Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion.

Von G. Szegö.

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung am 5. Februar 1927.

Es sei C eine Jordansche Kurve und $F(z)$ eine innerhalb von C und auf C reguläre analytische Funktion. Nach einem Satze von Runge läßt sich $F(z)$ in C gleichmäßig durch Polynome approximieren[1]).

Dieser Satz kann bekanntlich folgendermaßen verschärft werden: Es gibt zwei Zahlen M und R, $M > 0$, $R > 1$, ferner eine Folge von Polynomen

$$V_0(z),\ V_1(z),\ V_2(z),\ \ldots,\ V_n(z),\ \ldots$$

wobei $V_n(z)$ vom Grade n ist[2]), derart, daß in C

$$|F(z) - V_n(z)| \leq \frac{M}{R^n}$$

gilt[3]).

Diese Verschärfung des Rungeschen Satzes wird gewöhnlich mit Hilfe von bekannten speziellen Polynomen, die der Kurve C zugeordnet sind, bewiesen; es werden dabei gewisse Eigenschaften dieser Polynome benutzt, die die Kenntnis der Funktion voraussetzen, welche das Äußere von C schlicht auf ein Kreisgebiet abbildet[4]). Es dürfte nun die Bemerkung nicht ohne prinzipielles

[1]) C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen [Acta Mathematica, Bd. 6 (1885), S. 229—244].

[2]) Dies soll heißen, daß der genaue Grad von $V_n(z)$ höchstens n ist.

[3]) Man kann für R eine nur von der Kurve C abhängige Zahl wählen.

[4]) Vgl. die in diesen Sitzungsberichten kürzlich erschienene Arbeit des Herrn J. L. Walsh, Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion [Jahrgang 1926, S. 223—229], welche den Anlaß zu der vorliegenden Note gab.

Interesse sein, daß man diesen Satz — ähnlich wie den Rungeschen — rein elementar, namentlich ohne Heranziehung der Theorie der schlichten Abbildungen beweisen kann.

Man schließt einfach so. Es sei C' eine rektifizierbare Jordansche Kurve, welche C ganz in ihrem Innern enthält; ferner sei C' so gewählt, daß $F(z)$ im Innern von C' und auf C' regulär ist. Man teile C' in k Bogen J_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ ein, derart, daß die Änderung von $\frac{1}{\zeta - z}$ (ζ durchläuft C' und z liegt im abgeschlossenen Innern von C) auf jedem Bogen J_ν für jedes z kleiner als $\frac{1}{4D}$ ist (D bedeutet den Durchmesser von C'). Man wähle auf jedem J_ν einen Punkt ζ_ν und bestimme nach Runge ein Polynom $p_\nu(z)$ derart, daß

$$\left| \frac{1}{\zeta_\nu - z} - p_\nu(z) \right| < \frac{1}{4D}$$

sei. Dann ist

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - p_\nu(z) \right| < \frac{1}{2D}, \quad \text{d. h.} \quad |1 - (\zeta - z)\, p_\nu(z)| < \frac{1}{2},$$

wenn ζ auf J_ν liegt.

Ich betrachte nun die Polynome

$$Q_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{k} \int_{J_\nu} \frac{1 - [1 - (\zeta - z)\, p_\nu(z)]^m}{\zeta - z} F(\zeta)\, d\zeta$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei z im Innern von C oder auf C selbst liegt. Es ist

$$|Q_m(z) - F(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=}^{k} \int_{\nu} \frac{|1 - (\zeta - z)\, p\,(z)|^m}{|\zeta - z|} |F(\zeta)|\, |d\zeta|$$

$$< \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| < \frac{L}{2^m}.$$

Die Konstante L hängt hier nur von C, C' und $F(z)$ ab. Es ist ferner $|F(z)| < L$, so daß die obige Ungleichung auch für $m = 0$ gilt, wenn man unter $Q_0(z)$ die Zahl Null versteht. Bezeichnet $\lambda - 1$ den Höchstgrad der Polynome $p_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, so ist $Q_m(z)$ vom Grad $\lambda m - 1 < \lambda m$.

Wir setzen nun

$$V_n(z) = Q_{\left[\frac{n}{\lambda}\right]}(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann ist

$$|V_n(z) - F(z)| < \frac{L}{2^{\left[\frac{n}{\lambda}\right]}} < \frac{2L}{2^{\frac{n}{\lambda}}} = \frac{M}{R^n},$$

wo $M = 2L$ von C, C' und $F(z)$, dagegen $R = 2^{\frac{1}{\lambda}}$ nur von C und C' abhängt.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Königsberg, Januar 1927.