# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1925. Heft I

Januar- bis Junisitzung

---

München 1925
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Geradlinige rhombische Kurvennetze.

Von **O. Volk** in Kaunas (Litauen).

Vorgetragen von A. Voss in der Sitzung am 7. Februar 1925.

In einer früheren Arbeit[1]) konnte ich nach einer von Herrn A. Voss gegebenen Methode[2]), die das Längenelement benützt, den Satz beweisen, daß die Kegelschnitte die einzigen Kurven sind, deren Tangenten geradlinige rhombische Netzkurven bilden. Im folgenden wird dieser Satz auf andere Weise bewiesen, indem mit Hilfe eines ebenfalls von Herrn Voss stammenden Ansatzes[3]) die Koordinaten $x$, $y$ direkt bestimmt werden. Damit dürfte sich der Vosssche Ansatz gegenüber dem von Herrn O. Perron gemachten[4]) als erheblich einfacher und kürzer erweisen.

Setzt man

$$y_u = p x_u, \qquad y_v = q x_v, \tag{1}$$

so sind $p$, $q$ die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Kurven $v =$ konst. bzw. $u =$ konst. gegen die $X$-Achse. Die Bedingung

$$y_{uv} = y_{vu}$$

ergibt aus (1):

$$(p - q)\, x_{uv} + p_v\, x_u - q_u\, x_v = 0. \tag{2}$$

---

1) Diese Berichte, 1924, S. 169 ff.

2) Vgl. A. Voss, Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen. Diese Berichte, 1924, S. 39 ff.

3) Vgl. diese Berichte, 1924, S. 103 f.

4) Vgl. O. Perron, Bestimmung aller geradlinigen rhombischen Kurvennetze. Diese Berichte, 1924. Herr Prof. Perron hat, nachdem er durch Herrn Geheimrat Voss Einsicht in das Manuskript meiner früheren Arbeit erhalten hatte, den obigen Satz ebenfalls auf direkte Weise, aber nach mir abgeleitet.

Soll ferner eine rhombisshe Teilung stattfinden, so muß sein:

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2,$$

also:

(3)
$$(1 + p^2)\, x_u^2 = (1 + q^2)\, x_v^2.$$

Da

$$\varrho_u = \frac{(1 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial q}{\partial v}}\, x_v, \qquad \varrho_v = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial p}{\partial u}}\, x_u$$

ist, so sind die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. Geraden, wenn

$$\frac{\partial q}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial u} = 0,$$

also:

$$q = f(u), \qquad p = \varphi(v).$$

Aus (2) erhält man unter Beachtung von (3):

$$\frac{x_{uu}}{x_u} = -\sqrt{\frac{1 + q^2}{1 + p^2}}\, \frac{p_v}{p - q} + \frac{q_u}{p - q} - \sqrt{1 + q^2}\, \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + q^2}}\right),$$

$$\frac{x_{uv}}{x_u} = -\frac{p_v}{p - q} + \sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}\, \frac{q_u}{p - q},$$

$$\frac{x_{vu}}{x_v} = -\sqrt{\frac{1 + q^2}{1 + p^2}}\, \frac{p_v}{p - q} + \frac{q_u}{p - q},$$

$$\frac{x_{vv}}{x_v} = -\frac{p_v}{p - q} + \sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}\, \frac{q_u}{p - q} - \sqrt{1 + p^2}\, \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}\right);$$

also:

(4)
$$\begin{cases} \lg x_u = -\lg \dfrac{p - q}{\sqrt{1 + q^2}} + \displaystyle\int\left(-\sqrt{\frac{1 + q^2}{1 + p^2}}\, \frac{p_v}{p - q}\, du + \sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}\, \frac{q_u}{p - q}\, dv\right), \\ \lg x_v = -\lg \dfrac{p - q}{\sqrt{1 + p^2}} + \displaystyle\int\left(-\sqrt{\frac{1 + q^2}{1 + p^2}}\, \frac{p_v}{p - q}\, du + \sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}\, \frac{q_u}{p - q}\, dv\right). \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingung ergibt die Funktionalgleichung:

(5)
$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1 + q^2}{1 + p^2}}\left(-p_{vv} + \frac{p_v^2}{p - q} + \frac{p p_v^2}{1 + p^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}\left(q_{uu} + \frac{q_u^2}{p - q} - \frac{q q_u^2}{1 + q^2}\right). \end{aligned}$$

Setzt man:

(6) $$p = \operatorname{tg} V, \qquad q = \operatorname{tg} U,$$

wo $U$ eine Funktion nur von $u$, $V$ eine solche nur von $v$ ist, so erhält man aus (6) die Vosssche Funktionalgleichung[1]):

$$U'' + V'' = (U'^2 - V'^2) \operatorname{cotg}(U - V).$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

(7) $$\begin{cases} F(u) = \dfrac{q_{uu}}{1+q^2} - \dfrac{q\,q_u^2}{(1+q^2)^2}, \\[2ex] \Phi(v) = \dfrac{p_{vv}}{1+p^2} - \dfrac{p\,p_v^2}{(1+p^2)^2}, \end{cases}$$

so folgt aus (5):

(8) $$(p-q)\,F(u) + \frac{q_u^2}{1+q^2} = -(p-q)\,\Phi(v) + \frac{p_v^2}{1+p^2}.$$

Durch Differentiation nach $v$ bzw. $u$ findet man hieraus:

(9) $$F(u) = -b + a_1 q, \qquad \Phi(v) = -b' + a_1' p,$$

wo $a_1$, $b$; $a_1'$, $b'$ zunächst Funktionen von $v$ bzw. $u$ sind. Da aber die Gleichungen (9) für alle Werte von $v$ bzw. $u$ gelten müssen, so kann man $a_1$, $b$; $a_1'$, $b'$ als konstant annehmen. Setzt man für $F(u)$, $\Phi(v)$ die Werte aus (9) in (8) ein, so findet man:

(10) $$a_1' = a_1,$$

(11) $$\frac{p_v^2}{1+p^2} + (b+b')p - a_1 p^2 = \frac{q_u^2}{1+q^2} + (b+b')q - a_1 q^2 = -a.$$

Durch Differentiation der Gleichungen (11) nach $v$ bzw. $u$ und Vergleich mit den Gleichungen (7) und (9) ergibt sich schließlich:

(12) $$b' = b.$$

Wir erhalten also:

(13) $$\begin{cases} \dfrac{p_v^2}{1+p^2} = -a - 2bp + a_1 p^2, \\[2ex] \dfrac{q_u^2}{1+q^2} = -a - 2bq + a_1 q^2. \end{cases}$$

---

[1]) Die Funktionen $U$, $V$ sind also die Neigungswinkel der Kurven $v$ = konst. bzw. $u$ = konst. gegen die $X$-Achse.

Ersetzt man $p$, $q$ mit Hilfe der Gl. (6) durch $U$, $V$, so erhält man die Gl. (8) und (9) der früheren Arbeit.

Durch die Substitution:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{a_1 q^2 - 2bq - a} - \sqrt{a_1}\, q, \\ \eta = \sqrt{a_1 p^2 - 2bp - a} - \sqrt{a_1}\, p \end{cases}$$

kann man das Integral in (4) in der gleichen Weise auswerten wie in der früheren Arbeit das für $C$; man erhält:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} x_u = C_1 \dfrac{(\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\eta + \xi) - a\sqrt{a_1})\sqrt{1+q^2}}{(\xi - \eta)(p - q)}, \\[2ex] x_v = C_1 \dfrac{(\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\eta + \xi) - a\sqrt{a_1})\sqrt{1+p^2}}{(\xi - \eta)(p - q)}, \end{cases}$$

oder:

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} x_u = C_1 \dfrac{(\xi - \eta)\sqrt{1+q^2}}{(\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\xi + \eta) - a\sqrt{a_1})(p - q)}, \\[2ex] x_v = C_1 \dfrac{(\xi - \eta)\sqrt{1+p^2}}{(\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\xi + \eta) - a\sqrt{a_1})(p - q)}, \end{cases}$$

je nachdem in (13) die Wurzeln ungleichzeichig oder gleichzeichig genommen werden.

Die Berechnung von $x$ und $y$ gestaltet sich genau so wie in meiner früheren Arbeit und man erhält schließlich die dortigen Formeln (27), (28) und (35):

$$\text{(17)} \qquad x = C_1 \frac{2b + \sqrt{a_1}(\xi + \eta)}{\xi - \eta}, \quad y = C_1 \frac{a + \xi\eta}{\xi - \eta}$$

oder:

$$\text{(18a)} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2C_1}{\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\xi + \eta) - a\sqrt{a_1}}, \\[2ex] y = \dfrac{C_1(\xi + \eta)}{\sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}\,\xi\eta + b(\xi + \eta) - a\sqrt{a_1})}, \qquad (a_1 \neq 0) \end{cases}$$

$$\text{(18b)} \qquad x = \frac{2C_1}{b(\xi + \eta)}, \quad y = \frac{C_1(a - \xi\eta)}{b^2(\xi + \eta)} \qquad (a_1 = 0),$$

je nachdem man die Vorzeichen der Wurzeln in (13) ungleich oder gleich nimmt.

Die Ausnahmefälle der Büschel sind dabei die gleichen.

# Nachträgliche Bemerkung zu der Note: Geradlinige rhombische Kurvennetze[1]).

Von **O. Volk** in Kaunas (Litauen).

Vorgelegt von A. Voss.

Erst nachträglich erhalte ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn Geheimrates Finsterwalder in München davon Kenntnis, daß Herr Finsterwalder bereits in einer Arbeit vom Jahre 1899[2]): „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation“ die geradlinigen rhombischen Netze als Geflecht aus zwei Scharen flachgelegter geodätischer Lamellen und zwei Scharen unter sich orthogonaler Drähte beschrieben und außerdem gezeigt hat, daß solche Netze auf allen Flächen mit Liouvilleschem Linienelement vorkommen. Die Diagonalkurven solcher rhombischen Netze bilden dabei ein System konfokaler Kurven, auf den Drehflächen Meridiane und Parallelkreise, in der Ebene und auf den Flächen konstanter Krümmung konfokale Kegelschnitte und auf den Flächen zweiten Grades die Krümmungslinien. Der Sonderfall des ebenen Netzes, bei dem sich der umhüllte Kegelschnitt auf ein Punktepaar reduziert, ist von Herrn Finsterwalder in einer Figur dargestellt. Daß die so dargestellten Netze die einzig möglichen sind, läßt sich natürlich daraus nicht folgern.

Aus Anlaß der Ausdehnung meiner Untersuchungen auf rhombische Kurvensysteme auf beliebigen Flächen habe ich mich mit den früheren Arbeiten des Herrn Voss beschäftigt, was ich bisher mit Rücksicht auf seine neuesten Arbeiten unterlassen hatte. So finde ich erst nachträglich, daß Herr Voss bereits in einer Arbeit vom Jahre 1881[3]): „Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Flächen“ neben vielen anderen Sätzen den Satz aufgestellt hat, daß die Diagonalkurven eines rhombischen Systemes ein orthogonales Kurvensystem auf den Flächen bilden.

[1]) Diese Berichte, 1925, S. 35. Vgl. auch 1924, S. 169 ff.
[2]) Jahresbericht d. deutsch. Mathematikervereinigung, Bd. VI, 2, S. 55 ff.
[3]) Math. Annalen, Bd. 19, S. 1—26.

Die Ergebnisse dieser Arbeit werden in der Note[1]) „Über äquidistante Kurvensysteme auf krummen Flächen" erweitert. In der Abhandlung: „Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden", untersucht Herr Voss die Form des Längenelementes derjenigen Flächen, welche durch ein Kurvensystem von den konstanten geodätischen Krümmungen $\gamma_1$, $\gamma_2$ in infinitesimale Rhomben geteilt werden. Darin beweist Herr Voss den Satz, daß jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, eine Liouvillesche Fläche ist und daß man umgekehrt auf jeder Liouvilleschen Fläche $\infty^1$ Systeme von Kurvenscharen der genannten Art angeben kann. Diese Eigenschaften kommen allen Liouvilleschen Flächen in viel allgemeinerem Sinne zu, d. h. zu jeder rhombischen Teilung einer Liouvilleschen Fläche durch geodätische Linien gehören $\infty^1$ andere Liouvillesche Flächen, welche dieselben Längenabschnitte der auf ihnen verlaufenden beiden Scharen geodätischer Linien, aber einen verschiedenen Koordinatenwinkel dieser Scharen besitzen, woraus eine Deformation der Liouvilleschen Flächen sich ergibt.[3]) Im einzelnen wendet sich Herr Voss der Bestimmung von Kurvensystemen der genannten Art auf Flächen konstanter Krümmung zu. Dabe beschränkt er sich auf die Angabe der einfachsten Fälle. Unter anderm wird der Fall der Strahlenbüschel in der Ebene und der auf den abwickelbaren Flächen besprochen (§ 6 und § 7). Bei letzterem kommt er genau auf dieselbe Funktionalgleichung, die er auch kürzlich[4]) erhalten hat. Die Lösung dafür gibt er in einer von der Perronschen nur wenig verschiedenen Form und zeigt, daß die Tangenten eines jeden Kegelschnittes eine doppelte Schar von geodätischen Linien in der Ebene bilden, durch welche dieselbe rhombisch geteilt wird. Daß aber diese geradlinigen rhombischen Netze in der Ebene die einzig möglichen sind, konnte Herr Voss ebenfalls nicht folgern.

[1]) Katalog der mathematischen Ausstellung zu Nürnberg, 1892, S. 1—11.

[2]) Diese Berichte, Bd. XXXVI (1906), S. 247—296.

[3]) Vgl. hierzu auch M. Lagally, Über die Verbiegung geodätischer Netze. Diese Berichte, 1910.

[4]) Diese Berichte, 1924, S. 61.