Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über Isogonalität von Flächen.

Von **Josephine Kapfer.**

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 16. Januar 1926.

Im Folgenden wird das Problem der isogonalen Flächen behandelt. Soweit der Verfasserin bekannt ist, wurden bis jetzt — in einer großen Reihe von Abhandlungen — nur die orthogonalen Flächen erörtert und zwar vorwiegend in dreifacher Art: in Verbindung mit der Aufgabe der Bestimmung dreifach orthogonaler Flächensysteme, bei Behandlung der Untersuchung der Zentraflächen und bei Lösung des Problems der unendlich kleinen Deformation von Flächen.

Die Arbeit ist im wesentlichen die Übertragung der in meiner Dissertation[1]) ausgeführten Theorie isogonaler Raumkurven auf die Geometrie der Flächen.

Zunächst wird die Definition isogonaler Flächen aufgestellt und der Zusammenhang der Isogonalität von Flächennormalen mit dem Problem der Flächenäquivalenz nachgewiesen. Der Hauptteil der Arbeit ist gegeben durch die Behandlung des Problems von Transon für die Darstellung der Fläche in Parameterform, d. i. die Ermittlung der Flächen, von welchen das Linienelement ihrer sphärischen Abbildung bekannt ist, und zwar durch Aufstellung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der die Bestimmung dieser Flächen abhängt. Als Beispiel für die Anwendung der dargelegten Theorie werden isogonal-isometrische Flächen und isogonale Flächen, deren Normalen sich in Punkten der einen dieser Flächen schneiden, behandelt. Die letzteren Ausführungen können als eine Übertragung der Evolutoidentheorie auf die Geometrie der Flächen, bzw. als Verallgemeinerung der Theorie der Zentraflächen gedeutet werden.

[1]) Mémoires de la faculté des sciences de l'université de Lithuanie 1923, Über Paare von isogonalen isometrischen Kurven.

§ 1.

Aufstellung des Problems — Lösung.

Definition: Zwei Flächen S und S_1, die sich punktweise so zugeordnet sind, daß die Normalen (bzw. die Tangentialebenen) in den korrespondierenden Punkten, d. i. Punkten mit denselben Parameterwerten, den konstanten Winkel ω einschließen, bilden ein Paar von isogonalen Flächen.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte P einer Fläche S, u und v, die beiden unabhängigen Variablen, ihre Parameter.

S kann analytisch bestimmt sein:

a) durch eine Gleichung zwischen den drei rechtwinkligen Punktkoordinaten des Raumes:
   in impliziter Form: $F(x, y, z) = 0$,
   in expliziter Form: $z = f(x, y)$;

b) mittels der Parameter u und v:
$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v).$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen F, bzw. f, f_1, f_2, f_3 — wenigstens in einem gewissen Bereich — stetig und differentiierbar sein sollen.

Mit ds; X, Y, Z; E, F, G; e, f, g; L, M, N;
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \quad H$$
seien der Reihe nach das Bogenelement der Fläche; die Richtungskosinus der Flächennormalen; die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die Fläche; für das sphärische Bild derselben; die Fundamentalgrößen 2. Ordnung für die Fläche (in der Bezeichnung von Scheffers); das Gaußsche Krümmungsmaß und die mittlere Krümmung von S bezeichnet. Für die Fläche S_1 haben dieselben Bezeichnungen mit dem Index 1 analoge Bedeutung. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \mathsf{A}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathsf{B}\frac{\partial X}{\partial v} - eX, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \mathsf{C}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathsf{D}\frac{\partial X}{\partial v} - fX,$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \mathsf{E}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathsf{F}\frac{\partial X}{\partial v} - gX$$

nebst analogen, welche man erhält, indem man X durch Y bzw. Z ersetzt. Die mit 2Δ multiplizierten Koeffizienten dieser Gleichungen haben die folgenden Werte:

$$2\Delta\mathsf{A} = g\frac{\partial e}{\partial u} - 2f\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial e}{\partial v}, \quad 2\Delta\mathsf{B} = -f\frac{\partial e}{\partial u} + 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$2\Delta\mathsf{C} = g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u}, \quad 2\Delta\mathsf{D} = -f\frac{\partial e}{\partial v} + e\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$2\Delta\mathsf{E} = 2g\frac{\partial f}{\partial v} - g\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial g}{\partial v}, \quad 2\Delta\mathsf{F} = -2f\frac{\partial f}{\partial v} + f\frac{\partial g}{\partial u} + e\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\Delta = eg - f^2.^{1})$$

Der obigen Definition isogonaler Flächen entspricht als Bedingungsgleichung für ein Paar derselben die Beziehung:

$$(1) \qquad XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = \cos\omega = \text{konstant} = k.$$

In liniengeometrischer Deutung lautet das Problem folgendermaßen:

Gegeben sind die ∞^2 Normalen einer Fläche S. Die Gesamtheit der mit ihnen den Winkel ω einschließenden Geraden bildet eine Menge von ∞^1 Geradenkomplexen [d. i. durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 Gerade], die sich in ∞^3 Drehkegeln anordnen, deren Öffnungswinkel konstant der Winkel ω ist, deren Spitzen die Punkte der ∞^2 Normalen von S und deren Achsen diese Normalen sind. Die Gesamtheit der Mantellinien dieser ∞^3 Kegel ist darzustellen als Normalenkongruenzen von Flächen S_1.

Für die Lösung des Problems, die Flächen zu bestimmen, deren Normalen mit jenen der Fläche S konstant den Winkel ω einschließen und durch die Punkte dieser Fläche, in diesem Falle also zugleich Schnittpunkte entsprechender Normalen, gehen, vereinfacht sich die Aufgabe zu folgender: der Komplex der Mantellinien von ∞^2 Drehkegeln, deren Spitzen die Punkte der Fläche S und deren Achsen die Normalen dieser

[1]) Diese Formeln mußten hier angeführt werden, weil auf dieselben in S. 72—73 Bezug genommen wird.

Vgl. C. Guichard, Surfaces, rapportées à leurs lignes asymptotiques. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Paris 1889, 6. Bd., S. 336, Gl. (4) und (5). L. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin 1910. S. 123.

Fläche sind, ist in Normalenkongruenzen von Flächen S_1 anzuordnen[1]).

Die Lösung der Gleichung (1), d. h. die analytische Darstellung der gesuchten Fläche S_1 in Funktionen von unabhängigen Veränderlichen erfordert ein Zweifaches:

1. die Berechnung der Richtungskosinus der Flächennormalen von S_1, d. h. die Ermittlung des Linienelementes des sphärischen Bildes der Fläche S_1;

2. die Bestimmung der Fläche S_1 aus der Richtung ihrer Normalen, d. h. die Angabe aller Flächen mit gleichem Linienelement in der sphärischen Abbildung.

ad 1. Die Gleichung (1) kann ersetzt werden durch das System der drei Gleichungen:

$$X_1 = kX + \sqrt{1-k^2}\,\mathfrak{X}, \qquad Y_1 = kY + \sqrt{1-k^2}\,\mathfrak{Y},$$

$$Z_1 = kZ + \sqrt{1-k^2}\,\mathfrak{Z}.^2) \tag{1a}$$

Dabei sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Richtungskosinus einer zur Flächennormalen von S senkrechten Geraden, also einer der ∞^1 Tangenten an die Fläche im Punkte P. Die Auswahl einer derselben, demnach die Fortschreitungsrichtung auf S, ist bestimmend für die Richtung der Flächennormalen von S_1.

Die Gleichungen (1a) sind der analytische Ausdruck für die Darstellung des sphärischen Bildes Σ_1 der Fläche S_1 mit den Punkten X_1, Y_1, Z_1. Diese Feststellung leitet zu folgender geometrischen Deutung der vorstehenden drei Gleichungen:

Man zieht durch den Koordinatenanfangspunkt O als Mittelpunkt der Kugel vom Radius 1 den zur Flächennormalen von S in P parallelen Radius, dessen Schnittpunkt mit der Kugelfläche die Koordinaten X, Y, Z hat, ferner den zur Geraden mit den Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ parallelen Radius, welcher die Sphäre

---

[1]) Vgl. hiezu S. 78–80.

[2]) Über die Herleitung dieser Gleichungen vgl. meine Dissertation a. d. Techn. Hochschule München, 1923: „Über gewisse Paare von isogonalen isometrischen Kurven", S. 5–9. Der Bedingung der Isometrie dortselbst entspricht hier die Berücksichtigung der Beziehung, daß: $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = 1$.

in dem Punkt mit den Koordinaten X, Y, Z trifft, trägt auf dem ersten Radius das $k = \cos\omega$ fache seiner Länge (der Einheit), auf dem zweiten das $\sqrt{1-k^2} = \sin\omega$ fache derselben Strecke ab und zieht in der Ebene des durch die beiden Radien bestimmten Größtkreises der Kugel durch O den Radius parallel zur Verbindungsstrecke der auf die angegebene Weise erhaltenen Punkte auf den beiden ersten Radien. Sein Schnittpunkt mit der Kugel ist das sphärische Bild des dem Punkte P von S auf der Fläche S_1 entsprechenden Punktes P_1. Die Richtung der Normalen von S_1 ist sonach parallel der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das in der Ebene liegt, welches die Flächennormale von S und die hiezu senkrechte Gerade mit den Richtungskosinus X, Y, Z bestimmen, dessen eine Kathete in Richtung dieser ersten Geraden die Länge k, dessen zweite Kathete in Richtung jener zweiten Geraden die Länge $\sqrt{1-k^2}$ besitzt und für welches die von der Hypotenuse und den Katheten eingeschlossenen Winkel ω, bzw. $90^0 - \omega$ betragen.

Die Richtungskosinus einer bestimmten, zur Flächennormalen von S senkrechten Geraden werden folgendermaßen bestimmt:

a) Mit Hilfe einer Differentialgleichung:

Wir stellen die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung auf:

$$X\frac{\partial z_1}{\partial x} + Y\frac{\partial z_1}{\partial y} - Z = 0, \quad \text{bzw.} \quad X\frac{\partial q}{\partial u} + Y\frac{\partial q}{\partial v} - Z = 0.$$

Dabei wird die Richtung der Flächennormalen von S als Richtung der Tangenten einer Fläche $z_1 = f_1(x, y)$ bzw. $q = q(u, v)$ betrachtet, deren Normalenrichtung dann bestimmt ist durch

$$\frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}}$$

bzw. durch

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Durch Annahme einer willkürlichen Funktion erhält man in einem allgemeinen Integral dieser Gleichung eine Fläche, deren Normalenrichtung eine der gesuchten Lösungen darstellt.

Ist die Fläche S in Parameterdarstellung gegeben, so sind 4 zur Flächennormalen senkrechte Richtungen bekannt, nämlich die Richtung der Tangenten der Parameterkurven $u =$ konst., $v =$ konst. und der zu diesen jeweils senkrechten Flächentangenten, d. i.

$$\begin{array}{llll} 1) \pm \frac{x_u}{\sqrt{E}} & 2) \pm \frac{x_v}{\sqrt{G}} & 3) \pm \frac{Yz_u - Zy_u}{\sqrt{E}} = \pm \frac{Ex_v - Fx_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}} \\ \pm \frac{y_u}{\sqrt{E}} & \pm \frac{y_v}{\sqrt{G}} & \pm \frac{Zx_u - Xz_u}{\sqrt{E}} = \pm \frac{Ey_v - Fy_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}} \\ \pm \frac{z_u}{\sqrt{E}} & \pm \frac{z_v}{\sqrt{G}} & \pm \frac{Xy_u - Yx_u}{\sqrt{E}} = \pm \frac{Ez_v - Fz_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4) \pm \frac{Yz_v - Zy_v}{\sqrt{G}} = \pm \frac{Fx_v - Gx_u}{\sqrt{G}\sqrt{EG-F^2}} \\ \pm \frac{Zx_v - Xz_v}{\sqrt{G}} = \pm \frac{Fy_v - Gy_u}{\sqrt{G}\sqrt{EG-F^2}} \\ \pm \frac{Xy_v - Yx_v}{\sqrt{G}} = \pm \frac{Fz_v - Gz_u}{\sqrt{G}\sqrt{EG-F^2}}. \end{array}$$ [1])

b) Algebraisch:

Man wählt eine der drei Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ willkürlich (etwa $\mathfrak{X} = \lambda$) und berechnet dann die beiden andern ($\mathfrak{Y}$), $\mathfrak{Z}$) aus den zwei Gleichungen:

$$\lambda^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = 1, \qquad \lambda X + \mathfrak{Y} Y + \mathfrak{Z} Z = 0.$$

[1]) Die der Funktionsbezeichnung beigefügten Indices u und v bedeuten die partielle Differentiation nach u bzw. v.

ad 2. Es gilt nun, aus den Funktionen X_1, Y_1, Z_1, welche eine Geradenrichtung bestimmen, die Fläche S_1 abzuleiten, für welche jene Geraden Normalen sind. Dies ist eine Weiterführung des Problems von Transon:[1]) Gerade im Raume, welche jeweils durch ihre Richtung und einen ihrer Punkte bestimmt sind, in Normalen von Flächen anzuordnen.

Transon löste diese Aufgabe für die Flächendarstellung $F(x, y, z) = 0$ mit dem Nachweis, daß, welches auch die Funktionen X_1, Y_1, Z_1 seien, es immer eine Unendlichkeit von Arten gibt, die durch X_1, Y_1, Z_1 in ihrer Richtung definierten Geraden, d. h. die dadurch gegebene Gesamtheit der Geraden eines Komplexes, in Gruppen, normal verschiedenen Flächen, zu verteilen, dermaßen, daß selbst in dem Falle, wo die Gleichung:

$$X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz = 0$$

integrabel ist, die Flächen, welche unter ihrem allgemeinen Integral verstanden sind, für eine solche Anordnung nur eine sehr spezielle Art in einer Unendlichkeit von anderen, welche gleicherweise möglich sind, bedeuten.

Es sei P der Punkt, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y, z sind. (Unsere Ausgangsfläche S, deren Punkte $P(x, y, z)$ der Gleichung genügen: $F(x, y, z) = 0$, ist, wofür eben Transon den Nachweis erbringt, nur ein spezieller Fall in einer Unendlichkeit der möglichen Lösungen: $F(x, y, z) = 0$.) Die Winkel der durch ihn gehenden Geraden mit den Koordinatenachsen haben als Kosinus die durch die Gleichungen (1 a) gegebenen Funktionen X_1, Y_1, Z_1; auf diese Geraden trage ich, ausgehend vom Punkte P, eine variable Länge $r = PP_1$ ab und nenne x_1, y_1, z_1 die kartesischen Koordinaten des Punktes P_1, so daß sich ergibt:

$$(2) \qquad x_1 = x + rX_1 \qquad y_1 = y + rY_1 \qquad z_1 = z + rZ_1.$$

Transon zeigt, wie man auf eine Unendlichkeit von Arten eine Fläche S, Ort der Punkte P, und eine Funktion r von x, y, z derart bestimmen kann, daß die Geraden PP_1 Normalen der Fläche S_1, des Ortes der Punkte P_1, seien.

[1]) Transon, Abel: Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi continue. J. de l'Ecole Polyt. Paris 1861. Bd. 22, H. 38, S. 195 ff.

Dieser letztere Umstand ist ausgedrückt in der Beziehung:

$$X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1 = 0,$$

in welcher man dx_1, dy_1, dz_1 durch die Werte, welche sich aus den Gleichungen (2) ableiten, ersetzen kann.

Mit Hilfe dieser Substitution und unter Berücksichtigung der Bedingung: $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$

ergibt sich die Gleichung:

$$\left(X_1 + \frac{\partial r}{\partial x}\right)dx + \left(Y_1 + \frac{\partial r}{\partial y}\right)dy + \left(Z_1 + \frac{\partial r}{\partial z}\right)dz = 0,$$

eine totale Differentialgleichung, deren Integrabilitätsbedingung gegeben ist durch die Beziehung:

$$(3)\quad \left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial z} + \Theta = 0;$$

dabei ist Θ dargestellt durch die folgende Funktion:

$$X_1\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right) + Y_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z}\right) + Z_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right).$$

Die Gleichung (3) ist eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der unbekannten Funktion r, ergibt also, und zwar ohne eine einschränkende Bedingung, ein allgemeines Integral, dargestellt durch eine Gleichung zwischen x, y, z und r mit einer willkürlichen Funktion. Gibt man dieser eine bestimmte Form, so führt die Gleichung notwendig zu einem allgemeinen Integral mit willkürlicher Konstanten, d. h. einem Integral, das eine Serie von Flächen S, Ort der Punkte P, in sich schließt. Jeder dieser Flächen S entspricht eine andere, S_1, Ort der Punkte P_1, und es ist demnach mit jeder Form, welche der willkürlichen Funktion, eingeschlossen in dem Integral der Schlußgleichung (3), zugeschrieben wird, ein besonderer Modus der Verteilung aller gegebenen Geraden in Gruppen, rechtwinklig einer Serie von Flächen S_1, bestimmt[1]).

[1]) Meist behandeln die Lehrbücher über Differentialgeometrie das Problem einer Anordnung von Geraden in Flächennormalen als in seiner Lösung bedingt durch die Integrabilität der Gleichung:

$$X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz = 0,$$

Für die Darstellung der Flächen in Parameterform ist das Problem, aus Geradenrichtungen analytisch eine Fläche zu bestimmen, für welche jene Geraden Normalen sind, von Guichard[1]), doch nur für den speziellen Fall gelöst, daß die Parameterkurven $u =$ konst., $v =$ konst. der Fläche S_1 ihre Asymptotenlinien sind.

Ich leite nun die Gleichung ab, welche ermöglicht, aus der Angabe einzig der Geradenrichtung in Funktionen der Variablen u und v die Fläche zu bestimmen, deren Normalen Gerade dieser Richtung sind, d. h. ich bestimme eine Fläche aus dem durch die Gleichungen (1a) S. 66 gegebenen Liniinienelement ihres sphärischen Bildes — ohne irgendwelche weitere Voraussetzung[2]), z. B. über die Wahl der Parameterkurven. In der Lösung dieser Aufgabe ist dann zugleich die Ermittlung der zur Fläche S isogonalen Flächen S_1 in Funktionen zweier Unabhängigen und zwar durch Verwendung

---

also geknüpft an die Voraussetzung, daß:

$$\Theta = 0.$$

Diese Forderung erweckt den Anschein, als führte die Art der Funktionen X_1, Y_1, Z_1, demnach ein geometrischer Umstand, welcher die Gesamtheit der gegebenen Geraden charakterisiert, die Integrabilität jener Gleichung herbei. Vgl. G. Scheffers, Theorie der Flächen. Leipzig, 1902, S. 168, 469 bis 475; L. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig, 1910, S. 274—275, S. 312; W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1921, S. 69/71. Die Möglichkeit der unendlichen Vielfältigkeit einer Verteilung der Geraden in Normalenkongruenzen, d. h. die Tatsache der Zulässigkeit einer Unendlichkeit von Flächen S_1 als Ort der Geradenpunkte P_1 und die Unabhängigkeit dieser Geradenanordnung von der Art der Funktionen X_1, Y_1, Z_1 bleiben meist unerwähnt. Vgl. dagegen G. Darboux, Sur les . . . surfaces normales aux droites d'un complexe. Comptes rendus, Bd. 149, Nr. 20, S. 818—821 und Nr. 21, S. 885—890. E. Turrière, Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné. Annales de la Faculté des Sciences. Toulouse, 2. Bd., 1910, S. 143—223.

[1]) C. Guichard, Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables, S. 337 ff.

[2]) Vgl. dazu die Arbeiten von G. Sannia in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1911 und 1912, Math. Annalen 1909. K. Kommerell, Strahlensysteme und Minimalflächen, Math. Annalen 1910, 70. Bd., S. 143 ff. Zindler, Math. Annalen 1917, S. 446. L. Rossi, Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen. Monatshefte f. Math. u. Phys. 1911, 22. Bd., S. 683 ff.

des Transonschen Problems in der allgemeinsten Form, für diese besondere Flächendarstellung, gegeben.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gerade mit den Richtungskosinus X_1, Y_1, Z_1, $\mathfrak{P}$ ein Punkt derselben mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ, ϱ die variable Länge $\mathfrak{P}P_1$ auf der Geraden $\mathfrak{G}$. Dann ergeben sich die kartesischen Koordinaten der Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ der Fläche S_1 zu:

$$(4) \qquad x_1 = \xi + \varrho X_1, \quad y_1 = \eta + \varrho Y_1, \quad z = \zeta + \varrho Z_1.$$

Alle diese Größen seien vorausgesetzt als ausgedrückt in Funktionen zweier Variablen u und v. Demnach ist:

$$x_{1u} = \xi_u + \varrho X_{1u} + \varrho_u X_1, \quad x_{1v} = \xi_v + \varrho X_{1v} + \varrho_v X_1,$$

welchen Gleichungen die analogen Formeln für y_1 und z_1 hinzuzufügen sind, die man erhält, indem man ξ durch η bzw. ζ, X_1 durch Y_1 bzw. Z_1 ersetzt. Da die Beziehungen gelten:

$$x_{1u} X_1 + y_{1u} Y_1 + z_{1u} Z_1 = 0, \quad x_{1v} X_1 + y_{1v} Y_1 + z_{1v} Z_1 = 0,$$

so folgt, unter Berücksichtigung der Relationen:

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1,$$

$$X_1 X_{1u} + Y_1 Y_{1u} + Z_1 Z_{1u} = 0, \quad X_1 X_{1v} + Y_1 Y_{1v} + Z_1 Z_{1v} = 0,$$

dass: $$\varrho_u = -\Sigma \xi_u X_1, \quad \varrho_v = -\Sigma \xi_v X_1.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir substituieren:

$$\xi_u = -\varrho_u X_1 + U X_{1v}, \quad \xi_v = -\varrho_v X_1 + V X_{1u},$$

woraus folgt:

$$(5) \qquad x_{1u} = \varrho X_{1u} + U X_{1v}, \quad x_{1v} = V X_{1u} + \varrho X_{1v}$$

und die analogen Formeln für y und z.

Dabei bezeichnen U und V noch unbekannte Funktionen von u und v.

Differentiieren wir die erste der Gleichungen (5) nach v, die zweite nach u und ersetzen in den erhaltenen Resultaten die zweiten Ableitungen von X_1 durch die Werte, welche die Guichardschen Gleichungen[1]) hiefür liefern, so finden wir:

---

[1]) Vgl. Guichard, a. a. O., S. 336, Formeln (4) und (5), ferner v. S. 64 und 65.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = X_{1u} U \cdot \mathsf{E} + X_{1v}(-\varrho_u + U_v + U \cdot \mathsf{F}) + X_1(-\varrho_{uv} - Ug),$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u} = X_{1u}(-\varrho_v + V_u + V\mathsf{A}) + X_{1v} \cdot V \cdot \mathsf{B} + X_1(-\varrho_{vu} - Ve).$$

Diese beiden Ausdrücke müssen identisch sein. Durch zyklische Vertauschung von ξ mit η, ζ, bzw. X_1 mit Y_1, Z_1 erhält man Gleichungen, für welche die Koeffizienten von X_1, X_{1u}, X_{1v}, bzw. Y_1, Y_{1u}, Y_{1v}; Z_1, Z_{1u}, Z_{1v} gleich sind, so daß sich der Schluß ergibt, daß diese Koeffizienten von je zwei der so erhaltenen 6 Gleichungen einander gleich zu setzen sind. Man erhält demnach folgende drei Formeln:

$$(6) \qquad \varrho_v = V_u + V\mathsf{A} - U \cdot \mathsf{E}, \quad \varrho_u = U_v + U\mathsf{F} - V \cdot \mathsf{B}, \quad eV = gU.$$

Die letzte dieser Gleichungen gestattet zu setzen:

$$(7) \qquad U = h \cdot e, \qquad V = hg.$$

Substituieren wir diese Werte in den beiden ersten Gleichungen (6) und entwickeln diese unter Berücksichtigung der Guichardschen Formeln, so erhalten wir nach einiger Umformung:

$$\varrho_v = \frac{\partial h}{\partial u} g + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot h + \frac{h}{2\Delta}\left(g\frac{\partial \Delta}{\partial u} + f\frac{\partial \Delta}{\partial v} - 2f_v \cdot \Delta\right),$$

$$\varrho_u = \frac{\partial h}{\partial v} e + \frac{\partial e}{\partial v} \cdot h + \frac{h}{2\Delta}\left(e\frac{\partial \Delta}{\partial v} + f\frac{\partial \Delta}{\partial u} - 2f_u \cdot \Delta\right).$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen nach u, die zweite nach v, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} g + 2\frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + h\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} +$$

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial u}(g\Delta_u + f\Delta_v - 2f_v\Delta) + h(g_u\Delta_u + g\Delta_{uu} + f_u\Delta_v + f\Delta_{uv} - 2f_{uv}\cdot\Delta - 2f_v\cdot\Delta_u)}{2\Delta}$$

$$- \frac{h \cdot \Delta_u(g\Delta_u + f\Delta_v - 2f_v\Delta)}{2\Delta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \cdot e + 2\frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial e}{\partial v} + h\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} +$$

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial v}(e\Delta_v + f\Delta_u - 2f_u\cdot\Delta) + h(e_v\Delta_v + e\Delta_{vv} + f_v\Delta_u + f\Delta_{uv} - 2f_{uv}\cdot\Delta - 2f_u\cdot\Delta_v)}{2\Delta}$$

$$- \frac{h\Delta_v(e\Delta_v + f\Delta_u - 2f_u\cdot\Delta)}{2\Delta^2}.$$

Diese zwei Ausdrücke müssen identisch sein; sonach ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} g - \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} e + \frac{\partial h}{\partial u}\left(2 g_u - f_v + \frac{g A_u + f A_v}{2 A}\right) - \frac{\partial h}{\partial v}\left(2 e_v - f_u + \frac{e A_v + f A_u}{2 A}\right)$$
$$+ h\left(g_{uu} - e_{vv} + \frac{g_u A_u + g A_{uu} - e_v A_v - e A_{vv} + f_u A_v - f_v A_u}{2 A} - \frac{g A_u^2 - e A_v^2}{2 A^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Um h zu ermitteln, muß man also die partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (8) lösen. Hierauf bestimmt man U und V (Gl. 7), erhält dann aus Gleichung (6) ϱ und aus den Gleichungen (5) schließlich x durch Quadraturen.

Man sieht also: Sind ∞^3 Gerade im Raume (d. i. 1 Gerade durch jeden Punkt des Raumes) durch ihre Richtungskosinus, ausgedrückt in Funktionen zweier Variablen u und v, gegeben, so ist es, um aus ihnen die Normalenkongruenzen von Flächen —, von welchen das Linienelement der sphärischen Abbildung sonach bekannt ist —, zu ermitteln, nötig, eine partielle lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zu integrieren. Das Problem wird alsdann vollständig durch eine Folge von Quadraturen gelöst. Auf diese Weise werden also alle Flächen S_1 mit gleichem Linienelement im sphärischen Bilde erhalten.

Bei Wahl des konstanten Winkels ω zu $\pi/2$ kann man insbesondere alle jene Flächen bestimmen, deren Normalen mit jenen der Fläche S in korrespondierenden Punkten zwar rechte Winkel bilden, doch dieselben nicht notwendig in Punkten der gegebenen Fläche schneiden müssen. Es stellen also für diesen Fall die vorangegangenen Ausführungen zugleich eine Umdeutung des Problems orthogonaler Flächen (Orthogonalität der Tangentialebenen, bzw. Normalen) dar.

Die Größen ϱ, U und V stehen zueinander in charakteristischer Beziehung, wie sich aus folgender Überlegung ergibt:

Es ist:

$$E_1 = \Sigma x_{1u}^2 = \varrho^2 e_1 + 2\varrho U f_1 + U^2 g_1,$$
$$F_1 = \Sigma x_{1u} x_{1v} = \varrho^2 f_1 + \varrho(U g_1 + V e_1) + U V f_1,$$
$$G_1 = \Sigma x_{1v}^2 = \varrho^2 g_1 + 2\varrho V f_1 + V^2 e_1,$$

sonach:

$$E_1 G_1 - F_1^2 = (\varrho^2 - UV)^2$$
$$e_1 g_1 - f_1^2$$

oder:

$$\frac{1}{\varrho^2 - UV} = + \sqrt{\frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2}} = \text{Krümmungsmaß der Fläche } S_1,$$

d. h. es können die Gleichungen:

$$x_{1u} = \varrho X_{1u} + U X_{1v},\ y_{1u} = \varrho Y_{1u} + U Y_{1v},\ z_{1u} = \varrho Z_{1u} + U Z_{1v},$$
$$x_{1v} = V X_{1u} + \varrho X_{1v},\ y_{1v} = V Y_{1u} + \varrho Y_{1v},\ z_{1v} = V Z_{1u} + \varrho Z_{1v}$$

als Verallgemeinerungen der von Olinde Rodrigues für die kartesischen Koordinaten der Zentraflächen aufgestellten Gleichungen betrachtet werden.

§ 2.

Zusammenhang des Problems der Isogonalität von Flächennormalen mit dem der Flächentreue.

Eine zweite Art der Ermittlung der Richtungskosinus X_1, Y_1, Z_1 der Normalen der Fläche S_1 führt zum Nachweis eines engen Zusammenhangs der Frage nach isogonalen Flächen mit dem Problem der Flächenäquivalenz bzw. Flächen-$\begin{cases}\text{Diminution}\\ \text{Amplifikation}\end{cases}$ in folgender Überlegung:

Entwickelt man die Definitionsgleichung (1) S. 65, so erhält man:

$$(1)\qquad \begin{gathered}\Sigma (y_u z_v - z_u y_v)(y_{1u} z_{1v} - z_{1u} y_{1v}) = k \sqrt{D D_1},\\ \text{bzw. } p p_1 + q q_1 + 1 = k \sqrt{\mathfrak{T} \mathfrak{T}_1},\end{gathered}$$

$$D = EG - F^2, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x};\quad q = \frac{\partial z}{\partial y};\quad \mathfrak{T} = 1 + p^2 + q^2.$$

Man kann nun folgende zwei Fälle unterscheiden:

1. $D = D_1$, bzw. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$, d. h. die Flächen S_1 sind flächentreu der Fläche S. Dieser Fall begreift die Kongruenz in sich, ohne sie hier in der Allgemeinheit des Problems der Flächenäquivalenz besonders unterscheidbar zu machen. Gleichung (1) kann alsdann geschrieben werden in der Form:

$$\Sigma (y_u z_v - z_u y_v)\,[(y_{1u} z_{1v} - z_{1u} y_{1v}) - k (y_u z_v - z_u y_v)] = 0,$$

bzw. $p(p_1 - kp) + q(q_1 - kq) + (1 - k) = 0$ oder:

$$\Sigma X_0 \cdot A_1 = 0, \text{ bzw. } p\mathfrak{A}_1 + q\mathfrak{B}_1 - 1\,\mathfrak{C}_1 = 0. \tag{2}$$

Dabei ist:

$$X_0 = X\sqrt{D} \qquad \mathfrak{A}_1 = p_1 - kp,$$
$$A_1 = X_1\sqrt{D_1} - kX\sqrt{D} = X_1\sqrt{D_1} - kX_0 \qquad \mathfrak{B}_1 = q_1 - kq,$$
$$\mathfrak{C}_1 = k - 1,$$

Mit der Gleichung (2) ist identisch das System der 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 &= cY_0 - bZ_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}_1 = -cq - b\cdot 1, \\ B_1 &= aZ_0 - cX_0 \qquad\quad \mathfrak{B}_1 = a\cdot 1 + c\cdot p, \\ C_1 &= bX_0 - aY_0 \qquad\quad \mathfrak{C}_1 = -bp + aq. \end{aligned} \tag{2a}$$

Dabei sind a, b, c; bzw. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zunächst vollkommen willkürliche Funktionen von u und v, bzw. von y und z.

Schließlich errechnet man die Richtungskosinus selbst gem. Gl. (2) nach den Formeln:

$$X_1 = \frac{A_1 + kX\sqrt{D}}{\sqrt{D}} = \frac{kX_0 + cY_0 - bZ_0}{\sqrt{D}} \quad \text{bzw.} \quad X_1 = \frac{\mathfrak{A}_1 + kp}{\sqrt{\mathfrak{D}}},$$

u. s. f.

$$Y_1 = \frac{\mathfrak{B}_1 + kq}{\sqrt{\mathfrak{D}}}, \qquad Z_1 = \frac{\mathfrak{C}_1 - k}{\sqrt{\mathfrak{D}}}.$$

Die Bedingung, daß:

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$$

sein muß, schränkt die Willkür in der Wahl der Funktionen a, b, c, bzw. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein. Bei Darstellung der Richtungskosinus in vorstehender Form ergibt sich nämlich:

$$D_1 = \Sigma A_1^2 + k^2 D, \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D} = \Sigma \mathfrak{A}_1^2 + k^2 \mathfrak{D},$$
$$\text{d. h. } \Sigma A_1^2 = D(1 - k^2); \qquad \text{d. h. } \Sigma \mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{D}(1 - k^2).$$

Andererseits ist, wie sich aus den Formeln (2a) errechnet,

$$\Sigma A_1^2 = D[a^2 + b^2 + c^2 - (aX + bY + cZ)^2];$$
$$\text{bzw. } \Sigma \mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{D}(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2) - (\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q - \mathfrak{c})^2.$$

Durch Gleichsetzung beider Werte folgt:

$$1 - k^2 = \sin^2\omega = a^2 + b^2 + c^2 - (aX + bY + cZ)^2,$$
$$\text{bzw. } 1 - k^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \frac{(\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q - \mathfrak{c})^2}{\mathfrak{D}}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn:

$$a_0 = +\frac{a}{\sin\omega},\ b_0 = +\frac{b}{\sin\omega},\ c_9 = +\frac{c}{\sin\omega},$$

$$\text{bzw. } \mathfrak{a}_0 = +\frac{\mathfrak{a}}{\sin\omega},\ \mathfrak{b}_0 = +\frac{\mathfrak{b}}{\sin\omega},\ \mathfrak{c}_0 = +\frac{\mathfrak{c}}{\sin\omega}$$

die Richtungskosinus einer zur Richtung der Normalen von S senkrechten Geraden sind: Die Hauptaufgabe ist auch hier die Bestimmung einer Richtung, normal zu der Flächennormalen von S.

2. $D_1 = f \cdot D$, bzw. $\mathfrak{D}_1 = f\,\mathfrak{D}$ (f konstanter Proportionalitätsfaktor), d. h. die Differentiale der Oberflächen der beiden Flächen S und S_1 stehen in einem bestimmten, für jeden Punkt konstanten Verhältnis zueinander. Die in diesem Paragraphen angegebenen Gleichungen gelten für diesen Fall unter der Voraussetzung, daß k ersetzt wird durch $k' = k\sqrt{f}$.

§ 3.

Isogonal-isometrische Flächen.

Will man die zur Fläche S isometrischen und zugleich, im Sinne der Gleichung (1) S. 65, isogonalen Flächen bestimmen, so hat man die Aufgabe, eine Fläche aus den Richtungskosinus ihrer Normalen und dem Linienelement der Fläche zu ermitteln. Dies ist identisch mit der Bestimmung der Fläche aus ihren sechs Fundamentalgrößen, wie folgende Überlegung ergibt:

Da die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche S_1, gleich den entsprechenden der Fläche S, bekannt sind:

$$E_1 = E;\ F_1 = F;\ G_1 = G, \tag{1}$$

ferner:

$$A_1 = e_1 g_1 - f_1^2$$

gegeben ist durch die Richtungskosinus der Flächennormalen, so ist das Krümmungsmaß von S_1 bekannt:

$$\frac{1}{K_1} = \frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}.$$

Da weiter gilt: $$\frac{1}{K_1} = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{L_1 N_1 - M_1^2},$$

so folgt

$$L_1 N_1 - M_1^2 = \sqrt{(e_1 g_1 - f_1^2)(E_1 G_1 - F_1^2)}.$$

Für die sphärische Darstellung von S_1 gelten die Beziehungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} e_1 + K_1 E_1 &= H_1 L_1, \quad & f_1 + K_1 F_1 &= H_1 M_1, \\ & & g_1 + K_1 G_1 &= H_1 N_1,^1) \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$H_1^2 (L_1 N_1 - M_1^2) = A_1 + K_1^2 D_1 + K_1 (e_1 G_1 + E_1 g_1 - 2 F_1 f_1).$$

Substituiert man in dieser Gleichung für $L_1 N_1 - M_1^2$ den oben angegebenen Wert, so erhält man schließlich für die Berechnung von H_1 die Gleichung 2. Grades:

$$H_1^2 = \frac{2\sqrt{A_1 D_1} + (e_1 G_1 + g_1 E_1 - 2 f_1 F_1)}{D_1}.$$

Die Größen L_1, M_1, N_1 bestimmen sich rein algebraisch aus (2). Es kann dann in bekannter Weise die Existenz der isometrischen Fläche S_1 geprüft und diese selbst aus den 6 Fundamentalgrößen hierauf ermittelt werden.

§ 4.

Isogonale Flächen, deren Normalen sich in Punkten der einen dieser Flächen schneiden.

Die Lösung des Problems der Isogonalität von Flächen führt auch zur Behandlung der Frage nach Flächen S_1, deren Normalen jene der isogonalen Fläche S in Punkten der einen von beiden Flächen schneiden.

1. Die Berechnung der Gleichungen für die Darstellung von Flächen S_1, deren Normalen die der isogonalen Fläche S in den Punkten P derselben schneiden, gibt jene Voraussetzungen für die Fläche S, an deren Erfülltsein das Vorkommen solcher Flächen S_1 gebunden ist. Die Berechnung von ϱ (vgl. S. 72, Gl. (4)) erfordert dann nur mehr eine Integration.

[1]) Vgl. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, II. Teil. Leipzig 1902. S. 497.

In diesem Falle des Schneidens der Normalen von S und S_1 in den Punkten P von S gilt:

$$x_1 = x + \varrho X_1, \qquad y_1 = y + \varrho Y_1, \qquad z_1 = z + \varrho Z_1,$$

woraus folgt:

$$-\varrho_u = \Sigma x_u X_1, \qquad -\varrho_v = \Sigma x_v X_1.$$

Setzt man die in Seite 66 für X_1, Y_1, Z_1 aufgestellten Werte ein und berücksichtigt, daß:

$$\Sigma x_u X = \Sigma x_v X = 0,$$

so erhält man:

$$\varrho_u = +\sqrt{1 - k^2}\,(\mathfrak{X} x_u + \mathfrak{Y} y_u + \mathfrak{Z} z_u),$$
$$\varrho_v = +\sqrt{1 - k^2}\,(\mathfrak{X} x_v + \mathfrak{Y} y_v + \mathfrak{Z} z_v).$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen nach v, die zweite nach u, setzt die dann gefundenen zwei Beziehungen für ϱ_{uv} einander gleich, so ergibt sich:

$$\mathfrak{X}_v x_u + \mathfrak{Y}_v y_u + \mathfrak{Z}_v z_u = \mathfrak{X}_u x_v + \mathfrak{Y}_u y_v + \mathfrak{Z}_u z_v,$$

d. h. es gibt Flächen S_1, deren Normalen in P_1 die zu ihnen isogonalen Normalen der Fläche S in den entsprechenden Punkten P derselben schneiden, wenn für die Fläche S die Beziehung besteht:

$$\Sigma \mathfrak{X}_v x_u - \Sigma \mathfrak{X}_u x_v = 0. \tag{1}$$

Die Art der Fortschreitungsrichtung auf der Fläche S, d. h. die Auswahl der Tangenten dieser Fläche zu Geraden mit den Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, bestimmt demnach die Voraussetzung für das Vorhandensein sowie die Art der isogonalen Flächen S_1.

In den auf Seite 68 angeführten vier Spezialfällen erhält man aus Gl. (1) durch Einsetzen der entsprechenden Werte für die Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

im Falle 1) $G_u \cdot E^2 - 2EFF_u + E_u F^2 = 0,$
im Falle 2) $G_v F^2 - 2GFF_v + E_v G^2 = 0,$
im Falle 3) $EE_v - 2EF_u + E_u F = 0,$
im Falle 4) $GG_u - 2GF_v + G_v F = 0.$

ϱ berechnet man nach der Gleichung:

$$\varrho = -\int \Sigma x_u X_1\, du - \int \Sigma x_v X_1\, dv$$

in folgenden Werten:

$$\text{im Falle 1)}\quad \varrho = \pm\sqrt{1-k^2}\int \frac{D}{\sqrt{E}}\,dv,$$

$$\text{im Falle 2)}\quad \varrho = \pm\sqrt{1-k^2}\int \frac{D}{\sqrt{G}}\,du,$$

$$\text{im Falle 3)}\quad \varrho = +\sqrt{1-k^2}\int \sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv,$$

$$\text{im Falle 4)}\quad \varrho = \pm\sqrt{1-k^2}\int \frac{F}{\sqrt{G}}\,du + \sqrt{G}\,dv.$$

Nimmt man, unter Voraussetzung der Orthogonalität der Flächen S und S_1, auf S als Gerade mit den Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Tangenten einer Schar von ∞^1 geodätischen Kurven, welche in diesem Falle Parameterlinien der Fläche S sein müssen, so sind diese ∞^2 Tangenten die Normalen von ∞^1 Parallelflächen S_1, für welche die Fläche S der eine Mantel der Zentrafläche ist[1]).

2) Um die isogonalen Flächen S_1 zu bestimmen, deren Punkte P_1 die Schnittpunkte ihrer Normalen mit jenen der Fläche S in deren entsprechenden Punkten P sind, verfährt man folgendermaßen:

Die Koordinaten von S_1 sind in diesem Falle dargestellt durch:

$$x_1 = x + \varrho_1 X, \qquad y_1 = y + \varrho_1 Y, \qquad z_1 = z + \varrho_1 Z,$$

woraus folgt:

$$x_{1u} = x_u + \varrho_{1u} X + \varrho_1 X_u, \qquad x_{1v} = x_v + \varrho_{1v} X + \varrho_1 X_v,$$
$$y_{1u} = y_u + \varrho_{1u} Y + \varrho_1 Y_u, \qquad y_{1v} = y_v + \varrho_{1v} Y + \varrho_1 Y_v,$$
$$z_{1u} = z_u + \varrho_{1u} Z + \varrho_1 Z_u, \qquad z_{1v} = z_v + \varrho_{1v} Z + \varrho_1 Z_v.$$

Durch Berechnung von $\Sigma x_{1u} X_1$, bzw. $\Sigma x_{1v} X_1$ ergeben sich, unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$\Sigma x_{1u} X_1 = \Sigma x_{1v} X_1 = 0, \qquad \Sigma x_u X = \Sigma x_v X = 0,$$
$$\Sigma x_u X_1 = +\sqrt{1-k^2}\,\Sigma \mathfrak{X} x_u, \qquad \Sigma x_v X_1 = +\sqrt{1-k^2}\,\Sigma \mathfrak{X} x_v,$$
$$\Sigma X X_u = \Sigma X X_v = 0$$

die beiden Gleichungen:

[1]) Vgl. G. Scheffers, a. a. O., S. 408 und S. 475. L. Bianchi-Lukat, a. a. O., S. 659.

$$\pm\sqrt{1-k^2}\,\Sigma\mathfrak{X}x_u + k\varrho_{1u} \pm \sqrt{1-k^2}\,\varrho_1\Sigma\mathfrak{X}X_u = 0,$$
$$\pm\sqrt{1-k^2}\,\Sigma\mathfrak{X}x_v + k\varrho_{1v} \pm \sqrt{1-k^2}\,\varrho_1\Sigma\mathfrak{X}X_v = 0$$

oder:

$$\varrho_{1u} = \mp \operatorname{tg}\omega\,(\Sigma\mathfrak{X}x_u + \varrho_1\Sigma\mathfrak{X}X_u),$$
$$\varrho_{1v} = \mp \operatorname{tg}\omega\,(\Sigma\mathfrak{X}x_v + \varrho_1\Sigma\mathfrak{X}X_v).$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen nach v, die zweite nach u, setzt die beiden hierdurch gefundenen Beziehungen für ϱ_{1uv} einander gleich, so folgt für die Berechnung von ϱ_1 die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\varrho_1(\Sigma\mathfrak{X}_v X_u - \Sigma\mathfrak{X}_u X_v) + \varrho_{1v}\Sigma\mathfrak{X}X_u - \varrho_{1u}\Sigma\mathfrak{X}X_v + \Sigma\mathfrak{X}_v x_u - \Sigma\mathfrak{X}_u x_v = 0.$$

Wählt man bei Konstanz des Winkels $\omega = \frac{\pi}{2}$ als Gerade mit den Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Tangenten der beiden Scharen von Krümmungskurven auf S, die dann zugleich Parameterlinien der Fläche S sein müssen, so ergeben sich als Flächen S_1 die beiden Mäntel der Zentrafläche von S.

Die in diesem Paragraphen gegebene Spezialisierung des Problems der Isogonalität kann als eine Übertragung der Evolutoidentheorie auf die Geometrie der Flächen und, da sie zwar das Schneiden sich entsprechender Normalen voraussetzt, den Winkel ω aber vollständig beliebig läßt, als eine Verallgemeinerung der Theorie der Zentraflächen aufgefaßt werden. Es gestatten die vorstehend ausgeführten Betrachtungen die Darstellung aller ∞^1 Flächen, deren Normalenkongruenzen in ihrer Gesamtheit den Komplex der zu den Normalen von S in den Punkten P bzw. P_1 isogonalen Geraden bilden[1]).

[1]) Vgl. S. 65 und 66.