldots \nu$ identisch bestehen. Vergleicht man nun die Coefficienten von

$$x_{t_\lambda+1},\ x_{t_\lambda+2},\ \ldots\ x_{t_{\lambda+1}-1},\ x_{t_{\lambda+1}}$$

in den beiden durch einen * bezeichneten Theilen,[1]) so ergeben sich die folgenden $\alpha_{\lambda+1}$ Systeme von je $\alpha_{\mu+1}$[2]) Gleichungen, wenn noch zur Abkürzung statt p_{ik} einfach i, k gesetzt wird:

Erstes System:

$$
\begin{aligned}
o &= t_\lambda + 2,\ t_\mu + 1, \\
t_\lambda + 1,\ t_\mu + 1 &= t_\lambda + 2,\ t_\mu + 2, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

1) Diese Coefficienten sind im folgenden als „zur Gruppe $[\lambda, \mu]$ gehörig" bezeichnet.

2) Nur das letzte, $\alpha_{\lambda+1}$te System enthält eine Gleichung weniger, was an der betreffenden Stelle durch einen * kenntlich gemacht ist,

$$t_\lambda + 1,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 2 = t_\lambda + 2,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1,$$
$$t_\lambda + 1,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1 = t_\lambda + 2,\ t_{\mu+1};$$

Zweites System:

$$o = t_\lambda + 3,\ t_\mu + 1,$$
$$t_\lambda + 2,\ t_\mu + 1 = t_\lambda + 3,\ t_\mu + 2,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$t_\lambda + 2,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 2 = t_\lambda + 3,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1,$$
$$t_\lambda + 2,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1 = t_\lambda + 3,\ t_{\mu+1};$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$\alpha_{\overline{\lambda+1}} - 1^{\text{tes}}$ System;

$$o = t_{\lambda+1},\ t_\mu + 1,$$
$$t_{\overline{\lambda+1}}\, 1,\ t_\mu + 1 = t_{\lambda+1},\ t_\mu + 2,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$t_{\overline{\lambda+1}}\, 1,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 2 = t_{\lambda+1},\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1,$$
$$t_{\overline{\lambda+1}}\, 1,\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1 = t_{\lambda+1},\ t_{\mu+1};$$

$\alpha_{\lambda+1}^{\text{tes}}$ System:

$$o = t_{\lambda+1},\ t_\mu + 1,$$
$$o = t_{\lambda+1},\ t_\mu + 2,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$o = t_{\lambda+1},\ t_{\overline{\mu+1}}\, 1.$$

*

Hieraus ergeben sich sofort die zur Gruppe $[\lambda, \mu]$ gehörigen Werthe der Coefficienten von p. Es ist nämlich einerseits:

$$o = t_\lambda + h,\ t_\mu + 1 = t_\lambda + h + 1,\ t_\mu + 2 =$$
$$= t_\lambda + h + 2,\ 1_\mu + 3 = \ldots = t_\lambda + \alpha_{\mu+1} + h - 1,\ t_{\mu+1};$$

für $$h = 2, 3 \ldots \alpha_{\lambda+1};$$

und dabei ist $t_\lambda + q$ gleich Null zu setzen, sobald der Index q

die Zahl $\alpha_{\lambda+1}$ überschreitet. Es sind demnach im Ganzen

$$\alpha_{\mu+1}\ (\alpha_{\lambda+1} - \alpha_{\mu+1}) + \tfrac{1}{2}\,\alpha_{\mu+1}\,(\alpha_{\mu+1} - 1)$$

Coefficienten gleich Null.

Andererseits aber findet man

$$t_\lambda + 1,\ t_\mu + h = t_\lambda + q,\ t_\mu + q + h - 1$$

für $h = 1, 2 \ldots \alpha_{\mu+1}$, wenn dabei jedesmal der Index q die Werthe

$$1, 2 \,.\,.\, \alpha_{\mu+1} - h + 1$$

durchläuft; also noch weitere

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha_{\mu+1}\,(\alpha_{\mu+1} + 1) - \alpha_{\mu+1}$$

Gleichungen. Es bleiben demnach nur die $\alpha_{\mu+1}$ Coefficienten

$$t_\lambda + 1,\ t_\mu + q;\quad q = 1, 2, \ldots \alpha_{\mu+1}$$

willkürlich.

Die Coefficienten p_{ik}, welche zur Gruppe $[\lambda, \mu]$; $\lambda \leqq \mu$, $\alpha_\lambda \geqq \alpha_\mu$ gehören, bilden hiernach ein Elementensystem von $\alpha_{\lambda+1}$ Vertical- und $\alpha_{\mu+1}$ Horizontalreihen. Die ersten $\alpha_{\lambda+1} - \alpha_{\mu+1}$ Verticalreihen enthalten nur der Null gleiche Elemente; in den letzten $\alpha_{\mu+1}$ Verticalreihen, die mit den $\alpha_{\mu+1}$ Horizontalreihen ein quadratisches Elementensystem bilden, sind diejenigen Elemente von Null verschieden und unter einander gleich, welche der Hauptdiagonale parallel angeordnet sind. Dies möge durch das Schema

$$\lambda \leqq \mu$$

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_{\mu+1} \end{array}\left\{\begin{array}{cccc|cccccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\alpha_{\lambda+1}-\alpha_{\mu+1}}} & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\alpha_{\mu+1}}} \\ 0 & 0 & . & .\,0 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & . & .\,0 & 0 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & .\,0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{array}\right.$$

kenntlich gemacht sein, in welchem diejenigen Symbole 1, welche der Hauptdiagonale parallel angeordnet sind, jedesmal durch ein und denselben willkürlichen Parameter zu ersetzen sind. Ebenso erhält man für $\lambda \geqq \mu$ die durch das folgende Schema

$$\begin{array}{r l}
 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\alpha_{\lambda+1}} \\
\alpha_{\lambda+1} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{array} \\
\alpha_{\mu+1} - \alpha_{\lambda+1} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{array}
\end{array}$$

angezeigte Vertheilung der Coefficientenwerthe.

Es gehören mithin zur Gruppe $[\lambda, \mu]$, $\lambda \leqq \mu$; $\alpha_\lambda \leqq \alpha_\mu$, genau $\alpha_{\mu+1}$ vollkommen willkürliche Parameter, und dabei durchlaufen die Zahlen λ, μ selbst die Werthe

$$0, 1, 2 \ldots \nu - 1$$

Es entsprechen daher dem Schema der sämmtlichen Gruppen

$$\begin{array}{llll}
[0, 0], & [0, 1] & \ldots [0, \nu - 2], & [0, \nu - 1]; \\
[1, 0], & [1, 1] & \ldots [1, \nu - 2], & [1, \nu - 1]; \\
. & . & \quad . \; . \qquad . & \quad . \\
[\nu - 1, 0], & [\nu - 1, 1] & \ldots [\nu - 1, \nu - 2], & [\nu - 1, \nu - 1],
\end{array}$$

die zugehörigen Anzahlen willkürlicher Parameter

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{k-1}, & \alpha_k; \\
\alpha_2, & \alpha_2, & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{k-1}, & \alpha_k; \\
\alpha_3, & \alpha_3, & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{k-1}, & \alpha_k; \\
. & . & . & . \; . & . & . \\
\alpha_k, & \alpha_k, & \alpha_k & \ldots & \alpha_k, & \alpha_k.
\end{array}$$

deren Summe M_ν sich leicht ermitteln lässt. Führt man nämlich statt der Exponenten der Elementartheiler die Ordnung des grössten gemeinsamen Theilers der 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, . . Unterdeterminantensysteme

$$l_0 \; l_1 \; l_2 \; . \; . \; . \; l_{k-1}$$

ein, so ergiebt sich, zufolge der Gleichungen

$$\alpha_h = l_{h-1} - l_h$$

$$M_\nu = l_0 + 2\,[l_1 + l_2 + \ldots l_{k-1}]$$

sowie man das Schema der α nach Diagonalreihen addirt. Damit ist aber der von Herrn Frobenius gegebene Satz [1]) bewiesen:

Ist in der characteristischen Determinante einer Form der grösste gemeinsame Theiler der Unterdeterminanten $n-k$-Grades vom Grade n_k, so ist

$$\Sigma M_\nu = n + 2\,(n_1 + n_2 + \ldots) = n + 2\,w$$

die Anzahl der linear unabhängigen Formen, die mit der Form vertauschbar sind.

Ich gehe nun zu einer Betrachtung der Determinante der Form P oder p über. Sie zerfällt sofort in das Product der Determinanten der Formen p_i. Hat nun z. B. die Form N_i die Elementartheiler mit den Exponenten

4, 3, 2, 2

so bilde man nach der vorhin [2]) augegebenen Regel das Schema der Coefficienten:

1) a. a. O. S. 29.
2) Seite 292.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Exponent
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,10	1,11	4
2	0	1,1	1,2	1,3	0	1,5	1,6	0	1,8	0	1,10	
3	0	0	1,1	1,2	0	0	1,5	0	0	0	0	
4	0	0	0	1,1	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	5,10	5,11	3
6	0	0	5,2	5,3	0	5,5	5,6	0	5,8	0	5,10	
7	0	0	0	5,2	0	0	5,5	0	0	0	0	
8	0	0	8,3	8,4	0	8,6	8,7	8,8	8,9	8,10	8,11	2
9	0	0	0	8,3	0	0	8,6	0	8,8	0	8,10	
10	0	0	10,3	10,4	0	10,6	10,7	10,8	10,9	10,10	10,11	2
11	0	0	0	10,3	0	0	10,6	0	10,8	0	10,10	
Exponent	4				3			2		2		

dessen Anordnung wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf; jeder Coefficient p_{ik} ist gleich demjenigen vollkommen willkürlichen Parameter, der sich in der Kreuzungsstelle der i^{ten} Vertical- und der k^{ten} Horizontalreihe befindet; gleiche Parameter sind dabei durch gleiche Ziffernpaare bezeichnet. Aus der besonderen Form dieser Determinante ergeben sich folgende Bemerkungen. Dabei mögen von jetzt an die Exponenten der Elementartheiler der characteristischen Function der Form A durch

$$e_0, \; e_1, \; e_2, \; . \; . \; . \; e_k$$

bezeichnet werden.

1) Die Determinante der mit N vertauschbaren Form p enthält der Hauptdiagonale entsprechend das Glied

$$g_0^{e_0} \; g_1^{e_1} \; . \; . \; . \; g_k^{e_k}$$

während in allen anderen Gliedern niedrigere Potenzen der völlig willkürlichen Parameter g vorkommen. Wie man also auch die $2w$ Coefficienten von p wählen mag, die den ungleichen Indices entsprechen, man wird immer die übrigen n unabhängig von diesen und von einander noch so annehmen können, dass diese Determinante nicht verschwindet. Daraus folgt:

Es gibt genau $n + 2w$ mit A vertauschbare linear von einander unabhängige Formen, deren Determinante nicht verschwindet.

2) Die characteristische Function der allgemeinsten mit A vertauschbaren Form P, d. h. derjenigen aus der jede andere durch geeignete Spezialisirung der willkürlichen Parameter abgeleitet werden kann, ist

$$(\varrho - r_0)^{e_0} (\varrho - r_1)^{e_1} \ldots (\varrho - r_k)^{e_k}$$

wo die r_i völlig willkürliche Grössen bedeuten.[1])

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Zerlegung der Determinante Δ der Form p_i in ein Product von Factoren. Sind nämlich die Exponenten der ersten m Elementartheiler von N_i (nach ihrer Grösse geordnet) unter einander gleich und etwa gleich α, so kann man in den ersten $m\alpha^{\text{ten}}$ Horizontalreihen von Δ (man vergleiche das Schema auf Seite 295) die Elemente in allen auf die $m\alpha^{\text{te}}$ Verticalreihe folgenden Verticalreihen, soweit sie zu diesen Horizontalreihen gehören, durch geeignete Subtraction der ersten $m\alpha$ Reihen in Null verwandeln. Demnach tritt aus der Determinante Δ als Factor die Partialdeterminante vom Grade $m\alpha$ heraus, deren Werth durch

$$\begin{vmatrix} 1,1 & 1,a+1 \ldots & 1,(m-1)a+1 \\ a+1,1 & a+1,a+1 \ldots & a+1,(m-1)a+1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ (m-1)a+1,1 & (m-1)a+1,a+1 \ldots & (m-1)a+1,(m-1)a+1 \end{vmatrix}^{\alpha} = \delta^{\alpha}$$

1) Da bei willkürlicher Wahl der Parameter schon die ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function für $\varrho = r_i$ nicht mehr sämmtlich Null sind, so sind die Zahlen e zugleich die Exponenten der Elementartheiler der characteristischen Function von P.

gegeben ist. Mithin ist

$$\triangle = \delta^{a} \triangle_1.$$

Nun überzeugt man sich leicht davon, dass erstens $\triangle_1$ wieder dieselbe Form besitzt wie $\triangle$ selbst, und dass in $\triangle_1$ zweitens diejenigen Elemente bei dem angegebenen Processe der Subtraction unverändert bleiben, aus denen die weiteren aus $\triangle_1$ auszusondernden Factoren zu bilden sind. Sind daher die nächsten m_1 Elementartheilerexponenten alle gleich $\alpha_1 < \alpha$, die m_2 folgenden gleich $\alpha_2 < \alpha_1$ u. s. w., so ergibt sich

$$\triangle = \delta^{a} \delta_1^{a_1} \delta_2^{a_2} \ldots$$

wo nun jedes δ_k eine Determinante m_k. $(m_0 = m)$ - Grades bedeutet, welche m_k willkürliche Wurzeln besitzt, wenn man zur characteristischen Function übergeht. Damit ist aber der genannte Satz erwiesen. [1])

Sind insbesondere die Exponenten der zur Wurzel ϱ_i gehörigen Elementartheiler alle ungleich, so sind alle Determinanten δ vom ersten Grade; d. h. die Determinante der Form p_i ist gleich dem Product der in der Hauptdiagonale stehenden Glieder. Sind andererseits diese Exponenten alle gleich eins, so ist diese Determinante gleich der ersten Potenz einer Determinante von $n_i^2 = \nu^2$ willkürlichen Elementen.

§ 3.

Im Anschluss an die letzten Bemerkungen über die characteristische Function der mit einer Form vertauschbaren Formen gebe ich noch den Beweis eines Satzes, den Herr Frobenius ebenfalls mitgetheilt hat.

---

1) Die Determinante des auf S. 295 angeführten Schema's von Elementen wird so gleich

$$(1,1)^4 \; (5,5)^3 \; [8,8.\ 10,10 - 8,10.\ 10,8]^2$$

da der Exponent 2 zweimal vorkommt.

„Sind die Formen A und B vertauschbar, so können die Wurzeln ihrer characteristischen Gleichungen einander so zugeordnet worden, dass jede Wurzel der characteristischen Gleichung von AB das Product von zwei entsprechenden Wurzeln jener Gleichung ist."

Man hat nämlich identisch

$$(A-\varrho E)(B-\sigma E)+\varrho(B-\sigma E)+\sigma(A-\varrho E)=AB-\varrho\sigma E,$$

und hieraus, wenn die Formen A und B vertauschbar sind

$$1)\quad (AB-\varrho\sigma E)^{-1}\left[E+\varrho(A-\varrho E)^{-1}+\sigma(B-\sigma E)^{-1}\right] = (B-\sigma E)^{-1}(A-\varrho E)^{-1}$$

Man bezeichne nun die Determinante

$$|A-\varrho E|$$

durch $|A|$, und setze

$$(A-\varrho E)^{-1}=\frac{\alpha}{|A|}=\frac{\alpha_0}{|A_0|};$$

der Index 0 soll ausdrücken, dass alle $|A|$ mit ihren sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von gemeinsamen Factoren entfernt sind. Demnach ist $|A^0|$ vom Grade $n-a$ in ϱ; α_0 eine Form, deren Coefficienten ϱ höchstens im Grade $n-a-1$ enthalten. Ebenso mögen die Bezeichnungen

$$(B-\sigma E)^{-1}=\frac{\beta_0}{|B_0|};\quad (C-\tau E)^{-1}=\frac{\gamma_0}{|C_0|}$$

gelten, wobei

$$AB=C,\ \varrho\sigma=\tau$$

zu nehmen ist, also $|B_0|$ und $|C_0|$ Functionen $n-b$. resp. $n-c$. Grades in σ, τ sind.

Man setze nun A als willkürlich voraus, B jedoch zunächst so, dass keine der Wurzeln der characteristischen Function von B verschwindet. Hat alsdann $|C-\tau E|$ eine Wurzel $\tau=0$, so muss auch $|A-\varrho E|$ für $\varrho=0$ verschwinden. Ist aber τ_i eine nicht verschwindende Wurzel, σ_j irgend eine der Wurzeln von $|B|$, und setzt man

$$\frac{\tau_i}{\sigma_j} = \varrho_j,$$

so verschwinden in der aus 1) folgenden Gleichung

$$2) \gamma_0 |A_0| |B_0| + \varrho (\alpha_0 \gamma_0) |B_0| + \sigma (\beta_0 \gamma_0) |A_0| = |C_0| (\alpha_0 \beta_0)$$

die beiden Determinanten $|C_0|$ und $|B_0|$, also muss auch

$$(\beta_0 \gamma_0) |A_0|$$

Null sein. Nun kann die Form $(\beta_0 \gamma_0)$ nicht bei beliebigem σ verschwinden. Denn die Determinante $|B|$ verschwindet überhaupt nicht identisch, also auch nicht die Determinante der Coefficienten von β_0. Daher könnte diese Form nur dann verschwinden, wenn alle Coefficienten von γ_0 für $\tau = \tau_i$ Null wären, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun jene Form der Bezug auf σ höchstens vom Grade $n - b - 1$ ist, während $|B_0|$ für $n - b$ Wurzelwerthe verschwindet, so muss mindestens für einen Wurzelwerth σ_{j0} auch $|A_0|$ verschwinden, d. h. es ist

$$\tau_i = \sigma_{j0} \varrho_{j0},$$

wo σ_{j0}, ϱ_{j0} entsprechende Wurzeln der zu den vertauschbaren Formen A und B gehörigen characteristischen Functionen sind. Hat demnach $|A|$ nur verschwindende Wurzeln, so kann auch $|C|$ nur verschwindende Wurzeln haben, wie auch B gewählt sein mag.

Aus bekannten Ueberlegungen aber geht endlich hervor, dass, wenn die Parameter in B irgendwie specialisirt werden, die nachgewiesene Beziehung zwischen den Wurzeln von $|A|$, $|B|$, $|C|$ erhalten bleiben muss.

Diese Betrachtung gestattet indessen nicht unmittelbar einen Schluss auf die Vielfachheit, in welcher die Wurzeln von $|C|$ auftreten. Letztere ergiebt sich indessen leicht aus den Bemerkungen des § 2).

Es sei B die allgemeinste mit A vertauschbare Form.

Dann hat die characteristische Function von B, wie gezeigt, die Wurzelfactoren

$$(\varrho - r_0)^{e_0} (\varrho - r_1)^{e_1} \dots (\varrho - r_k)^{e_k}$$

während die characteristische Function von A aus den Factoren

$$(\varrho - \varrho_0)^{e_0} (\varrho - \varrho_1)^{e_1} \dots (\varrho - \varrho_k)^{e_k}$$

besteht. Und die characteristische Function von $AB = C$ besitzt dann die Wurzelfactoren

$$(\tau - \tau_0)^{e_0} (\tau - \tau_1)^{e_1} \dots (\tau - \tau_k)^{e_k},$$

wo allgemein

$$\tau_i = \varrho_i r_i$$

zu setzen ist. Aus diesem Satze kann man durch Specialisirung der Form B leicht für jeden vorliegenden Fall die vervollständigte Ausdrucksweise herleiten, welche dem Theorem von Herrn Frobenius gegeben werden kann.

Der Beweis dieses letzteren Satzes beruht auf der Bemerkung, dass wenn B mit A vertauschbar ist, auch AB mit A vertauschbar ist. Die Determinante von AB hat daher dieselbe Anordnung wie die in § 2 characterisirte, und man überzeugt sich leicht, dass auch die Wurzeln der characteristischen Function dabei in der angegebenen Weise gepaart werden.