Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

OF THE
UNIVERSITY

München.

Verlag der k. Akademie.

1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Die natürliche Belegung H einer stetig gekrümmten Oberfläche ω ist durch die Bedingungen definiert:

$$1)\quad \begin{cases} \int\limits_\omega H \dfrac{d\omega}{r} = \text{const.} = \Gamma \text{ (im Innern von } \omega), \\ \int\limits_\omega H\, d\omega = 1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $d\omega$ irgend ein Element der Fläche ω und r die Entfernung

$$d\omega \rightarrow (xyz),$$

wenn (xyz) irgend einen variabeln Punkt vorstellt. Die Funktion H ist stets positiv, da Γ positiv,[1]) somit

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r} \right|_a \equiv 4\pi H \quad (\nu \text{ innere Normale})$$

ebenfalls positiv sein muss.

---

[1]) Setzt man

$$V = \int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r},$$

so ist:

$$\int\limits_a \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = 4\pi\Gamma \int\limits_\omega H\, d\omega,$$
$$= 4\pi\Gamma.$$

Ich will in dieser Abhandlung beweisen,[1]) dass H auch nicht $= 0$ sein kann, ein Resultat, das für das Studium der Niveauflächen $\int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} =$ const. von Wichtigkeit ist:

Die natürliche Belegung jeder stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω[2]) ist an jedem Punkte von ω grösser als eine von null verschiedene, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Zahl.

Wir brauchen zum Beweise den folgenden Hilfssatz:

Es sei in der xy Ebene (R) ein Kreis mit dem Radius R um den Anfangspunkt O; $p(x, o)$ ein Punkt der x Axe mit dem Centralabstande $x = r_0 (< R)$; $p'(r_0' o)$ der demselben in Bezug auf den Kreis konjugierte Punkt. Wir machen $Oq = \frac{r_0}{3}$, erreichten in q die Senkrechte zur x Axe, welche den Kreis in C und C' schneiden möge, bezeichnen mit $N_1 N_2$ die Schnittpunkte der Graden Cp und $C'p$ mit dem Kreise und mit BB' die Schnittpunkte der y Axe mit dem Kreise, dann wird die Funktion:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right\},$$

in der r die Entfernung und Richtung von einem variabeln Punkte des Kreises

$$(\xi\eta) \rightarrow p,$$

r' die Entfernung und Richtung

$$(\xi\eta) \rightarrow p',$$

---

[1]) Den analogen Beweis in der Ebene habe ich in meinem Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348—354 gegeben.

[2]) Wie bei dem analogen Satze in der Ebene (Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348—354) schliessen wir Singularitäten der Fläche ω aus, indem wir stillschweigend voraussetzen, dass die abteilungsweise Monotonität von $\cos(\nu x)$ $\cos(\nu y)$ $\cos(\nu z)$ nicht blos für ω, sondern für jede Fläche gilt, welche durch eine Transformation nach reciproken Radien aus ω entsteht.

ν die innere Normale des Kreises in $(\xi\eta)$ vorstellt, (als Funktion von $(\xi\eta)$ betrachtet) auf dem Bogen $\widehat{N_1 B B' N_2}$ stets positiv sein und zwar

$$> \frac{r_0}{16 R^4}$$

auf dem Teile BB' dieses Bogens.

Die Funktion:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)$$

ist für jeden beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ des Kreises $= 0$.

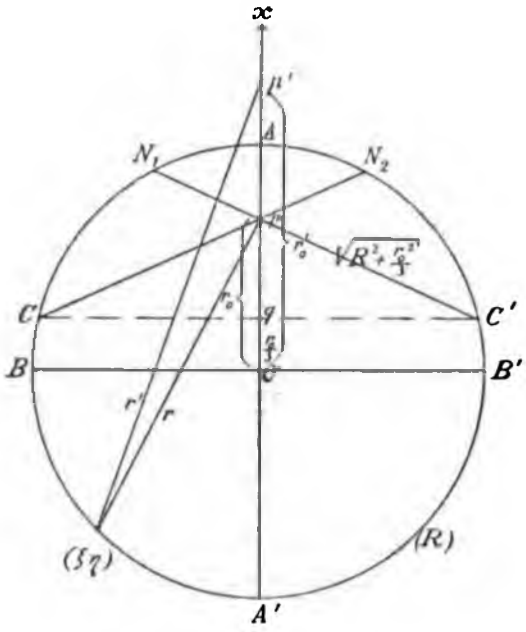

Fig. 1.

Es ist in der That:[1])

$$\frac{r'}{r} = \frac{r'_0}{R} = \frac{R}{r_0},$$

---

[1]) Man vergleiche Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 349 u. 287.

somit:

$$2)\qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)=0,$$

ferner:

$$-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r}-\frac{\cos(r'\nu)}{r'}\right)\frac{1}{r},$$

$$=\frac{r_0^2-R^2}{Rr^3};^{1)}$$

hieraus folgt durch Differentiation nach x (d. i. r_0):

$$3)\left\{\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)&=\frac{2r_0}{Rr^3}+3\cos(rx)\frac{R^2-r_0^2}{Rr^4},\\ &=\frac{r^2(r_0^2+3R^2)-3(R^2-r_0^2)^2}{2Rr_0r^5},\end{aligned}\right.$$

mit Rücksicht darauf, dass:

$$R^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(rx),$$

somit:

$$\cos(rx)=\frac{r^2+r_0^2-R^2}{2rr_0}.$$

Die rechte Seite in 3) kann nur verschwinden, falls:

$$r=\frac{R^2-r_0^2}{\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}}$$

oder:

$$r\cdot\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}=(R+r_0)(R-r_0)=pA'\cdot pA,$$

(wenn A und A' die Schnittpunkte der x Axe mit dem Kreise vorstellen), also nur in den Punkten N_1 und N_2; nur in diesen Punkten kann der Ausdruck 3) das Zeichen wechseln. Lassen wir $(\xi\eta)$ nach A rücken ($r=R-r_0$), so wird die rechte Seite

[1] Man vergleiche die erste Formel ib. S. 350.

$$= -\frac{3R + r_0}{R(R - r_0)^3}, \text{ also negativ,}$$

lassen wir $(\xi\eta)$ nach A' rücken $(r = R + r_0)$, so wird die rechte Seite:

$$= \frac{3R - r_0}{R(R + r_0)^3}, \text{ also positiv,}$$

es ist somit die rechte Seite stets positiv auf dem Bogen $N_1 A' N_2$, negativ auf dem Bogen $N_1 A N_2$. Beschränken wir uns auf den Bogen $BA'B'$, so ist die rechte Seite, da dann stets $r > R$:

$$\geqq \frac{R^2(r_0^2 + 3R^2) - 3(R^2 - r_0^2)^2}{2Rr_0 r^5} = \frac{(7R^2 - 3r_0^2)\, r_0}{2Rr^5},$$

oder da $r \leqq 2R$, $7R^2 - 3r_0^2 \geqq 4R^2$, auch:

$$\geqq \frac{r_0}{16R^4}.$$

Damit ist der Hilfssatz in allen seinen Teilen bewiesen.[1])

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über. Es sei p irgend ein Punkt der gegebenen Fläche ω; wir nehmen die innere Normale der Fläche in p zur x Axe, markieren auf der äusseren Normalen einen Punkt O in der Entfernung r_0 von p und schlagen um O als Centrum eine Kugel mit dem Radius $r_0 + \varepsilon$. Irgend eine von der x Axe begrenzte Halbebene wird aus der Kugelfläche den Halbkreis ABA' und aus ω ein Kurvenstück pQ.. ausschneiden; wir werden dadurch, dass wir r_0 und ε genügend klein machen, stets erreichen können, dass dieses Kurvenstück von dem Halbkreis ABA' nur in einem Punkte Q getroffen wird, oder jedenfalls in einer endlichen Zahl von Punkten $Q_1 Q_2 \ldots$;[2])

[1]) Der Satz ist ein Analogon des von C. Neumann für die Untersuchung in der Ebene abgeleiteten Hilfssatzes (C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1887 S. 699, man vgl. mein Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348).

[2]) Infolge der Voraussetzung Anm. S. 426.

wir beschränken uns auf den ersteren Fall, die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall ist ohne jede Schwierigkeit. Wir konstruieren endlich in der dem obigen Hilfssatze entsprechenden Weise (man vgl. die Figur) den dem Punkt p zugeordneten Punkt N auf dem Halbkreise ABA', und es wird für unseren Beweis ganz gleichgültig sein, ob N auf dem Teile AQ oder auf dem Teile QBA' dieses Halbkreises liegt.[1])

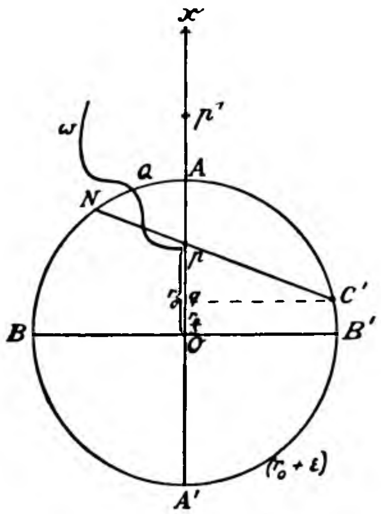

Fig. 2.

Es ist nun:

$$4)\qquad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

eine Potentialfunktion des von ω und der Kugelfläche begrenzten Gebietes, dessen Querschnitt von $pQNBA'p$ begrenzt wird; es ist somit für jeden Punkt dieses Gebietes:

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{Qp} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{Qp} V\frac{\cos(rn)}{r^2}\,d\omega$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} V\frac{\cos(rn)}{r^2}\,d\omega,$$

wenn der Index Qp die Integration über den der Fläche ω angehörenden Teil der Grenzfläche[2]) andeutet und der Index QBA' die Integration über den Teil der Grenzfläche, welcher der Kugelfläche angehört. Wir können die letzte Gleichung auch so schreiben:

---

[1]) Ist ω überall konvex, so liegt N stets auf dem Teile AQ (bei genügend kleinem r_0 und $\frac{\varepsilon}{r_0}$).

[2]) n die in das Gebiet hineingehende Normale.

$$
5\text{a)}\left\{\begin{aligned} V - \Gamma = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\,\frac{\cos(rn)}{r^2}\,d\omega \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{d\omega}{r}. \end{aligned}\right.
$$

Dagegen ist für das Aussengebiet der durch die Abkürzungen Qp und QBA' bezeichneten Flächen:

$$
5\text{b)}\left\{\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{d\omega}{r'} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\,\frac{\cos(r'n)}{r'^2}\,d\omega \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{d\omega}{r'}. \end{aligned}\right.
$$

Wir bilden die erste Formel für den Punkt p, die zweite für den zu p in bezug auf die Kugelfläche konjugierten Punkt p',[1]) subtrahieren die zweite von der ersten, nachdem wir dieselbe noch mit $\frac{R}{r_0}$ multipliciert haben, dann folgt:

$$
6)\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p^{2)} = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right)d\omega \\ &+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QBA'}(V-\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\,\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)d\omega \\ &+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial \nu}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right)d\omega, \end{aligned}\right.
$$

somit unter Berücksichtigung unseres Hilfssatzes:

---

[1]) Durch genügende Verkleinerung von ε können wir stets erreichen, dass p' in dem Aussengebiete liegt, für welche die Formel 5b) gilt.

[2]) Indem wir zunächst den Punkt p variabel annehmen; erst nach der Differentiation soll derselbe unendlich nahe an ω heranrücken.

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p \overline{>} & \frac{V_0 r_0}{32(r_0+\varepsilon)^2} \\ & -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{QN}(\Gamma - V)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right) d\omega \\ & + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{Qp}\frac{\partial V}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right) d\omega, \end{aligned}\right.$$

wenn V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf dem durch BA' dargestellten Teile der Kugelfläche darstellt. Von der Fläche QN ist in der zweiten Zeile nur der zwischen dem Pole A und dem Breitenkreise N gelegene Teil zu berücksichtigen.[1])

Wir wollen zeigen, dass wir die dritte Zeile

$$= (\text{endliche Konstante}) \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p + E_1$$

machen können, wo E_1 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es folgt dies leicht, da $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ an ω eindeutig und stetig ist, ferner bei genügend kleinem ε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\frac{R^3}{r_0^3} + \frac{\varrho}{r}\cdot a,$$

wo ϱ die Entfernung $d\omega \rightarrow p$ und a eine endliche Grösse vorstellt, unter Berücksichtigung des Satzes IVa S. 33 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I und der Bemerkung, dass das Integral:

$$\int\limits_{Qp}\frac{\varrho}{r^2}\,d\omega$$

durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann (da $\varrho \overline{<}$ endl. Konst. r).

---

[1]) Bei überall konvexen Flächen fällt also die zweite Zeile fort.

Die zweite Zeile in der Formel 8) formen wir um, indem wir bedenken, dass:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\frac{\cos(\nu x)-3\cos(r x)\cos(r\nu)}{r^3}$$
$$-\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(\nu x)-3\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3};$$

somit ist dieselbe, da wir $\cos(\nu x)$ durch Verkleinerung von ε beliebig nahe an (-1) heranrücken lassen können:

$$\overline{\gtrless}\ \frac{3}{4\pi}\int\limits_{QN}(\Gamma-V)\left[\frac{\cos(r x)\cos(r\nu)}{r^3}+\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3}\right]d\omega,$$

oder, da wir in der Gleichung:

$$\Gamma-V=r\left(-\frac{\partial V}{\partial \nu}\cos(r\nu)^{1)}+\varepsilon'\right)$$

auf QN die Grössen ε' und $\cos(r\nu)$ durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken können,

$$\overline{\gtrless}\ E_2,$$

wo E_2 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann; wir erhalten somit:

$$\text{8)}\qquad \text{endl. Konst.}\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p\ \overline{\gtrless}\ \frac{V_0 r_0}{32(r_0+\varepsilon)^2}+E_1+E_2$$

und durch Uebergang zur Grenze $(\varepsilon=0)$:

$$\text{9)}\qquad \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p\ \overline{>}\ \frac{4\pi}{N},$$

wo:

$$\text{10)}\qquad N=\text{endl. Konst.}\ \frac{128\,\pi\, r_0}{V_0}$$

---

[1]) ν innere Normale der Kugelfläche.

eine endliche Konstante vorstellt, da jetzt V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf der Halbkugel BA' im Falle $\varepsilon = 0$ repräsentiert, somit der Ungleichung:

$$V_0 > 0$$

in strengem Sinne genügt (Zusatz 4 zu VII S. 203 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I). Wegen der Identität:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 4\pi H$$

folgt jetzt:

$$H > \frac{1}{N} \tag{11}$$

und damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.