Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim**.

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Allgemeine Kriterien zur Beurtheilung der Convergenz und Divergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern sind zuerst von Herrn O. Stolz angegeben worden.[1]) Später hat Herr G. Landsberg[2]) den Fall, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner reell und rational sind, mit Hülfe einer besonders einfachen und sinnreichen Methode behandelt, welche zugleich auch den Zusammenhang zwischen dem betreffenden Kettenbruche und einem anderen, durch geeignete Inversion der Periode daraus hervorgehenden unmittelbar erkennen lässt und auf diese Weise die Verallgemeinerung eines bekannten, von Galois[3]) zunächst nur für sog. regelmässige Kettenbrüche bewiesenen Satzes liefert. Da Herr Landsberg seinen Untersuchungen eine etwas andere und zwar, wie die Durchführung der Rechnung lehrt, weniger zweckmässige Kettenbruchform zu Grunde legt,[4]) als Herr Stolz, so erscheint die Vergleichung der beider-

---

[1]) Innsbrucker Ber. 17. Febr. 1886. Die Beweise der daselbst mitgetheilten Sätze findet man in den Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II (1886), p. 299 ff. Ein dort noch nicht angeführtes Divergenz-Kriterium giebt Stolz: Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. 2.

[2]) Journ. für Math. Bd. 109 (1892), p. 231—237. Vgl auch: E. Netto, ebendas. Bd. 110 (1892), p. 349.

[3]) Gergonne Annales, T. 19 (1828—1829), p. 294.

[4]) S. weiter unten p. 465, Fussnote 2).

seitigen Endresultate einigermaassen erschwert. Ueberträgt man aber die Landsberg'sche Methode, die überdies in einigen Einzelheiten eine noch etwas elementarere und durchsichtigere Darstellung gestattet, auf Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern in der von Herrn Stolz benützten Form, so kann man in der That mit den denkbar einfachsten Hülfsmitteln zu einer äusserst einfachen und übersichtlichen Formulirung der Stolz'schen Convergenz- und Divergenz-Kriterien gelangen. Zugleich ergiebt sich dann auch die oben erwähnte Verallgemeinerung des Galois'schen Satzes für Kettenbrüche mit ganz beliebigen Theilzählern und Theilnennern.

Die Durchführung dieses Gedankens bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung.

---

§ 1. Nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Convergenz eines rein periodischen Kettenbruches.

Ich bezeichne den Kettenbruch:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

durch eins der Symbole:

$$\left(b_0 ; \frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{oder:} \quad \left[b_0 ; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n},$$

seinen auf Grund der bekannten Beziehungen:

$$(1) \begin{cases} A_0 = b_0 & B_0 = 1 \\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2) \end{cases}$$

formal gebildeten ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder K_ν und setze:

(2) $$\left(b_0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_\nu}{b_\nu}\right) = \frac{A_\nu}{B_\nu} \equiv K_\nu,$$

gleichgültig, ob der Kettenbruch als solcher einen bestimmten Sinn besitzt,[1]) sofern nur K_ν selbst eine bestimmte Zahl vorstellt, d. h. B_ν von Null verschieden ist.

Im Falle $b_0 = 0$ schreibe ich statt:

$$\left(0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}$$

kürzer:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}.$$

Bedeuten dann a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ irgendwelche complexe Zahlen (mit Einschluss der reellen und für die b_ν auch der Null, während durchweg: $|a_\nu| > 0$), welche den Bedingungen genügen:

(3) $$\begin{cases} a_{\lambda p+\mu} = a_\mu \\ b_{\lambda p+\mu} = b_\mu \end{cases} \left(\begin{matrix} \lambda = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.} \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{matrix}\right),$$

so soll der unendliche Kettenbruch:

(4) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$$

als ein rein periodischer[2]) und zwar mit der p-gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$$

---

[1]) Vgl. Stolz, Allg. Arithm. II, p. 269.

[2]) Darnach gilt der Kettenbruch:

$$\left[b_n; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

anders geschrieben:

$$b_n + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

schon als unrein periodisch. Es ist dies diejenige Form, welche Herr Landsberg zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen gewählt hat.

bezeichnet werden, wobei noch angenommen wird, dass p die kleinste Zahl bedeutet, für welche die beiden Beziehungen (3) erfüllt sind.

Wenn nun der Kettenbruch (4) überhaupt convergirt, so muss sein Werth x der Relation genügen:

$$x = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + x}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\, x}{B_p + B_{p-1}\, x}, \tag{5}$$

sodass also x eine bestimmte Wurzel der quadratischen Gleichung sein muss:

$$B_{p-1}\, x^2 + (B_p - A_{p-1})\, x - A_p = 0, \tag{I}$$

sofern nicht etwa gerade $B_{p-1} = 0$ ist. In diesem Specialfalle reducirt sich diese Gleichung auf eine lineare, und sie wird überdies gänzlich hinfällig, wenn auch noch $B_p - A_{p-1} = 0$ ist. Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall:

I. $|B_{p-1}| > 0$.

Die beiden Wurzeln x der Gleichung (I) werden dann durch den Ausdruck dargestellt:

$$x = \frac{1}{2\, B_{p-1}} \{A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D}\}, \tag{6}$$

wo D die Discriminante von (I) bedeutet, also:

$$\begin{aligned} D &= (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\, A_p\, B_{p-1} \\ &= (A_{p-1} + B_p)^2 + 4\, (A_p\, B_{p-1} - A_{p-1}\, B_p) \end{aligned} \tag{7a}$$

oder auch:

$$D = S^2 - 4\, P, \tag{7b}$$

wenn man beachtet, dass:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1 a_2 \ldots a_p = - \prod_{\nu=1}^{p} (-a_\nu) \tag{8}$$

und sodann die Abkürzungen einführt:

$$A_{p-1} + B_p \equiv S, \quad \prod_{\nu=1}^{p} (-a_\nu) \equiv P. \tag{9}$$

Um die Convergenz oder Divergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, d. h. schliesslich die Beziehung von $\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} K_\nu$ zu einer der beiden Zahlen x festzustellen, untersuchen wir allgemein einen Ausdruck von der Form $H - x$, wo:

$$(10) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,h}{B_p + B_{p-1}\,h},$$

also zunächst:

$$H - x = \frac{A_p - B_p\,x + (A_{p-1} - B_{p-1}\,x) \cdot h}{B_p + B_{p-1}\,h}.$$

Da aber aus Gl. (I) folgt:

$$(11) \qquad A_p - B_p\,x = -(A_{p-1} - B_{p-1}\,x) \cdot x,$$

so hat man:

$$(12) \qquad H - x = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x}{B_p \quad + B_{p-1}\,h} \cdot (h - x).$$

Für die weitere Untersuchung ist nun zu unterscheiden, ob Gl. (I) zwei verschiedene Wurzeln besitzt oder nicht, d. h. ob $|D| > 0$ oder $D = 0$.

I^a. $|D| > 0$.

Werden alsdann die beiden verschiedenen Wurzeln von Gl. (I) mit x_1, x_2 bezeichnet, so kann man dieselben nach Gl. (6) definiren durch die Beziehungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\,B_{p-1}\,x_1 = A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \\ 2\,B_{p-1}\,x_2 = A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D} \end{cases},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet und $\varepsilon = +1$ oder -1 in der Weise fixirt werden soll, dass der Kettenbruch, falls er überhaupt convergirt, gerade den Grenzwerth x_1 besitzt. Setzt man dann in Gl. (12) $x = x_1$ bezw. $x = x_2$, so folgt durch Division der resultirenden Gleichungen:

$$(14)\qquad \frac{H-x_1}{H-x_2}=M\cdot\frac{h-x_1}{h-x_2}$$

wo:

$$(15)\qquad M=\frac{A_{p-1}-B_{p-1}x_1}{A_{p-1}-B_{p-1}x_2}=\frac{S-\varepsilon\cdot\sqrt{D}}{S+\varepsilon\cdot\sqrt{D}}\;[1].$$

Man hat nun für $\nu > p$ in Folge der Periodicität der a_ν, b_ν:

$$(16)\qquad K_\nu=\left(\frac{a_1}{b_1},\ldots\frac{a_p}{b_p+K_{\nu-p}}\right),$$

d. h. es wird: $H=K_\nu$ für: $h=K_{\nu-p}$ und daher nach Gl. (14):

$$(17)\qquad \frac{K_\nu-x_1}{K_\nu-x_2}=M\cdot\frac{K_{\nu-p}-x_1}{K_{\nu-p}-x_2}.$$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu=p+\mu,\ 2p+\mu,\ \ldots\lambda p+\mu$ (wo μ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots p$), so folgt durch Multiplication der resultirenden Beziehungen:

$$(18)\qquad \frac{K_{\lambda p+\mu}-x_1}{K_{\lambda p+\mu}-x_2}=M^\lambda\cdot\frac{K_\mu-x_1}{K_\mu-x_2}=M^\lambda\cdot\frac{A_\mu-B_\mu x_1}{A_\mu-B_\mu x_2}$$

d. h.

$$(19)\qquad K_{\lambda p+\mu}=\frac{x_1(A_\mu-B_\mu x_2)-M^\lambda\cdot x_2(A_\mu-B_\mu x_1)}{(A_\mu-B_\mu x_2)-M^\lambda\cdot(A_\mu-B_\mu x_1)}$$

$$=x_1+M^\lambda\cdot(x_1-x_2)\cdot\frac{A_\mu-B_\mu x_1}{(A_\mu-B_\mu x_2)-M^\lambda\cdot(A_\mu-B_\mu x_1)}.$$

Damit also $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu}=x_1$ werde (für: $\mu=1, 2, \ldots p$) ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(20)\qquad \lim_{\lambda=\infty} M^\lambda\cdot(x_1-x_2)\cdot\frac{A_\mu-B_\mu x_1}{(A_\mu-B_\mu x_2)-M^\lambda(A_\mu-B_\mu x_1)}=0.$$

Da aber (x_1-x_2) von Null verschieden und auch $(A_\mu-B_\mu x_1)$ zum mindesten nicht für jedes $\mu=1, 2, \ldots p$

---

[1] Wegen:

$$B_{p-1}(x_1+x_2)=A_{p-1}+B_p$$

kann man M auch in die Form setzen:

$$M=\frac{B_p+B_{p-1}x_2}{B_p+B_{p-1}x_1}.$$

verschwinden kann[1]), so findet die Beziehung allemal dann und nur dann statt, wenn:

(a) $$\lim_{\lambda=\infty} M^\lambda = 0 \quad \text{d. h.} \quad |M| < 1,$$

und ausserdem der Nenner des Ausdruckes (20) für $\lambda = \infty$ nicht verschwindet, d. h. wenn:

(b) $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots p.$$

Die Bedingung (a) verlangt aber genau folgendes: es muss $\varepsilon = \pm 1$ so fixirt werden, dass (s. Gl. (15)):

$$\left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| < 1, \tag{21}$$

und dies kann offenbar allemal und zwar bei vollkommen eindeutiger Bestimmbarkeit von ε erzielt werden, sofern nicht gerade:

$$|M| \equiv \left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| = 1, \tag{22}$$

in welchem Falle dann ε willkürlich $= \pm 1$ angenommen werden kann. Setzt man nun etwa:

$$\frac{S}{\sqrt{D}} = \alpha + \beta i, \tag{23}$$

so geht die Bedingung (22) in die folgende über:

$$\left| \frac{\alpha - \varepsilon + \beta i}{\alpha + \varepsilon - \beta i} \right| = 1,$$

d. h. $$(\alpha - \varepsilon)^2 + \beta^2 = (\alpha + \varepsilon)^2 + \beta^2,$$

also schliesslich:

$$\alpha = 0$$

oder, wenn man allgemein den reellen Theil einer complexen Zahl z mit $\Re(z)$ bezeichnet:

$$\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0. \tag{24}$$

---

[1]) Dies gilt offenbar auch im Falle $p = 1$.

Hiernach ist also die Bedingung (a) bei geeigneter Normirung von ε stets erfüllbar, wenn:

$$\text{(A)} \qquad \left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0.$$

Dass im entgegengesetzten Falle, also für $|M| = 1$ wirklich Divergenz stattfindet, erkennt man unmittelbar aus Gl. (19), wenn man berücksichtigt, dass für $|M| = 1$ — da die Möglichkeit $M = 1$ hier definitiv ausgeschlossen erscheint[1]) — stets $M = -1$ oder M eine nicht-reelle Zahl mit dem absoluten Betrage 1 sein muss, und dass daher M^λ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ eine unbegrenzte Folge periodisch wiederkehrender oder durchweg von einander verschiedener Werthe annimmt (letzteres, wenn M keine Einheitswurzel).

Im übrigen lässt sich die Divergenz-Bedingung (21) noch in folgender Weise umformen. Da dieselbe genau soviel

---

[1]) Denn aus $M = 1$ würde folgen $D = 0$, was unter den weiterhin zu behandelnden Fall 1[b] gehört.

Ist $M = -1$, d. h. $S = 0$, so folgt aus Gl. (19) für gerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p + \mu} = K_{\lambda p + \mu} = K_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

dagegen für ungerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = K_{\lambda p+\mu} = \frac{(x_1 + x_2)\cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} \text{ d. h. } = K_{p+\mu}.$$

Da nämlich allgemein:

$$x_1 x_2 = -\frac{A_p}{B_{p-1}}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und, wegen $S = 0$, d. h. $A_{p-1} = -B_p$, speciell sich ergiebt:

$$x_1 + x_2 = \frac{2\, A_{p-1}}{B_{p-1}} = -\frac{2\, B_p}{B_{p-1}}$$

so findet man in der That:

$$\frac{(x_1 + x_2)\cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} = \frac{A_{p-1} K_\mu + A_p}{B_{p-1} K_\mu + B_p} = K_{p+\mu}.$$

besagt, dass $\frac{S}{\sqrt{D}}$ rein imaginär oder Null, also $\frac{S^2}{D}$ wesentlich negativ oder Null, so kann man sie zunächst durch die folgende ersetzen:

$$\frac{S^2}{D} = -\varrho \quad (0 \leq \varrho < +\infty)$$

oder, wegen: $D = S^2 - 4P$, auch:

$$S^2 = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot 4P.$$

Da hier $\frac{\varrho}{1+\varrho} = \vartheta$ für $0 \leq \varrho < \infty$ jeden Werth des Intervalles $0 \leq \vartheta < 1$ annimmt, vice versa — so gewinnt man schliesslich statt der Bedingung (24) die folgende:

(24ᵃ) $$S^2 = 4\vartheta \cdot P \quad (0 \leq \vartheta < 1),$$

anders geschrieben:

$$D = S^2 - 4P = -4(1-\vartheta) \cdot P$$

und, wenn man noch $1 - \vartheta = \eta$ setzt:

(24ᵇ) $$D = -4\eta \cdot P \quad (0 < \eta \leq 1).$$

In Bezug auf die Convergenz-Bedingung (b) ist noch zu bemerken, dass dieselbe für $\mu = p - 1$ und $\mu = p$ allemal eo ipso erfüllt ist. Da nämlich (nach Gl. (11) für $x = x_2$):

(25) $$A_p - B_p x_2 = -(A_{p-1} - B_{p-1} x_2) \cdot x_1,$$

so würde zunächst aus:

$$A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = 0$$

jedesmal folgen, dass auch:

$$A_p - B_p x_2 = 0$$

und — sofern nur $|x_1| > 0$ angenommen wird — auch umgekehrt. Alsdann hätte man aber:

$$\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}} = \frac{A_p}{B_p} \quad (\text{nämlich} = x_2),$$

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist. Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig aus, so genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folgenden Umfange:

(B) $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geq 3$ in Betracht kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geq 3$) für ein oder mehrere specielle $\mu = m$:

(26) $$A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

(27) $$K_{\lambda p + m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verbleibt:

(28) $$\lim_{\mu = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsbrüche den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenigen K_ν, deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, während die Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 = 0$ betrifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur dann eintreten kann, wenn:

(29) $$A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) die folgende Form an:

(30) $$B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4 P \neq 0$) hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

(da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I[b] gehört). Sodann wird:

$$(31) \qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$(32) \qquad \begin{aligned} \text{entweder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\, x = A_{p-1}, \\ \text{oder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\, x = B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_2} \right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$(33) \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1,$$

dagegen:

$$(34) \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$(35) \qquad A_p - B_p\, x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$(36) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\, x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist. Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig aus, so genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folgenden Umfange:

$$(\mathrm{B}) \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geqq 3$ in Betracht kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geqq 3$) für ein oder mehrere specielle $\mu = m$:

$$(26) \qquad A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

$$(27) \qquad K_{\lambda p+m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verbleibt:

$$(28) \qquad \lim_{\mu=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsbrüche den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenigen K_ν, deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, während die Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 = 0$ betrifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur dann eintreten kann, wenn:

$$(29) \qquad A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) die folgende Form an:

$$(30) \qquad B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4P \neq 0$) hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

(da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I^b gehört). Sodann wird:

$$(31)\qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$(32)\qquad \begin{aligned} \text{entweder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\, x = A_{p-1}, \\ \text{oder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\, x = B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_2} \right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$(33)\qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

dagegen:

$$(34)\qquad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$(35)\qquad A_p - B_p\, x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$(36)\qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\, x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

I[a]. Ist: $|B_{p-1}| > 0$, $|D| > 0$, $|A_p| > 0$,

so sind die Bedingungen (A) und (B) *nothwendig* und *hinreichend* für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$, und zwar hat man:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2\,B_{p-1}},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth bedeutet und $\varepsilon = \pm 1$ vermöge der Ungleichung (21) eindeutig bestimmt ist.

Im Falle $A_p = 0$ hat man[1]):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = 0, \text{ wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

während der Kettenbruch *divergirt*,

$$\text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn unter den Näherungsbrüchen K_μ ($\mu = 1, 2, \ldots p$) einer oder mehrere durch das Verschwinden des Nenners B_μ sinnlos werden. Angenommen nämlich, es sei für irgend ein bestimmtes $\mu = n$: $B_n = 0$ (in welchem Falle dann allemal: $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (19):

$$K_{\lambda p+n} = \frac{x_1 - M^\lambda \cdot x_2}{1 - M^\lambda}, \tag{37}$$

---

1) Beispiel: Für den unendlichen Kettenbruch mit der dreigliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ -\frac{b_2}{1}\right)$$

hat man:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 & B_1 &= b_1 \\ A_2 &= a_1 b_2 & B_2 &= a_2 + b_1 b_2 \\ A_3 &= 0 & B_3 &= a_2. \end{aligned}$$

Der Kettenbruch convergirt also nach Null, wenn $\left|\frac{A_2}{B_3}\right| < 1$, d. h. $|a_2| - |a_1 b_2| > 0$.

sodass alle $K_{\lambda p+n}$ für $\lambda \geq 1$ endlich und bestimmt ausfallen und $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x_1$ wird.

I^b. $D = 0$.

Ist $D = 0$, so hat man:

(38) $(A_{p-1} - B_p)^2 = -4 A_p B_{p-1}$ anders geschrieben: $S^2 = 4P$

(also sicher: $|S| > 0$). Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) fallen dann in die eine zusammen:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = -\frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p}, \tag{39}$$

und es wird daher:

$$\left.\begin{cases} A_{p-1} - B_{p-1}\, x = A_{p-1} - \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) \\ B_{p-1}\, x + B_p \quad = \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) + B_p \end{cases}\right\} = \frac{1}{2} S, \tag{40}$$

sodass Gl. (12) sich zunächst in die Form setzen lässt:

$$H - x = \frac{B_p + B_{p-1}\, x}{B_p + B_{p-1}\, h} \cdot (h - x). \tag{41}$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten $(h - x)$, so wird:

$$\begin{aligned} H - h &= \frac{B_{p-1}(x - h)}{B_p + B_{p-1}\, h} \cdot (h - x) \\ &= -\frac{B_{p-1}}{B_p + B_{p-1}\, x} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \quad \text{(nach Gl. (41))} \\ &= -\frac{2 B_{p-1}}{S} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \quad \text{(nach Gl. (40))}. \end{aligned} \tag{42}$$

Hieraus findet man wieder für: $h = K_{\nu-p}$, also: $H = K_\nu$, die Recursionsformel:

$$K_\nu - K_{\nu-p} = -\frac{2 B_{p-1}}{S} (K_\nu - x)(K_{\nu-p} - x), \tag{43}$$

aus welcher zunächst hervorgeht, dass für: $K_{\nu-p} - x = 0$ auch: $K_\nu - x = 0$ (nämlich: $K_\nu = K_{\nu-p}$) wird und umgekehrt.

Ist also $K_{\nu-p} - x$ von Null verschieden, so gilt das gleiche von $K_\nu - x$, und man kann also in diesem Falle

Gl. (43) durch Division mit $(K_\nu - x) \cdot (K_{\nu-p} - x)$ in die Form setzen:

(44) $$\frac{1}{K_\nu - x} = \frac{1}{K_{\nu-p} - x} + N, \quad \text{wo: } N = \frac{2 B_{p-1}}{S},$$

sodass sich durch Substitution von $\nu = p + \mu, 2p + \mu, \ldots \lambda p + \mu$ und Addition der betreffenden Gleichungen ergiebt:

(45) $$\frac{1}{K_{\lambda p+\mu} - x} = \frac{1}{K_\mu - x} + \lambda N,$$

also schliesslich:

(46) $$K_{\lambda p+\mu} = x + \frac{K_\mu - x}{1 + \lambda N (K_\mu - x)} = x + \frac{A_\mu - B_\mu x}{B_\mu + \lambda N (A_\mu - B_\mu x)}$$

und:

(47) $$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x.$$

Ist andererseits für irgend ein $\mu = m$: $K_m = x$, so folgt auf Grund der oben gemachten Bemerkung, dass auch: $K_{p+m} = x$, sodann: $K_{2p+m} = x$ u. s. f., d. h. man hat in diesem Falle:

(48) $$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = K_{\lambda p+m} = x.$$

Wird ferner für irgend ein $\mu = n$: K_n sinnlos, also $B_n = 0$ (wobei dann sicher $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (46):

(49) $$K_{\lambda p+n} = x + \frac{1}{\lambda N}, \text{ also ebenfalls: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x.$$

Betrachtet man schliesslich noch den speciellen Fall: $A_p = 0$ (wobei dann: $|A_{p-1}| > 0$, $|B_p| > 0$), so wird hier nach Gl. (38) auch: $A_{p-1} - B_p = 0$ (also: $S = 2 B_p$), d. h. die quadratische Gleichung (I) reducirt sich auf die folgende:

(50) $$B_{p-1} x^2 = 0$$

mit der Doppelwurzel $x = 0$. Die zuvor angestellten Betrachtungen behalten dann durchweg ihre Gültigkeit, man hat lediglich in Gl. (42) — (49) $x = 0$ zu setzen und findet in jedem der betreffenden Fälle:

(51) $$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = 0.$$

Hiernach ergiebt sich also der Satz:

I[b]. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \ D = 0$

so *convergirt* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ in jedem Falle gegen den Werth:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\,B_{p-1}} = -\frac{2\,A_p}{A_{p-1} - B_p}$$

und man hat speciell:

$$x = 0, \text{ falls: } A_p = 0.$$

Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten:

$$\text{II.} \quad B_{p-1} = 0.$$

Aus: $A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = -P$, wo: $|P| > 0$, folgt dann, dass allemal:

(52) $$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0.$$

Der Werth x des Kettenbruches, falls derselbe überhaupt convergirt, hätte hier der Relation zu genügen:

(53) $$x = \frac{A_p + A_{p-1}\,x}{B_p}$$

sodass an die Stelle der quadratischen Gleichung (I) die folgende lineare tritt:

(II) $$(B_p - A_{p-1})\,x - A_p = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun folgende Unterfälle zu unterscheiden:

II[a]. $|A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| > 0.$

Man hat also:

(54) $x = \dfrac{A_p}{B_p - A_{p-1}}$ d. h. endlich und von Null verschieden.

Da sodann, wegen $B_{p-1} = 0$, die Beziehung besteht:

(55) $$H \equiv \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,h}{B_p},$$

so folgt:

$$H-x=\frac{A_{p-1}}{B_p}\cdot h+\frac{A_p}{B_p}-\frac{A_p}{B_p-A_{p-1}}=\frac{A_{p-1}}{B_p}\cdot h-\frac{A_{p-1}A_p}{B_p(B_p-A_{p-1})},$$

d. h.

$$(56)\qquad H-x=M\cdot(h-x),\quad \text{wo: } M=\frac{A_{p-1}}{B_p}$$

und hieraus, analog wie im Falle I[a]:

$$(57)\qquad K_{\lambda p+\mu}-x=M^{\lambda}\cdot(K_{\mu}-x)\quad(\mu=1,2,\ldots p).$$

Hieraus erkennt man, dass der Kettenbruch sicher divergirt, wenn $|M|\geqq 1$ (wobei der Fall $M=1$, d. h. $B_p-A_{p-1}=0$ auf Grund der Voraussetzung vorläufig noch ausgeschlossen erscheint). Aber auch im Falle $|M|<1$ findet Divergenz statt. Hier wird zwar:

$$(58)\qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu}=x,$$

sobald μ einen solchen Index bedeutet, für welchen K_{μ} eine bestimmte Zahl vorstellt. Dagegen wird $K_{\lambda p+\mu}$ für jedes λ gleichzeitig mit K_{μ} sinnlos, und da dies, wegen $B_{p-1}=0$, für $\mu=p-1$ sicher (eventuell auch noch für andere Werthe von μ) der Fall ist, so enthält die Folge der Näherungsbrüche $K_{\lambda p+\mu}$ allemal unbegrenzt viele sinnlose[1]), sodass also der unendliche Kettenbruch als divergent bezeichnet werden muss[2]).

---

[1]) Dies wurde von Herrn Landsberg (a. a. O. p. 287) übersehen, sodass er in dem betreffenden Falle Convergenz deducirt.

[2]) Beispiel: Der Kettenbruch mit der 3 gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1},\ -\frac{b_1}{1},\ \frac{a_2}{b_2}\right).$$

Man hat:

$$B_2=0$$

und allgemein:

$$B_{3\lambda+2}=0\quad(\lambda=1,2,3,\ldots).$$

$$\mathrm{II^b}.\quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| = 0.$$

Da hier $A_{p-1} = B_p$, so lässt sich Gl. (54) in die Form setzen:

(59) $$H = \frac{A_p + B_p h}{B_p} = h + \frac{A_p}{B_p}$$

sodass sich ergiebt:

(60) $$K_{\lambda p+\mu} = K_\mu + \lambda \cdot \frac{A_p}{B_p},$$

d. h. der Kettenbruch divergirt nach ∞ (mit dem Vorzeichen von $\frac{A_p}{B_p}$).

$$\mathrm{II^c}.\quad A_p = 0.$$

Man hat hier aus Gl. (54):

(61) $$H = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h$$

und daher:

(62) $$K_{\lambda p+\mu} = \left(\frac{A_{p-1}}{B_p}\right)^\lambda \cdot K_\mu.$$

Der Kettenbruch ist also, wie auch $\left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right|$ beschaffen sein möge, schon aus dem Grunde divergent, weil die Reihe der Näherungsbrüche unendlich viele sinnlose (nämlich für $\mu = p - 1$) enthält.

Da hiernach der Kettenbruch im Falle $B_{p-1} = 0$ allemal divergirt, so kann man schliesslich die gefundenen Ergebnisse in folgender Weise zusammenfassen:

Für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p}\right)$ ist *nothwendig*, dass:

$$[1] \qquad |B_{p-1}| > 0. \text{ [1]}$$

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*, wenn: $D \equiv (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1} = 0$ und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Ist dagegen $D > 0$, so ist weiter *nothwendig*, dass:

$$[2] \qquad \left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \quad (\text{wo: } S = A_{p-1} + B_p). \text{ [2]}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich $\varepsilon \cdot \sqrt{D}$ (wo $\varepsilon = \pm 1$ und $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der Quadratwurzel bedeutet) eindeutig so fixiren, dass:

$$|S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}| < |S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}|,$$

sodass also:

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}$$

eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen. Im Falle $|A_p| > 0$ convergirt alsdann der Kettenbruch gegen den Werth x_1, sofern $p \leqq 2$, während für $p \geqq 3$ noch die folgende Bedingung als *nothwendig und hinreichend* hinzutreten muss:

$$[3] \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots (p-2)).$$

---

[1]) Ist $p = 1$, so hat man nach üblicher Weise zu setzen:

$$B_{p-1} \equiv B_0 = 1,$$

sodass also die fragliche Bedingung hier stets eo ipso erfüllt ist. Im übrigen hat man in diesem Falle:

$$A_{p-1} = 0,\ A_p = a_1,\ B_p = b_1,\ S = b_1,\ D = b_1^2 + 4\, a_1.$$

[2]) Die Bedingung [2] lässt sich mit Rücksicht auf Gl. (24^a), (24^b) auch folgendermaassen formuliren:

Es darf *keine* Relation bestehen von der Form:

$$S^2 = 4\, \vartheta P \quad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

oder anders geschrieben:

$$D = -4\, \eta P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In dem besonderen Falle $A_p = 0$ lässt sich die Bedingung [2] durch die folgende ersetzen:

$$[2^a] \qquad \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1$$

und man hat alsdann $x_1 = 0$ als Grenzwerth des Kettenbruches.

Sind S und D reell, was offenbar insbesondere stets der Fall ist, wenn die a_ν, b_ν durchweg reell sind, so besteht offenbar die Divergenz-Bedingung (24): $\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0$ im Falle $D > 0$ ausschliesslich dann, wenn $S = 0$; dagegen im Falle $D < 0$ für jedes S.

Da andererseits im Falle $D > 0$, $|S| > 0$ von den beiden Werthen des Ausdruckes

$$S + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \quad \text{(wo jetzt: } \sqrt{D} > 0)$$

derjenige der numerisch grössere ist, bei welchem ε gleiches Vorzeichen mit S besitzt, also: $\varepsilon = \frac{S}{|S|}$ gesetzt werden kann, so gewinnt man hier die folgende einfachere Formulirung:

Sind S, D *reell* (eventuell auch *Null*), so ist für die *Convergenz* des fraglichen Kettenbruches *nothwendig:*

$$|B_{p-1}| > 0 \quad |S| > 0 \quad D \geq 0.$$

Diese Bedingungen sind auch *hinreichend* im Falle $D = 0$[1]) und für $p \leq 2$ auch im Falle $D > 0$, und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{1}{2B_{p-1}}\left\{A_{p-1} - B_p + \frac{S}{|S|}\cdot\sqrt{D}\right\}.$$

[1]) Die Bedingung $|S| > 0$ ist in diesem Falle stets eo ipso erfüllt: s. Gl. (38), p. 475.

Im Falle $p \geqq 3$ ist jedoch noch erforderlich, dass:

$$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, \ldots (p-2)),$$

wo:

$$x_2 = \frac{1}{2 B_{p-1}} \left\{ A_{p-1} - B_p - \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{D} \right\}.$$

---

§ 2. Der einem rein periodischen Kettenbruche conjugirte Kettenbruch.

Bedeutet K einen unendlichen rein periodischen Kettenbruch mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$, so soll als zu K conjugirt derjenige unrein periodische Kettenbruch K' bezeichnet werden, welcher besteht aus dem Anfangsgliede b_p und einem rein periodischen Kettenbruche mit der Periode $\left(\frac{a_p}{b_{p-1}}, \frac{a_{p-1}}{b_{p-2}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}\right)$, also:

$$K' \equiv \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}, \ldots\right). \tag{63}$$

Für den Fall $p = 1$, in welchem diese Definition keinen Sinn besitzt, hat man zu setzen:

$$K' \equiv \left(b_1; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots\right) \text{ d. h. } \equiv b_1 + K. \tag{64}$$

Wenn nun in dem zuletzt bezeichneten Falle der Kettenbruch K überhaupt convergirt, so hat man [1]):

$$\left\{\begin{array}{lll} & K = x_1 = \frac{1}{2}(b_1 + \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4 a_1}), & \text{wenn: } |b_1^2 + 4 a_1| > 0, \\ \text{bezw.} & K = x \;= \frac{1}{2} b_1, & \text{wenn: } b_1^2 + 4 a_1 = 0, \end{array}\right. \tag{65}$$

und daher:

$$\left\{\begin{array}{lll} & K' = -\frac{1}{2}(b_1 - \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4 a_1}) & \text{d. h. } = -x_2, \\ \text{bezw.} & K' = -\frac{1}{2} b_1 & \text{d. h. } = -x. \end{array}\right. \tag{66}$$

---

[1]) Vgl. p. 480, Fussnote 1).

Um nachzuweisen, dass ein ganz analoger Zusammenhang zwischen K und K' auch für $p \geqq 2$ stattfindet, schicken wir zunächst die folgende Hülfsbetrachtung voraus. Setzt man:

(67ᵃ) $$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{R_2}\right) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{R_2}},$$

so folgt:

(67ᵇ) $$-R_2 = \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}} = \left(\frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right),$$

und umgekehrt.

Substituirt man:

$$R_2 = b_2 + \frac{a_3}{R_3},$$

so wird:

(68ᵃ) $$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{R_3}\right),$$

und zunächst:

$$-\frac{a_3}{R_3} = b_2 + \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}},$$

also:

(68ᵇ) $$-R_3 = \left(\frac{a_3}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right) \text{ — vice versa.}$$

Angenommen, es bestehen für irgend ein bestimmtes n allemal gleichzeitig die beiden Relationen:

(69) $$\begin{cases} H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{R_n}\right) \\ -R_n = \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \cdots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right), \end{cases}$$

so folgt durch die Substitution:

$$R_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}$$

zunächst:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_n}{b_n}, \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}\right)$$

und:

$$-\frac{a_{n+1}}{R_{n+1}} = b_n + \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right)$$

also schliesslich:

$$-R_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{b_n}, \frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right).$$

Damit ist aber die Allgemeingültigkeit der Beziehungen (69) erwiesen, da deren Richtigkeit für $n = 2, 3$ bereits erkannt wurde.

Setzt man jetzt in Gl. (69)

(70) $\quad n = p \geq 2, \quad H = -H', \quad R_p = b_p - h',$

so ergeben sich als allemal gleichzeitig bestehend die Beziehungen:

$$(71)\quad \begin{cases} H' = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_p - h'}\right) \\ h' = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{H'}\right). \end{cases}$$

Zugleich besteht dann aber, falls $|D| > 0$, zwischen h' und H' die folgende, aus Gl. (10) und (14) für $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende Relation:

$$(72)\quad \frac{h' + x_2}{h' + x_1} = M \cdot \frac{H' + x_2}{H' + x_1} \quad \left(\text{wo: } M = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\right).$$

Bezeichnet man jetzt die Näherungsbrüche des oben mit K' bezeichneten unrein periodischen Kettenbruches mit

$$K'_\nu \equiv \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots.),$$

sodass also insbesondere:

$$(73)\quad \begin{cases} K'_0 = b_p \\ K'_1 = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K'_p = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}\right), \end{cases}$$

so hat man für $\nu \geqq p$:

(74) $$K'_\nu = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1}{K'_{\nu-p}}\right),$$

also, wie die Vergleichung mit (71) zeigt, $h' = K'_\nu$ für: $H' = K'_{\nu-p}$. In Folge dessen ergiebt sich aber aus Gl. (72):

(75) $$\frac{K'_\nu + x_2}{K'_\nu + x_1} = M \cdot \frac{K'_{\nu-p} + x_2}{K'_{\nu-p} + x_1}$$

und hieraus, analog wie in § 1:

(76) $$\frac{K'_{\lambda p+\mu} + x_2}{K'_{\lambda p+\mu} + x_1} = M^\lambda \cdot \frac{K'_\mu + x_2}{K'_\mu + x_1} \quad (\mu = 0, 1, \dots (p-1)),$$

also:

(77) $$K'_{\lambda p+\mu} = -x_2 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A'_\mu + B'_\mu x_2}{(A'_\mu + B'_\mu x_1) - M^\lambda (A'_\mu + B'_\mu x_2)}$$

und daher, falls $|M| < 1$:

(78) $$\lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x_2,$$

sofern noch die Bedingung erfüllt ist:

(79) $|A'_\mu + B'_\mu x_1| > 0$, zunächst für: $\mu = 0, 1, \dots (p-1)$.

Es lässt sich aber auch hier wiederum zeigen, dass diese Bedingung für die beiden letzten Werthe $\mu = p-2$, $p-1$ nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Um dies nachzuweisen, hat man nur A'_μ, B'_μ für $\mu = p-2$, $p-1$ durch entsprechende A_μ, B_μ auszudrücken, was auf folgende Weise geschehen kann. Setzt man:

(80) $$\begin{aligned} \frac{q}{r} &= \left(\frac{a_1}{b_1},\ \dots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}},\ \frac{a_p}{b_p - h'}\right) \\ &= \frac{-A_{p-1} h' + A_p}{-B_{p-1} h' + B_p}, \end{aligned}$$

so folgt aus Gl. (71):

$$h' = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1 r}{-q}\right)$$

$$(81) \qquad = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_3}{b_2},\ \frac{a_2 q}{b_1 q - a_1 r}\right).$$

Andererseits ergiebt sich aus Gl. (80):

$$(82) \qquad h' = \frac{A_p r - B_p q}{A_{p-1} r - B_{p-1} q}$$

und daher, durch Combination von Gl. (81), (82), für $r = 0$ bezw. $q = 0$:

$$(83) \qquad \begin{cases} \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \dfrac{a_3}{b_2}\right) = \dfrac{A_p}{A_{p-1}} \\[2ex] \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \dfrac{a_3}{b_2},\ \dfrac{a_2}{b_1}\right) = \dfrac{B_p}{B_{p-1}} \end{cases}$$

Da aber aus den Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} A_1 = a_1 & A_2 = a_1 b_2 & A_{\nu+1} = a_{\nu+1} A_{\nu-1} + b_{\nu+1} A_\nu \\ B_1 = b_1 & B_2 = a_2 + b_1 b_2 & B_{\nu+1} = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + b_{\nu+1} B_\nu \end{array} \quad (\nu \geqq 2)$$

resultirt, dass A_p, A_{p-1} formal (d. h. für ganz beliebige a_ν, b_ν) den grössten gemeinsamen Theiler a_1, dagegen B_p und B_{p-1} überhaupt keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so folgt aus Gl. (83):

$$(84) \qquad \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}} \equiv \frac{a^{-1} \cdot A_p}{a^{-1} \cdot A_{p-1}}, \qquad \frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} \equiv \frac{B_p}{B_{p-1}}.$$

Da ferner x_1 eine Wurzel der quadratischen Gleichung (I) (p. 466), so hat man:

$$(85) \qquad (B_p + B_{p-1} x_1) \cdot x_1 = A_p + A_{p-1} x_1,$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (84):

$$(86) \qquad (A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1) \cdot x_1 = (A'_{p-2} + B'_{p-2} x_1) \cdot a_1.$$

Daraus erkennt man aber, dass die Beziehung:

$$A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1 = 0$$

allemal die folgende:

$$A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0$$

nach sich ziehen würde und, sofern nur $|x_1| > 0$, auch umgekehrt: man hätte dann also: $\frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}}$, was wiederum unmöglich ist. Da andererseits im Falle $x_1 = 0$ nach Gl. (85) auch $A_p = 0$ sein muss, so ergiebt sich, wenn man den Fall $A_p = 0$ vorläufig ausschliesst, dass die Bedingung (79) in der That nur für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ gefordert zu werden braucht, sodass sie also überhaupt nur für $p > 3$ in Betracht kommt.

Was sodann den vorläufig ausgeschlossenen Fall $A_p = 0$ betrifft, so hat man nach Gl. (33) zu setzen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}},\ \text{wenn:}\ \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

und somit:

(87) $\quad A_p + A_{p-1}\, x_1 = 0, \quad$ d. h. $A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0,$

sodass also in diesem Falle die Bedingung (79) für $\mu = p-2$ nicht erfüllt ist und der Kettenbruch K' daher divergirt.

Dagegen hat man nach Gl. (34):

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}},\ x_2 = 0,\ \text{wenn:}\ \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1,$$

also $x_1 > 0$: der Kettenbruch K' convergirt also in diesem Falle nach $-x_2 = 0$, sofern nur die Bedingung (79) für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ erfüllt ist. —

Ist jetzt $D = 0$, so tritt an die Stelle von Gl. (72), die folgende, aus Gl. (42) durch Substitution von $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende:

(88) $\quad h' - H' = -\frac{2B_{p-1}}{S}(h'+x)\cdot(H'+x) \quad \left(\text{wo: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2B_{p-1}}\right),$

sodass für: $H' = K'_{\nu-p}$, also: $h' = K'_\nu$ (s. Gl. (71)), sich ergiebt:

(89) $\quad K'_\nu - K'_{\nu-p} = -N(K'_\nu + x)\cdot(K'_{\nu-p} + x) \quad \left(\text{wo: } N = \frac{2B_{p-1}}{S}\right)$

und, falls $|K'_{\nu-p} + x| > 0$ und somit auch $|K'_\nu + x| > 0$:

$$\frac{1}{K'_\nu + x} = \frac{1}{K'_{\nu-p} + x} + N. \tag{90}$$

Daraus folgt dann, genau wie in § 1, I[b]:

$$\frac{1}{K'_{\lambda p+\mu} + x} = \frac{1}{K'_\mu + x} + \lambda N \tag{91}$$

und:

$$\lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x. \tag{92}$$

Ist aber für irgend ein $\mu = m$: $K'_m + x = 0$, so folgt aus Gl. (89), dass $K'_{p+m} = K'_m = -x$, und allgemein: $K'_{\lambda p+m} = -x$, also auch:

$$\lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+m} = -x. \tag{93}$$

Dieses Resultat gilt auch wiederum noch in dem besonderen Falle $A_p = 0$, d. h. $x = 0$. Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Ist $|D| > 0$ und convergirt der Kettenbruch K nach x_1, so convergirt $-K'$ nach x_2, sofern für $p > 3$ noch die Bedingung erfüllt ist:

$$|A'_\mu + B'_\mu x_1| > 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots (p-3)).$$

Nur im Falle: $A_p = 0$, $|A_{p-1}| < |B_p|$, in welchem $K = 0$ wird, ist K' *divergent;* während für: $A_p = 0$, $|A_{p-1}| > |B_p|$ zwar K *divergirt*, dagegen K' nach 0 *convergirt.*

Ist $|D| = 0$ und $|B_{p-1}| > 0$, so hat man:

$$K = -K' = x \text{ d. h. } = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$