BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einige Charakterisierungen der Ringe, über denen reine Untermoduln direkte Summanden sind

Von **Wolfgang Zimmermann** in München

In dieser Note werden einige Charakterisierungen derjenigen Ringe gegeben, über denen jede reine exakte Folge von R-Rechtsmoduln zerfällt. Fieldhouse nennt in [4] solche Ringe Rechts-PDS-Ringe, und zeigt, daß sie rechtsartinsch sind.

Sei im folgenden R ein Ring mit Einselement, Moduln bzw. Homomorphismen seien R-Rechtsmoduln bzw. R-lineare Abbildungen. Eine kurze exakte Folge von R-Rechtsmoduln heißt rein, wenn sie bei Tensorierung mit beliebigen R-Linksmoduln exakt bleibt. Die in dieser Arbeit verwendeten Tatsachen und Begriffe über reine exakte Folgen findet man in der Arbeit von Fieldhouse [4].

Satz. – *Für den Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jede reine kurze exakte Folge zerfällt.*
2. *Jeder reine Untermodul eines Moduls ist direkter Summand.*
3. *Jeder Modul ist rein projektiv.*
4. *Jeder Modul ist direkter Summand einer direkten Summe von endlich präsentierbaren Moduln.*
5. *Jeder direkt unzerlegbare Modul ist endlich präsentierbar.*
6. *Jeder von Null verschiedene Modul hat einen von Null verschiedenen endlich präsentierbaren direkten Summanden.*
7. *Jeder Modul ist direkte Summe von endlich präsentierbaren Moduln.*
8. *Jeder Modul ist direkte Summe von endlich erzeugten Moduln.*
9. *Jeder Modul ist direkte Summe von Moduln endlicher Länge.*

Beweis. – Die Äquivalenz der Aussagen 1.–4. folgt aus den Definitionen, siehe [4], Thm. 10.1.

4. $\Rightarrow$ 5. Ist M direkt unzerlegbar, so gibt es einen Modul M', so daß $M \oplus M' = \bigoplus_{i \in I} E_i$, mit endlich präsentierbaren Moduln E_i. Da R rechtsartinsch ist ([4], Thm. 10.3.), können wir sogar annehmen, daß die E_i direkt unzerlegbare Moduln endlicher Länge mit lokalen Endomorphismenringen sind. Dann ist aber M zu einem der E_i isomorph (siehe z. B. [1], S. 157, Lemma 6.43), also endlich präsentierbar, da die E_i endlich erzeugt sind und R rechtsnoethersch ist.

5. $\Rightarrow$ 6. Sei M von Null verschieden und $0 \neq x \in M$. Die Menge aller reinen Untermoduln M' von M, die x nicht enthalten, ist nicht leer und wegen [4], Thm. 7.3. induktiv geordnet, besitzt also auf Grund des Zornschen Lemmas ein maximales Element M_0. Wir zeigen, daß M/M_0 direkt unzerlegbar ist. Seien M_1, M_2 M_0 enthaltende Untermoduln von M mit $(M_1/M_0) \oplus (M_2/M_0) = M/M_0$. Da $M_0 = M_1 \cap M_2$ und $M = M_1 + M_2$, sind M_1 und M_2 nach [4], Prop. 8.3. rein in M. Das Element x liegt nicht in M_0, also nicht in M_1 oder nicht in M_2, also gilt $M_1 = M_0$ oder $M_2 = M_0$ wegen der Maximalität von M_0. Da die Folge

$$0 \longrightarrow M_0 \hookrightarrow M \longrightarrow M/M_0 \longrightarrow 0$$

rein exakt und M/M_0 endlich präsentierbar ist, zerfällt sie ([4], Cor. von Thm. 7.1.), also hat M einen zu M/M_0 isomorphen direkten Summanden.

6. $\Rightarrow$ 7. Dies folgt aus [5], Thm. 3.2. Der Vollständigkeit halber geben wir den Beweis an. Ist M ein von Null verschiedener Modul, so findet man wegen 6. und [4], Thm. 7.3. mit Hilfe des Zornschen Lemmas eine maximale Familie $(F_j)_{j \in J}$ von endlich präsentierbaren Untermoduln von M, derart daß die Summe F der F_j direkt und in M rein ist. Angenommen, $F \neq M$. Dann hat M/F einen endlich präsentierbaren direkten Summanden A/F, $F \subsetneqq A \subset M$.

Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow F \hookrightarrow M & \xrightarrow{p = kan} & M/F \longrightarrow 0 \\ & & i\uparrow \downarrow q \\ & & A/F \end{array}$$

wo i bzw. q die natürliche Injektion bzw. Projektion bezeichnet.

Nach [4], Cor. zu Thm. 7.1. gibt es f: $A/F \to M$ mit $pf = i$ und es folgt $qpf = qi = 1$, also $Bi(f) \oplus Ke(qp) = M$. Dann ist $Bi(f) \cap F = 0$ und nach [4], Prop. 7.2. ist $Bi(f) \oplus F$ in M rein. Damit haben wir einen Widerspruch zur Maximalität von $(F_j)_{j \in J}$ erhalten, und 7. ist gezeigt.

7. $\Rightarrow$ 8. ist trivial.

Gilt 8., so ist nach [3], Thm. 3.1. R rechtsartinsch, also folgt Aussage 9.

Gilt 9., so ist R offenbar rechtsartinsch, also ist jeder Modul endlicher Länge endlich präsentierbar, somit folgt 4.

Folgerung: (Vgl. [2], Thm. 4.4.). – *Erfüllt R die äquivalenten Bedingungen des Satzes, so ist R rechtsartinsch, injektive und projektive Hüllen von Moduln endlicher Länge haben wieder endliche Länge, und jeder direkt unzerlegbare Modul hat endliche Länge.*

Der Beweis folgt sofort aus Aussage 5. des Satzes.

Literatur

[1] Bucor, I. and Deleanu, A: Introduction to the theory of categories and functors. London, Wiley 1968

[2] Chase, S. U.: Direct products of modules. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 457–473 (1960)

[3] Faith, C. and Walker, E. A.: Direct-sum representations of injective modules. Journal of Algebra 5, 203–221 (1967)

[4] Fieldhouse, D. J.: Pure theories. Math. Ann. 184, 1–18 (1969)

[5] Griffith, P.: On the decomposition of modules and generalized left uniserial rings. Preprint.