BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Teilmengenäquivalenzen

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 21. April 1972

1. Mathematische Strukturen werden als Teilmengen von Produktmengen gedeutet und die Schöpfung neuer Strukturen kommt häufig durch Abstraktionen, d. h. Äquivalenzbildungen zustande; dies läßt ein systematisches Studium von Teilmengenäquivalenzen für geboten erscheinen. Im folgenden werden drei verschiedene solche Äquivalenzen betrachtet, die „Fülläquivalenz", die „Treffäquivalenz" und die „Spuräquivalenz"; sie leiten sich aus der Mengengleichheitsdefinition ab durch „Vernachlässigung", d. h. dadurch, daß man nunmehr nicht verlangt, daß alle für die Prüfung der Teilmengenidentität erforderlichen Einzeltests (jedes Element der einen Menge ist auch ein Element der anderen) positiv ausfallen, sondern dies nur für eine vereinbarte kleinere Menge von Einzeltests zur Bedingung macht. Für jede der genannten Äquivalenzarten wird eine direkte Kennzeichnung angegeben, wobei im ersten Fall eine Kernoperation, im zweiten eine Hüllenoperation und im dritten ein Filter eine wesentliche Rolle spielen. Die beiden ersten Äquivalenzen sind zueinander dual, die zur dritten duale Äquivalenz führt auf die typischen Vernachlässigungsteilmengensysteme. Auf das Konsistenzverhalten der betrachteten Äquivalenzen bzgl. anderer Relationen wird nicht eingegangen; jedoch läßt sich aus der Definitionsbedingung der fraglichen Äquivalenz in natürlicher Weise eine teilweise Ordnung der betreffenden Äquivalenzklassen ableiten, die mit der ursprünglichen Inklusionsordnung der Teilmengen konsistent ist. Am Schluß wird noch die Dualitätsfrage angesprochen.

2. Wir betrachten eine nicht-leere Menge S und deren Teilmengen A, B, ... Wir wollen Teilmengenäquivalenzen gewinnen durch verschiedene Abschwächungen der Mengengleichheitsdefinition

$$(0) \qquad A = B :\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in S} x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

der wir zunächst andere Formen geben. Wir können für die rechte Seite von (0) auch schreiben:

$$(1) \qquad \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}_1} T \subset A \Leftrightarrow T \subset B,$$

wobei $\mathfrak{T}_1 := \{\{x\} : x \in S\}$, oder

$$(2) \qquad \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}_2} T \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow T \cap B \neq \varnothing,$$

mit $\mathfrak{T}_2 := \mathfrak{T}_1$, oder

$$\bigvee_{T \in \mathfrak{T}_3} \bigwedge_{x \in T} x \in A \Leftrightarrow x \in B, \text{ kürzer}$$

$$(3) \qquad \bigvee_{T \in \mathfrak{T}_3} T \cap A = T \cap B, \text{ wobei}$$

$\mathfrak{T}_3 := \{S\}$.

3. Lassen wir nun in (1), (2) und (3) anstelle der dort angegebenen „Testmengensystemen" $\mathfrak{T}_i$ allgemeinere Systeme $\subset \mathfrak{P}(S)$ treten, so erhalten wir Beziehungen zwischen A und B allgemeinerer Art; wir wollen es dabei so einrichten, daß sich Teilmengenäquivalenzen ergeben, d. h. daß Reflexivität, Symmetrie und Transitivität vorliegen.

3.1. In dieser Hinsicht sind bei (1) und (2) keinerlei Forderungen an $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zu stellen: (1) definiert eine Äquivalenz $A \sim_1 B$, die durch $\mathfrak{T}_1$ erzeugte „Fülläquivalenz" – man vergleicht die Mengen hinsichtlich ihres Verhaltens, sich mit Mengen aus $\mathfrak{T}_1$ füllen zu lassen –; (2) definiert eine Äquivalenz $A \sim_2 B$, die durch $\mathfrak{T}_2$ erzeugte „Treffäquivalenz" – man vergleicht die Mengen hinsichtlich des Treffens mit Mengen aus $\mathfrak{T}_2$.

Bemerkung. Definiert man eine Relation $A \underset{\sim}{\subset} B$ mit Bezug auf (1) durch

$$(1') \qquad \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}_1} T \subset A \Rightarrow T \subset B,$$

und hinsichtlich (2) durch

$$(2') \qquad \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}_2} T \cap A \neq \varnothing \Rightarrow T \cap B \neq \varnothing,$$

so werden dadurch die entsprechenden Äquivalenzklassensysteme teilweise geordnet: $[A] \subset [B] :\asymp A \subseteq B$, und zwar liegt Konsistenz bzgl. der ursprünglichen Teilmengenordnung vor:

$$A \subset B \succ [A] \subset [B],$$

was leicht zu bestätigen ist.

3.2. Dagegen ist die durch (3) erklärte Relation $A \sim_3 B$ bei beliebigem $\mathfrak{T}_3 \subset \mathfrak{P}(S)$ im allgemeinen keine Äquivalenz. Um für den Äquivalenzcharakter von $\sim_3$ eine notwendige und hinreichende Eigenschaft von $\mathfrak{T}_3$ angeben zu können, wollen wir zunächst einen trivialen Fall ausschließen: $\mathfrak{T}_3$ soll die leere Menge nicht enthalten ($\varnothing \in \mathfrak{T}_3$ würde zur Folge haben, daß gemäß (3) jede Menge A zu jeder Menge B in Relation steht: „totale Permissivität"). Wir setzen also voraus, daß $\varnothing \notin \mathfrak{T}_3$. Mit dieser Voraussetzung können wir dann so weiter schließen: (3) ist in jedem Fall in A und B symmetrisch. Für die Reflexivität, d. h. für die Forderung, daß (3) für $A = B$ stets erfüllt ist, ist $\mathfrak{T}_3 \neq \varnothing$ offensichtlich notwendig und hinreichend. Und schließlich ergibt sich, daß für die Transitivität von $\sim_3$ unter der Voraussetzung

$$\varnothing \notin \mathfrak{T}_3 \neq \varnothing \tag{4}$$

die Bedingung

$$\bigwedge\nolimits_{T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_3} \bigvee\nolimits_{T_3 \in \mathfrak{T}_3} T_3 \subset T_1 \cap T_2 \tag{5}$$

notwendig und hinreichend ist.

Beweis. 1. Wenn $A \sim_3 B$ und $B \sim_3 C$, d. h. $T_1 \cap A = T_1 \cap B$ und $T_2 \cap B = T_2 \cap C$ mit $T_i \in \mathfrak{T}_3$, so gibt es ein $T_3 \in \mathfrak{T}_3$ gemäß (5) und für dieses gilt $T_3 \cap A = T_3 \cap B = T_3 \cap C$, also ist $A \sim_3 C$. — 2. Um die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen, nehmen wir an

$$\bigvee\nolimits_{T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_3} \bigwedge\nolimits_{T_3 \in \mathfrak{T}_3} T_3 \not\subset T_1 \cap T_2.$$

Zu diesen T_1, T_2 betrachten wir die Teilmengen

$$A := T_1,\ B := T_1 \cup T_2,\ C := T_2 \cup \complement T_1.$$

Es ist dann $A \sim_3 B$ (mit $T = T_1$ in (3)), $B \sim_3 C$ (mit T_2)

Wäre $A \sim_3 C$ (mit einem T_3), so hätte man

$$T_1 \cap T_3 = (T_2 \cup \complement T_1) \cap T_3,$$

woraus folgte, daß $(\complement T_1) \cap T_3 = \emptyset$, oder $T_3 \subset T_1$. Weiter ergäbe sich $T_3 = T_2 \cap T_3$, d. h. auch $T_3 \subset T_2$, somit $T_3 \subset T_1 \cap T_2$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist A nicht $\sim_3 C$, d. h. die Transitivität verletzt.

Damit ist gezeigt, daß (3) im wesentlichen dann und nur dann eine Äquivalenz erklärt, wenn $\mathfrak{T}_3$ (4) und (5) erfüllt, wir sprechen dann von der durch $\mathfrak{T}_3$ erzeugten „Spuräquivalenz" (man nennt $A \cap T$ häufig die „Spur" von T in A; $A \sim_3 B$ heißt also, daß A und B hinsichtlich einer Menge T aus $\mathfrak{T}_3$ spurengleich sind). Es ist nun höchst bemerkenswert, und man kann das auch leicht nachprüfen, daß bei Bestehen von (5) die Definition der Äquivalenz gemäß (3) zu keinem anderen Resultat führt, wenn man darin $\mathfrak{T}_3$ durch das größere System

$$\hat{\mathfrak{T}}_3 := \{T' \colon T' \subset S \wedge \bigvee_{T \in \mathfrak{T}_3} T' \supset T\}$$

(d. h. man nimmt alle Obermengen von Mengen von $\mathfrak{T}_3$ hinzu) ersetzt. Es ist zweckmäßig, $\mathfrak{T}_3$ stets mit dieser zusätzlichen „Vollständigkeit" vorauszusetzen, wenn man mittels (3) eine Teilmengenäquivalenz erklären will. Wir definieren daher:

Ein System $\mathfrak{T}$ von Teilmengen von S heißt ein Filter in S (vgl. [1]), wenn gilt:

1. $\mathfrak{T} \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin \mathfrak{T}$;
2. $\bigwedge_{T_1, T_2 \in \mathfrak{T}} \bigvee_{T_3 \in \mathfrak{T}} T_3 \subset T_1 \cap T_2$;
3. $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} \bigwedge_{T' \subset S} T' \supset T \succ T' \in \mathfrak{T}$.

Ohne Verlust an Allgemeinheit betrachten wir die Äquivalenzdefinition (3) stets unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{T}_3$ ein Filter in S ist.

Beispiel. Das System $\mathfrak{T}_3 = \{S\}$ (in 2.) ist offensichtlich ein Filter.

Bemerkung. Auch hier liefert die Relation $A \subseteq B$ erklärt durch $\bigvee_{T \in \mathfrak{T}_3} A \cap T \subset B \cap T$ eine mit der Teilmengeninklusion in S konsistente teilweise Ordnung des Systems der zu $\sim_3$ gehörigen Äquivalenzklassen $[A]$.

3.3. Allgemeiner bilden die sämtlichen Obermengen (in S) einer festen nicht-leeren Teilmenge T_0 von S einen Filter; die zugehörige Spuräquivalenz lautet hier einfach

$$A \sim B : \bowtie A \cap T_0 = B \cap T_0.$$

Diese Äquivalenz ist aber auch darstellbar als Fülläquivalenz mit $\mathfrak{T}_1 : = \{\{x\} \vdots x \in T_0\}$ und ebenso als Treffäquivalenz mit $\mathfrak{T}_2 : = \mathfrak{T}_1$.

4. Kennzeichnung der Fülläquivalenz.

4.1. Es sei durch

$$A \sim B : \bowtie \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T \subset A \bowtie T \subset B$$

mit irgendeinem $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(S)$ eine Fülläquivalenz erklärt. Ersetzen wir in dieser Definition $\mathfrak{T}$ durch das „S-System"

$$\mathfrak{T}^S : = \{\bigcup \mathfrak{T}' \vdots \mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}\},$$

so stimmt die dadurch entstehende Äquivalenz $\sim^S$ mit der ursprünglichen $\sim$ überein. In der Tat, wegen $\mathfrak{T}^S \supset \mathfrak{T}$ folgt $A \sim^S B \succ A \sim B$; andererseits folgt aus $A \sim B$, $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$, $T^* : = \bigcup \mathfrak{T}' \subset A$, daß $T' \subset A$ für jedes $T' \in \mathfrak{T}'$, also auch $T' \subset B$, und somit auch $T^* \subset B$, d.h. $A \sim^S B$. Wir wollen daher bei der Erzeugung einer Fülläquivalenz normalerweise voraussetzen, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^S$.

Zu jedem $A \subset S$ bilden wir die Menge $A_\sim : = \bigcap \{B \vdots B \sim A\}$; für sie gilt $A_\sim \subset A$ und damit $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T \subset A_\sim \succ T \subset A$, ferner aber $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T \subset A \succ \bigwedge_{B \sim A} T \subset B \succ T \subset A_\sim$. Daher ist $A_\sim \sim A$, d. h. jede Äquivalenzklasse $[A]$ enthält ein kleinstes Element, nämlich $A_\sim$. Für $A_\sim$ gilt noch eine zweite Darstellung:

$$A_\sim = \bigcup \{T \vdots A \supset T \in \mathfrak{T}\} = : D.$$

Es ist nämlich $D \in \mathfrak{T}$ und $D \subset A$, also $D \subset A_\sim$; andererseits $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T \subset A \succ T \subset D$, und das Umkehrte ist trivial wegen $D \subset A$, somit ist $A \sim D$, und da $A_\sim$ die kleinste zu A äquivalente

Menge ist, gilt $D = A_\sim$. Weiter ist $A_\sim \in \mathfrak{T}$, also $A_\sim$ zugleich auch die größte in A enthaltene Menge $T \in \mathfrak{T}$. Nun bilden wir mit

$$\mathfrak{T}_* := \{A_\sim \vdots A \subset S\}$$

eine neue Fülläquivalenz $\sim_*$. Wegen $\mathfrak{T}_* \subset \mathfrak{T}$ gilt $X \sim Y \succ X \sim_* Y$. Aber das Umgekehrte gilt auch; denn wenn $X \sim_* Y$, so folgt $\curlywedge_{A \subset S} A_\sim \subset X \between A_\sim \subset Y$, weiter wenn $T \in \mathfrak{T}$ und $T \subset X$, so ist, weil $X_\sim$ das größte in X enthaltene $T \in \mathfrak{T}$ ist, $T \subset X_\sim \subset X$, also auch $T \subset X_\sim \subset Y$, und genau so ergibt sich $T \subset Y \succ T \subset X$, also zusammengenommen $X \sim Y$.

Bemerkung. Die Abbildung $X \mapsto X_\sim$, $X \in \mathfrak{P}(S)$, stellt eine „Kernbildung" in S dar; denn für alle X, $Y \subset S$ gilt

$$X_\sim \subset X, X \subset Y \succ X_\sim \subset Y_\sim, X_{\sim\sim} = X_\sim.$$

(Insbesondere die Isotonie, d. h. die zweite Eigenschaft folgt aus der zweiten Darstellung von $A_\sim$). Nun können wir die Kennzeichnung formulieren.

4.2. Satz. 1. Eine Äquivalenz $\sim$ in $\mathfrak{P}(S)$ ist genau dann eine Fülläquivalenz, wenn (a) jede Äquivalenzklasse $[A]$, $A \in \mathfrak{P}(S)$, eine kleinste Menge $A_\sim$ enthält und (b) die Abbildung $A \mapsto A_\sim$ isoton ist; es wird dann $\sim$ als Fülläquivalenz erzeugt durch das System $\mathfrak{T} := \{A_\sim \vdots A \subset S\}$. – 2. Ist $k : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ irgend eine Kernbildung in S, so gilt für die durch das System $\mathfrak{T}(k) := \{kA \vdots A \subset S\}$ erzeugte Äquivalenz $\sim_k$ für alle $A \subset S$

$$A_{\sim_k} = kA.$$

Beweis. 1. Es ist im wesentlichen nur noch zu zeigen, daß die Bedingungen (a) und (b) auch hinreichend sind. Es sei also die Abbildung

$$A \mapsto A_\sim := \bigcap \{B : B \sim A\} (\sim A), A \subset S,$$

isoton. Dazu erklären wir eine Fülläquivalenz $\sim^*$ gemäß

$$X \sim^* Y : \between \curlywedge_{A \subset S} A_\sim \subset X \between A_\sim \subset Y.$$

Wir zeigen, daß $\sim^*$ und die gegebene Äquivalenz $\sim$ übereinstimmen. In der Tat, wenn $X \sim^* Y$, so folgt (aus der Definition von $\sim^*$ und wegen $X_\sim \subset X$) $X_\sim \subset Y$, also $X_\sim = X_{\sim\sim} \subset Y_\sim$; genau so findet man $Y_\sim \subset X_\sim$, also zusammen $X_\sim = Y_\sim$, d. h. $X \sim Y$. Wenn umgekehrt $X \sim Y$, d. h. $X_\sim = Y_\sim$, so folgt $\bigwedge_{A \subset S} A_\sim \subset X \succ A_\sim = A_{\sim\sim} \subset X_\sim = Y_\sim \subset Y$ und entsprechendes bei Vertauschung von X und Y, also $X \sim^* Y$. – Der Beweis von 2. sei dem Leser überlassen.

5. Kennzeichnung der Treffäquivalenz.

5.1. Es sei $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(S)$ und durch

$$(1) \qquad A \sim B : \succ\!\!\!\prec \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T \cap A \neq \varnothing \succ\!\!\!\prec T \cap B \neq \varnothing$$

eine Treffäquivalenz erklärt. Wie wollen die definierende Bedingung umformen, indem wir der Hälfte mit $\succ$ folgende Form geben:

$$(2) \qquad \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} x \in T \succ T \cap B \neq \varnothing,$$

was uns weiter veranlaßt eine Abbildung $h : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ gemäß

$$hB := \{y \,\vdots\, y \in S \wedge \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} y \in T \succ T \cap B \neq \varnothing\},\ B \subset S,$$

einzuführen. Dann lautet aber (2) $\bigwedge_{x \in A} x \in hB$ oder $A \subset hB$, so daß die Definition (1) für $\sim$ die Form annimmt:

$$A \sim B : \succ\!\!\!\prec (A \subset hB \wedge B \subset hA).$$

Nun ist aber h eine Hüllenbildung (vgl. [2]), d. h. extensiv, isoton und idempotent, so daß $(A \subset hB \wedge B \subset hA) \succ\!\!\!\prec hA = hB$, womit wir schließlich die folgende Form der Definition von $\sim$ haben:

$$(1') \qquad \mathrm{A} \sim B : \succ\!\!\!\prec hA = hB.$$

Wegen $Y \sim A \succ Y \subset hY = hA$ ist $A^\sim := \bigcup \{Y \,\vdots\, Y \in \mathfrak{P}(S) \wedge Y \sim A\} \subset hA$ und wegen $hA = hhA$ ist $A \sim hA$, also $A^\sim \supset hA$, und somit

$$hA = A^\sim.$$

Dies besagt, daß jede Äquivalenzklasse $[A]$, $A \subset S$, eine größte Menge enthält, nämlich $A^\sim = hA$, und $A \mapsto A^\sim$ ist eine Hüllenoperation.

5.2. Satz. 1. Die Äquivalenz $\sim$ im System $\mathfrak{P}(S)$ ist genau dann eine Treffäquivalenz, wenn (a) jede Äquivalenzklasse $[A]$, $A \subset S$, eine größte Menge $A^{\sim}$ enthält, und (b) die Abbildung $A \mapsto A^{\sim}$ isoton ist. Es wird dann $\sim$ als Treffäquivalenz erzeugt durch das System $\mathfrak{T} := \{\complement A^{\sim} \vdots A \subset S\}$. – 2. Ist $h : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ irgendeine Hüllenoperation, so gilt für die durch $\mathfrak{T} := \{\complement hA \vdots A \subset S\}$ erzeugte Treffäquivalenz $\sim$ allgemein $hA = A^{\sim}$ ($:=$ größte Menge in der Äquivalenzklasse $[A]$).

Beweis. 1.1. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ist im wesentlichen dargetan. Wegen $A^{\sim} = hA$ können wir die Ergebnisse von [2] anwenden, wonach $\{\complement hA \vdots A \subset S\}$ ein Kontakt-Testmengensystem (und zwar das größte) ist für den zu h gehörigen Kontakt. – 1.2. Das Hinreichen. Die Äquivalenz $\sim$ habe die angegebenen Eigenschaften: $A^{\sim}$ ist die größte zu A äquivalente Menge und $A \mapsto A^{\sim}$ ist eine isotone Abbildung. Offensichtlich ist $X \sim Y \leftrightarrow X^{\sim} = Y^{\sim}$, ferner $X \subset X^{\sim}$, und $X^{\sim\sim} = X^{\sim}$, womit aber $A \mapsto A^{\sim}$ eine Hüllenoperation ist, also $A \sim B \leftrightarrow A \subset B^{\sim} \wedge B \subset A^{\sim}$. Verwenden wir das zur Hüllenoperation $A \mapsto A^{\sim}$ gehörige Kontakt-Testmengensystem $\mathfrak{T}^* := \{\complement A^{\sim} \vdots A \subset S\}$, so schreibt sich $A \subset B^{\sim}$, d. h. jeder Punkt von A ist Kontaktpunkt von B, in der Form

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{T \in \mathfrak{T}^*} x \in T \succ B \cap T \neq \emptyset \text{, oder}$$
$$\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}^*} A \cap T \neq \emptyset \succ B \cap T \neq \emptyset ,$$

woraus wir ersehen, daß $\sim$ sich als Treffäquivalenz mit $\mathfrak{T}^*$ als erzeugendes Mengensystem darstellt. – 2. Der Beweis zur Behauptung 2. sei dem Leser überlassen.

6. Kennzeichnung der Spuräquivalenz.

6.1. Es sei $\mathfrak{T}$ ein Filter in S und

$$A \sim B : \leftrightarrow \bigvee_{T \in \mathfrak{T}} T \cap A = T \cap B.$$

Dann ist die Äquivalenzklasse $[S] = \mathfrak{T}$; denn wenn $B \sim S$, so gibt es ein $T \in \mathfrak{T}$ mit $T \cap S = T \cap B$ oder $T \subset B$, also $B \in \mathfrak{T}$, und wenn umgekehrt $B \in \mathfrak{T}$, so ist $B \sim S$ eine Folge von

$B \cap B = B \cap S$. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar die Kennzeichnung:

6.2. Satz. Die Äquivalenz $\sim$ in $\mathfrak{P}(S)$ ist genau dann eine Spuräquivalenz, wenn (a) die Äquivalenzklasse $[S]$ ein Filter ist, und (b) $\bigwedge_{A,B \subset S} A \sim B \Leftrightarrow \bigvee_{T \in [S]} T \cap A = T \cap B$.

7. Dualität.

Ist $\sim$ eine Äquivalenz in $\mathfrak{P}(S)$, so heißt die durch

$$A \sim' B :\Leftrightarrow \complement A \sim \complement B$$

erklärte Relation $\sim'$ die zu $\sim$ duale Äquivalenz in $\mathfrak{P}(S)$.

7.1. Ist $\sim$ eine Fülläquivalenz, so $\sim'$ eine Treffäquivalenz, und umgekehrt.

Wenn nämlich $k : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ eine Kernoperation ist, so ist $h := \complement\, k\, \complement$ eine Hüllenoperation, und umgekehrt.

7.2. Beispiel. Zu einer Äquivalenz $\approx$ in S gehören eine Kernoperation k und eine Hüllenoperation h von $\mathfrak{P}(S)$ in $\mathfrak{P}(S)$, nämlich

$$kA := \bigcup \{[x] \,\vdots\, [x] \subset A\},$$
$$hA := \bigcup \{[x] \,\vdots\, [x] \cap A \neq \varnothing\},\ A \subset S$$

(vgl. [3]). Die durch k bzw. h erklärte Füll- bzw. Treffäquivalenz

$$A \sim_k B :\Leftrightarrow kA = kB,$$
$$A \sim_h B :\Leftrightarrow hA = hB$$

sind zueinander dual wegen $k\, \complement = \complement\, h$.

7.3. Jede Spuräquivalenz $\sim$ ist zu sich selbst dual. Denn aus der Gleichung $(A \cup \complement A) \cap T = (B \cup \complement B) \cap T$ folgt, daß sich $A \cap T = B \cap T$ und $(\complement A) \cap T = (\complement B) \cap T$ gegenseitig implizieren; mit $A \sim B$ gilt also auch $\complement A \sim \complement B$. Wir können daher die durch den Filter $\mathfrak{T}$ erzeugte Spuräquivalenz $\sim$ auch so beschreiben

$$A \sim B \Leftrightarrow \bigvee_{T \in \mathfrak{T}} T \cap \complement A = T \cap \complement B.$$

Gehen wir in der letzten Gleichung zu den Komplementen über, so wird daraus $A \cup \complement T = B \cup \complement T$. Das System $\mathfrak{B}$ der Mengen $\complement T$, $T \in \mathfrak{T}$. hat gemäß 3.2 die folgenden Eigenschaften:

1'. $\mathfrak{V} \neq \varnothing \wedge S \notin \mathfrak{V}$;

2'. $\bigwedge_{V_1, V_2 \in \mathfrak{V}} \bigvee_{V_3 \in \mathfrak{V}} V_3 \supset V_1 \cup V_2$;

3'. $\bigwedge_{V \in \mathfrak{V}} \bigwedge_{V' \subset V} V' \in \mathfrak{V}$.

Ein solches System $\mathfrak{V}$ nennt man ein „Vernachlässigungsmengensystem" kurz „V-System". Die zum V-System $\mathfrak{V}$ gehörige Äquivalenz $\sim_v$ ist nach obigem definiert durch

$$A \sim_v B : \Leftrightarrow \bigvee_{V \in \mathfrak{V}} A \cup V = B \cup V;$$

sie ist mit der durch $\mathfrak{T} := \{\complement V : V \in \mathfrak{P}\}$ erklärten Spuräquivalenz identisch.

Bemerkung. In der Analysis benutzt man häufig V-Systeme, welche anstelle von 2'. eine stärkere Bedingung erfüllen:

$$2^*. \bigwedge_{\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}} \mathfrak{V}' \text{ abzählbar} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{V}' \in \mathfrak{V}$$

(vgl. [4]); z. B. hat das System der Mengen vom Maße Null auf der Zahlgeraden die Eigenschaften 1'., 2*. und 3'.

7.4. Beispiel. Die Spuräquivalenz ist das gegebene Hilfsmittel zur Beschreibung von „infinitären" Begriffen. Betrachten wir etwa Folgen von Elementen einer Menge M

$$a : n \mapsto a_n \text{ für } n \in \boldsymbol{N} \text{ mit } a_n \in M,$$

so können wir unter diesen eine „Spuräquivalenz" einführen mittels des in der Menge $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen erklärten FRECHET-Filters $\mathfrak{F} := \{\boldsymbol{N} \setminus E : E \subset \boldsymbol{N} \wedge E \text{ endlich}\}$, oder, was dasselbe, eine „Vernachlässigungsäquivalenz" mittels des V-Systems $\mathfrak{V}$ aller endlichen Teilmengen E von $\boldsymbol{N}$:

$$a \sim b : \Leftrightarrow \bigvee_{T \in \mathfrak{F}} a \mid T = b \mid T$$

d. h. a und b sind bei Einengung auf ein $T \in \mathfrak{F}$ gleich. Eine für Folgen erklärte Eigenschaft heißt infinitär, wenn sie mit a auch jede dazu äquivalente Folge b besitzt; hierauf kann man die Konvergenztheorie begründen.

8. Es dürfte keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, die vorausgehenden Untersuchungen statt in $\mathfrak{P}(S)$ in einem (ev. vollständigen) Verband durchzuführen; über diese Möglichkeit soll später einmal berichtet werden.

Literatur

[1] N. Bourbaki, Éléments de Mathematique, Topologie générale, Paris 1961, p. 63;

[2] G. Aumann, Kontaktrelationen, Sitz.-Ber. Bayer. Ak. Wiss. 1970, 67–77;

[3] G. Aumann, Beiträge zur Theorie der Zerlegungsräume, Math. Ann. 106 (1932), p. 253;

[4] H. Hahn, Reelle Funktionen, Leipzig 1932, p. 200.