Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft II

Juli- bis Dezembersitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Klassen von Rotationsflächen mit längengleichen Haupttangenten-Kurven.

Von **M. Lagally** in Dresden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 12. Juli 1924.

Man kennt nur wenige Beispiele für die Möglichkeit, eine Fläche so zu deformieren, daß das von den Haupttangenten-Kurven gebildete Netz ohne Änderung der Maschenlängen in das Netz der Haupttangenten-Kurven der deformierten Fläche übergeht. Sucht man Klassen von Rotationsflächen zu bestimmen, auf welchen die Haupttangenten-Kurven längengleiche Netze bilden, so läßt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung angeben, von deren Integration die Lösung der Aufgabe abhängt.

Sei $x = r(u) \cos v, \quad y = r(u) \sin v, \quad z = z(u)$

die Parameterdarstellung einer Rotationsfläche mit dem Linienelement

$$1) \qquad ds^2 = (r'^2 + z'^2)\, du^2 + r^2\, dv^2,$$

so wird die Differentialgleichung der Haupttangenten-Kurven (Bedingung des Verschwindens der 2. Fundamentalform):

$$2) \qquad (z'' r' - r'' z')\, du^2 + r z'\, dv^2 = 0.$$

Durch geeignete Wahl des Parameters u der Parallelkreise kann man erreichen, daß

$$3) \qquad z'' r' - r'' z' = - r z'$$

wird; dadurch reduziert sich (2) auf

$$4) \qquad du^2 - dv^2 = 0;$$

d. h. die Parallelkreise werden so angeordnet, daß die Haupttangenten-Kurven Diagonalkurven des von den Parallelkreisen und

Meridianen gebildeten orthogonalen Netzes sind. Aus (3) folgt, wenn man $r(u)$ als gegeben auffaßt, $z' = r' e^{-\int \frac{r}{r'} du}$; somit wird nach (1) das Bogenelement einer Haupttangenten-Kurve, also die Länge einer Rechtecksdiagonale, gemessen durch

$$d\bar{s}^2 = [r'^2 + z'^2 + r^2]\, dv^2 = \left[r'^2 \left(1 + e^{-2\int \frac{r}{r'} du}\right) + r^2\right] dv^2.$$

Um eine Schar von Rotationsflächen mit gleichlangen Haupttangenten-Kurven zu finden, hat man jetzt

5) $$r'^2 \left(1 + e^{-2\int \frac{r}{r'} du}\right) + r^2 = h(u)$$

als beliebig, aber fest gewählte Funktion anzusetzen; hieraus gewinnt man für r die Differentialgleichung

6) $$2(r'' - r)(r^2 - h) = r'(4rr' - h').$$

Zwischen den beiden Konstanten des allgemeinen Integrals dieser Gleichung ist eine derartige Beziehung festzusetzen, daß (5) für eine fest gewählte untere Grenze des dort und in z' auftretenden Integrals besteht; es gibt also im allgemeinen eine einfach unendliche Reihe von längentreuen Deformationen rotationssymmetrischer Haupttangenten-Netze.

Es wird kaum möglich sein, (6) für beliebiges $h(u)$ formal zu integrieren; zwei Einzelfälle sind indessen ohne Mühe zu erledigen:

a) Durch $r = \frac{C}{\sin u}$, $z = C_1 \operatorname{cotg} u$ ist der rotationssymmetrische Fall der Henricischen Hyperboloide $\frac{r^2}{C^2} - \frac{z^2}{C_1^2} = 1$ gegeben, wenn zwischen den beiden Konstanten eine Relation $C^2 + C_1^2 = a^2$ besteht; dabei bedeutet a den Maximalwert des Kehlkreisradius. Diesem Fall entspricht die Funktion $h(u) = \frac{a^2}{\sin^4 u}$.

b) Für $h(u) = 1$ (oder eine beliebige, von Null verschiedene Konstante) läßt sich (6) integrieren; man erhält mit

$$r = dn \frac{u}{R} \,(\mathrm{mod}\ R), \quad z = -R \int sn^2 \frac{u}{R}\, du \,(\mathrm{mod}\ R)^{1)},$$

[1]) Bianchi, Differentialgeometrie, 1. Aufl., S. 193.

wo R einen veränderlichen Parameter bedeutet, die Darstellung von ∞^1 Flächen konstanter negativer Krümmung $K = -\frac{1}{R^2}$; mit der Deformation des Netzes ändert sich also das Krümmungsmaß der Fläche. Für $R < 1$ ergibt sich eine Reihe von hyperbolischen, für $R > 1$ von elliptischen Pseudosphären; die hier gegebenen Formeln für r und z sind so normiert, daß die hyperbolische Reihe in reeller Form dargestellt wird. Auf sämtlichen Flächen hat der Radius der kreisförmigen Rückkehrkante die Länge 1. Das Bogenelement der Haupttangenten-Kurven wird $d\bar{s}^2 = dv^2$; sie bilden also, wie bekannt, ein Rhombennetz mit konstanter Maschenlänge. Das Netz kann deshalb auf jeder Fläche der Schar in Richtung der Meridiane verschoben werden; es tritt hier der oben angedeutete Ausnahmefall ein, daß die im allgemeinen ∞^1 fache Deformationsmöglichkeit erhöht wird. —

Man kann jedes deformierbare Haupttangenten-Netz in der Weise modellieren, daß man die Maschenseiten durch hochkant gestellte Lamellen aus biegsamem Material zur Darstellung bringt und sie in den Knotenpunkten drehbar verbindet. Diese Lamellen bilden bei jeder Deformation geodätische Streifen auf den windschiefen Normalenflächen längs der Haupttangenten-Kurven[1]). Ein ebenes Netz dieser Art, das von gleich großen Rhomben gebildet wird, gibt bei der Deformation pseudosphärische Flächen. Und zwar ist ein einfach zusammenhängendes Stück auf jede pseudosphärische Fläche in ∞^2 facher Weise auflegbar; formt man aber ein ursprünglich etwa rechteckig begrenztes Stück durch Zusammenfassen eines Paares gegenüberliegender Ränder zu einem röhrenförmigen Gebilde um, so wird die Möglichkeit der Deformation auf eine einfach unendliche Reihe von Rotationsflächen beschränkt.

[1]) Vgl. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahr.-Ber. d. deutsch. Math. Ver., 6. Bd., 1899, § 10, S. 58.