

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Korrelation von Mikro- und Makrospannungskonzentrationen am Beispiel des Risses in einer halbelliptischen Kerbe

Von H. Neuber

Risse im Inneren des Materials sind bereits Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, die zu gegenseitigen Anregungen der theoretischen Festigkeitslehre, der Bruchtheorie und der Metallphysik geführt haben. Jedoch wurden seither Risse, die von Oberflächenkerben ausgehen, theoretisch kaum untersucht, obwohl die Lebensdauer technischer Bauteile gerade durch Risse solcher Art stark herabgesetzt wird, wie auf dem Gebiete der Materialprüfung durch zahlreiche Versuche festgestellt wurde. Von rein technologischen Effekten abgesehen ist die Ursache im Zusammenwirken von Kerbe und Riß und damit in der Korrelation von Makro- und Mikrospannungen zu sehen. In dieser Arbeit dienen zur Untersuchung derartiger Probleme zwei Gedankenmodelle. Im ersten Falle geht der Riß von einer Nut mit halbelliptischem Querschnitt an der freien Seitenebene eines schubbeanspruchten Prismas aus. Im zweiten Falle handelt es sich um einen Riß in einer halbelliptischen Kerbe an der freien Randgeraden einer zugbeanspruchten Halbscheibe. Jeweils wird mit Hilfe einer systematischen Analyse der Zusammenhang von Spannungskonzentrations- bzw. -intensitätsfaktor, Makrokerbfaktor und relativer Rißlänge ermittelt und auf einfache Formeln zurückgeführt. Im zweiten Falle wird dabei ein neuartiger Lösungsweg beschrieben, der allgemein für Randwertprobleme des ebenen Spannungszustandes anwendbar ist, wenn der Rand des Definitionsgebietes durch eine *nicht-rationale* konforme Abbildungsfunktion beschrieben ist.

## 1. 1. Schubbeanspruchtes Prisma mit Riß an einer freien Seitenebene

Ein Prisma, dessen Erzeugenden in  $z$ -Richtung liegen ( $x, y, z$  kartesische Koordinaten), sei auf den Ebenen  $y = \text{konst}$  und  $z = \text{konst}$  durch konstante Schubspannungen  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  („Nenn-

spannung“  $\tau_N$ ) beansprucht. Dieser homogene Schubspannungszustand sei durch einen an der freien Seitenebene  $x = 0$  beginnenden und in  $x$ -Richtung verlaufenden Riß gestört. Nach den Regeln der Kerbspannungslehre [1] bleibt die dadurch hervorgerufene Spannungsstörung auf die nähere Umgebung der Störstelle beschränkt, so daß in größerer Entfernung vom Riß der homogene Schubspannungszustand bestehen bleibt. Gemäß den Elastizitätstheoretischen Beziehungen für reinen prismatischen Schub tritt als einzige Verschiebungskomponente die Querschnittsverwölbung, hier  $V_x$ , auf. Ihr Produkt mit dem Schubmodul sei zur Abkürzung mit  $v$  bezeichnet. Aus der Formänderungskinematik und dem linearen Elastizitätsgesetz folgen dann

$$\tau_{xz} = v_{,x}; \quad \tau_{yz} = v_{,y}. \quad (1.1/1)$$

Das Komma bedeute stets Differentiation nach der hinter dem Komma stehenden Koordinate. Die Gleichgewichtsbedingungen werden durch Einführung einer Spannungsfunktion  $u$  gemäß

$$\tau_{xz} = -u_{,y}; \quad \tau_{yz} = u_{,x} \quad (1.1/2)$$

identisch erfüllt. Aus beiden Gleichungspaaren gehen die CAUCHY-RIEMANN-Gleichungen hervor

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}, \quad (1.1/3)$$

die durch Einführung der komplexen Koordinatenbeziehung

$$u + iv = w = w(x + iy) \quad (1.1/4)$$

bzw. der konjugiert komplexen Beziehung gewährleistet sind. Die Umkehrfunktion

$$x + iy = f(w) \quad (1.1/5)$$

repräsentiert die Funktion der konformen Abbildung.

Für das vorliegende Problem gilt die Abbildungsfunktion

$$f(w) = \sqrt{w^2 + 1}. \quad (1.1/6)$$

Für große Werte von  $w$  gilt  $x + iy = u + iv$ , d. h. der ungestörte homogene Schubspannungszustand mit  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_N = 1$ . Für die Linie  $u = 0$  als Rand folgt  $x + iy = \sqrt{1 - v^2}$ . Für  $\infty \geq v^2 \geq 1$  gilt  $x = 0$ ,  $y^2 = v^2 - 1$ , d. h. die Randlinie folgt der  $y$ -Achse (Bild 1). Für  $1 \geq v^2 \geq 0$  folgt  $x^2 = 1 - v^2$ ,  $y = 0$ , d. h. die Randlinie folgt nun dem auf der  $x$ -Achse liegenden Riß.

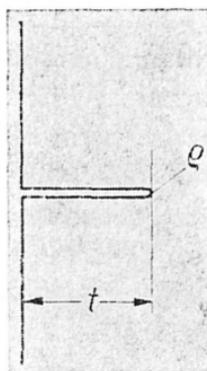


Bild 1. RiB senkrecht zum Rand

Die RiBspitze liegt an der Stelle  $w = 0$ , so daB die RiBlänge  $t = 1$  ist. Für die nähere Umgebung der RiBspitze gilt  $x + iy = 1 + w^2/2 - + \dots$ , also in erster Näherung  $x = 1 + (u^2 - v^2)/2$ ,  $y = uv$ , d. h. die Linien  $u = \text{konst}$  und  $v = \text{konst}$  bilden konfokale Parabelscharen. Auf der  $x$ -Achse gilt  $x = 1 + u^2/2$ ,  $\sigma_{yz} = 1/u$ . Mithin würde die an der RiBspitze auftretende maximale Schubspannung für die Randlinie  $u = 0$ , d. h. für den unendlich schmalen RiB (in Form einer mathematischen Linie) unendlich groß werden. Bei Verwendung einer infinitesimal benachbarten Randlinie  $u = u_0$  mit  $0 < u_0 \ll 1$  haben dagegen beide RiBufer einen endlichen Abstand voneinander, und für die maximale Schubspannung gilt der endliche Wert

$$\tau_{\max} = 1/u_0. \quad (1.1/7)$$

Für den Krümmungsradius der RiBspitze ergibt sich

$$\rho = [(x_{,u})^2/x_{,uu}]_{u=u_0} = u_0^2. \quad (1.1/8)$$

Für den Faktor  $\alpha_R$  der RiBspannungskonzentration folgt (dimensionslose Darstellung erforderlich)

$$\alpha_R = \tau_{\max}/\tau_N = \sqrt{t/\rho}. \quad (1.1/9)$$

Diese Beziehung entspricht auch der anschließend behandelten Lösung für die halbelliptische Randkerbe, wenn dort  $t_0/\rho_0$  durch  $t/\rho \gg 1$  ersetzt wird. Für die Spannungsintensitätsfaktoren bei Schub gilt [2, 3]:

$$K_{III} = \tau_{\max} \sqrt{\pi \rho}, \quad (1.1/10)$$

also hier  $K_{III} = \tau_N \sqrt{\pi t}$ . Für die verschiedenen Beanspruchungs-

arten hat man kritische, d. h. für den Bruchbeginn maßgebliche Werte  $K_c$  als Werkstoffkonstanten eingeführt [2, 3]. Bei der experimentellen Ermittlung solcher Werte zeigten sich jedoch starke Streuungen. Es darf hierbei nicht übersehen werden, daß die lapidare Einführung solcher Werte als Werkstoffkonstanten nur als erster Schritt zur Klärung der sehr vielschichtigen Bruchprobleme gewertet werden kann, denn diesem Vorgehen liegt die mathematische Idealisierung des Risses als unendlich dünne Linie zugrunde, wobei an der Rißspitze, also gerade an der Stelle der höchsten Bruchgefahr, eine Spannungssingularität in Kauf genommen wird. Demgegenüber hat das hier verwendete Rißmodell endliche Querdimensionen. Darüber hinaus kann nach den Formeln der Kerbspannungslehre [1] statt der theoretischen Maximalspannung ein durch Mittelwertbildung innerhalb eines kleinen Bereiches der höchstbeanspruchten Zone (Elementarbreite  $\varrho^*$ ) gewonnener Spannungswert verwendet werden, der auch bei kleinen Plastizierungen unverändert bleibt und sich im Grenzfall  $\varrho \rightarrow 0$  nicht singular verhält. Zur Anpassung an das Festigkeitsverhalten des Materials stehen dann statt des Parameters  $K_c$  die durch Mittelwertbildung gewonnene Spannung, der Krümmungsradius  $\varrho$  (als eine die Querdimension des Risses charakterisierende Größe) und die strukturell bedingte Elementarbreite  $\varrho^*$  zur Verfügung.

## 1.2. Schubbeanspruchtes Prisma mit halbelliptischer Randkerbe

Mit der Abbildungsfunktion

$$f(w) = w + k\sqrt{w^2 + 1} \quad (1.2/1)$$

folgt die Randlinie  $u = 0$  für  $v^2 > 1$  der  $y$ -Achse und für  $v^2 < 1$  einer Halbellipse mit den Halbachsen  $t_0 = k$  und 1 (Bild 2). Für große Werte von  $w$  gilt  $x + iy = (1 + k)(u + iv)$ , so daß hier

$$\tau_N = 1/(1 + k) \quad (1.2/2)$$

zu setzen ist. Vom Kerbgrund aus ins Materialinnere gilt längs der  $x$ -Achse  $x = u + k\sqrt{1 + u^2} = k + u + ku^2/2 - + \dots$ . Wie in 1.1 errechnet sich der *Krümmungsradius des Kerbgrundes*

$$\varrho_0 = 1/k \quad (1.2/3)$$

und der *Faktor der an gleicher Stelle auftretenden Makrospannungskonzentration*

$$\alpha_0 = \tau_{\max}/\tau_N = 1 + k = 1 + \sqrt{t_0/\varrho_0}, \quad (1.2/4)$$

in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen [1].

### 1.3. Schubbeanspruchtes Prisma mit Riß in halb elliptischer Randkerbe

In diesem Falle gilt die Spannungsfunktion

$$f(w) = \sqrt{w^2 + b^2} + k \sqrt{w^2 + 1}, \quad (1.3/1)$$

die in anderer Form bereits durch YOKOBORI et al. [4] angegeben wurde. In Zusammenhang mit der hier zu untersuchenden Problematik ist eine systematische Analyse erforderlich, die den Einfluß der einzelnen Parameter auf die resultierende Spannungskonzentration klar erkennen läßt. Die Randlinie  $u = 0$  folgt für  $v^2 > 1$  zunächst wieder der  $y$ -Achse. Für  $1 \geq v^2 \geq b^2$  folgt sie einer Halbellipse mit den Halbachsen

$$t_0 = k \sqrt{1 - b^2} \quad (1.3/2)$$

und  $\sqrt{1 - b^2}$ . Für  $b^2 \geq v^2 \geq 0$  folgt die Randlinie schließlich

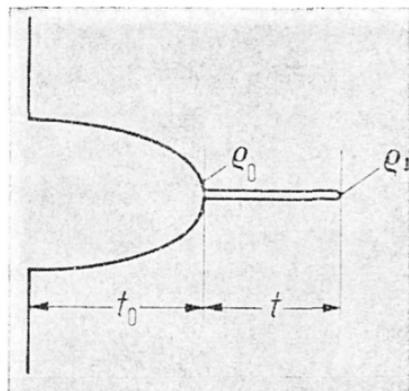
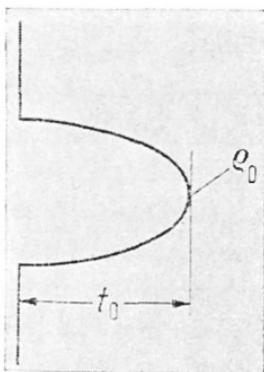


Bild 2. Halb elliptische Randkerbe. Bild 3. Riß in halb elliptischer Randkerbe.

der  $x$ -Achse und repräsentiert den Riß (Bild 3). Mit  $t$  als *Rißlänge* gilt für  $w = 0$

$$t_0 + t = b + k. \quad (1.3/3)$$

Mit (1.3/2) geht hieraus

$$t/t_0 = (1/k) (b + k) / \sqrt{1 - b^2} - 1 \quad (1.3/4)$$

hervor. Für den Krümmungsradius  $\varrho_0$  am Ende der Halbachse  $t_0$  gilt hier

$$\varrho_0 = \sqrt{1 - b^2/k}; \sqrt{t_0/\varrho_0} = k \quad (1.3/5)$$

Da für großes  $|w|$  wieder  $x + iy = (1 + k) w$  folgt, gilt für die *Nennschubspannung* auch hier (1.2/2) und für den *Faktor der Makrospannungskonzentration* wieder (1.2/4). Von der Reißspitze führt längs der  $x$ -Achse die Koordinate

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{b^2 + u^2} + k \sqrt{1 + u^2} = \\ &= b + k + (k + 1/b) u^2/2 \dots \end{aligned} \quad (1.3/6)$$

ins Innere. Damit der Krümmungsradius  $\varrho$  der Reißspitze von Null verschieden bleibt, muß wie in 1.2 eine der Linie  $u = 0$  infinitesimal benachbarte Linie  $u = u_0 \ll 1$  verwendet werden (Bild 3). Für den Krümmungsradius der Reißspitze folgt dann

$$\varrho = (k + 1/b) u_0^2. \quad (1.3/7)$$

Für die ebenfalls an der Reißspitze auftretende maximale Schubspannung folgt  $\tau_{\max} = (1/x, u)_{u=u_0} = 1/[(k + 1/b) u_0]$ . Nach Umformung mittels (1.3/3) und (1.3/7) und Division durch die Nennspannung ergibt sich als *Faktor der Spannungskonzentration*

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 + k) \sqrt{(t_0 + t)/\varrho} / \sqrt{(k + b)(k + 1/b)} \\ &\text{mit } k = \alpha_0 - 1. \end{aligned} \quad (1.3/8)$$

Wird noch der Parameter  $b$  mittels (1.3/4) auf  $t/t_0$  und  $k$  zurückgeführt, so kann

$$\begin{aligned} b &= k \left[ (1 + t/t_0) \sqrt{k^2 (2 + t/t_0) t/t_0 + 1} - 1 \right] / \\ &\quad / [k^2 (1 + t/t_0)^2 + 1] \end{aligned} \quad (1.3/9)$$

gesetzt und schließlich  $\alpha \sqrt{\varrho/t}$  explizit als Funktion von  $\alpha_0$  und  $t/t_0$  dargestellt werden. Aber noch eine andere Umformung bietet Vorteile. Wird  $t_0$  in (1.3/8) mittels (1.3/4) auf  $t$  zurückgeführt, so folgt

$$\alpha = (1 + k) \sqrt{t|q} / \sqrt{[b + k(1 - \sqrt{1 - b^2})] (k + 1/b)}. \quad (1.3/10)$$

Im Grenzfall  $b \rightarrow 0$  (kurzer Riß) ergibt sich hieraus als *Faktor der Spannungskonzentration für kurze Risse*

$$\alpha_K = \alpha_0 \alpha_R. \quad (1.3/11)$$

Für kurze Risse gilt daher die Multiplikationsregel der Kerbfaktoren. Im Grenzfall  $b \rightarrow 1$  (langer Riß) folgt aus (1.3/8)

$$\alpha_L = \sqrt{(t_0 + t)|q}. \quad (1.3/12)$$

Für lange Risse verschwindet mithin der spezielle Einfluß der Makrospannungskonzentration, und es gilt  $\alpha_L = \alpha_R$ , jedoch mit einer um die Tiefe der Makrokerbe vergrößerten Rißlänge. Zur praktischen Auswertung der Formel (1.3/8) bzw. (1.3/10) sei statt  $t/t_0$  der von 0 bis 1 laufende Parameter

$$s = \sqrt{t/(t_0 + t)} = \alpha_K / (\alpha_0 \alpha_L) \quad (1.3/13)$$

eingeführt. Dann folgt

$$\alpha = \alpha_K \sqrt{\frac{(2-s^2) [(a_0-1)^2 + (1-s^2)^2]}{(a_0^2 - 2a_0 + 2) [(a_0-1)^2 s^2 (2-s^2) + (1-s^2)^2]} + [(a_0-1)^2 (1+2s^2-s^4) + (1-s^2)^2] \sqrt{(a_0-1)^2 s^2 (2-s^2) + (1-s^2)^2}} \quad (1.3/14)$$

Zur Darstellung der numerischen Ergebnisse ist die Größe  $\alpha/\alpha_L$  besonders geeignet, denn sie nimmt, ebenso wie  $s$ , nur Werte zwischen 0 und 1 an. Da  $\alpha_L$  aus der kurzen Formel (1.3/12) hervorgeht, kann unschwer auf  $\alpha$  zurückgerechnet werden. Wie in Bild 4 ersichtlich ist, folgt  $\alpha/\alpha_L$  bei Auftragung über  $s$  einer Schar von Kurven, die von der Stelle  $s = 0$  aus zunächst über eine verhältnismäßig kurze Strecke fast geradlinig ansteigen (Bereich der kurzen Risse, die Steigung wächst mit  $\alpha_0$ ), sich mit wachsendem  $s$  aber der Geraden  $\alpha/\alpha_L = 1$  asymptotisch nähern (Bereich der langen Risse). Der Verlauf ist für  $\alpha_0 = 1; 2; 3; \dots; 10$  eingezeichnet. Im Rahmen einer für technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit (Fehler unter 1,5 %) kann mit der Formel

$$(\alpha/\alpha_L)_{\text{Schub}} = s \{ 1 + [(\alpha_0 - 1)^{-1,6} + (1/s - 1)^{-1,6}]^{-0,625} \} \quad (1.3/15)$$

gerechnet werden.

Auch für dieses Problem gilt (1.1/10), also hier  $K_{III} =$

$(\alpha/\alpha_L) \tau_N \sqrt{\pi(t_0 + t)}$ . Im übrigen sei auf die Schlußbemerkung des Abschnittes 1.1 verwiesen.

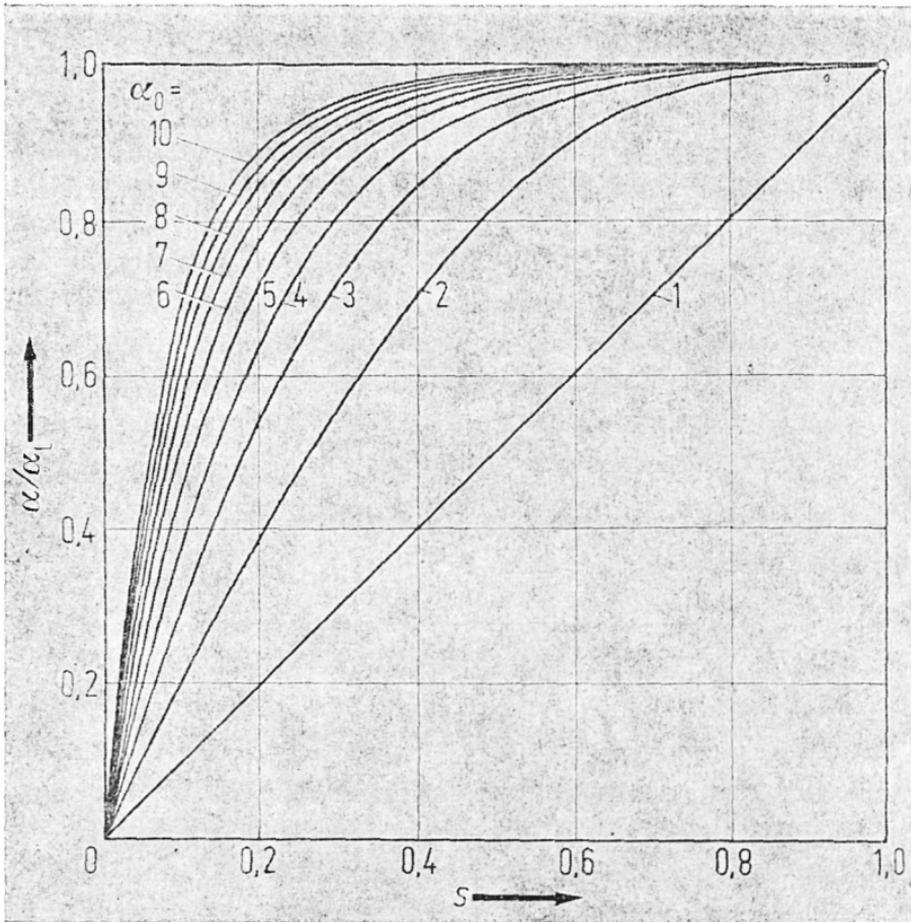


Bild 4. Das Verhältnis  $\alpha/\alpha_L = K_{III}/K_{III L}$  für Schubbeanspruchung als Funktion des Parameters  $s = \sqrt{t/(t+t_0)}$  und des Makrokerbfaktors  $\alpha_0$ .

## 2.1. Die Zugbeanspruchte Halbscheibe mit Riß am freien Rand

Die weiteren Probleme beziehen sich auf linear elastische Halbscheiben bei Zug. Das Verfahren der komplexen Spannungsfunktion [5, 6] sei in der vom Verfasser bevorzugten Form angewandt [7, 8, 9]. Wie in 1.1, 1.2, und 1.3 bestehe zwischen der komplexen Koordinaten  $x + iy$  und  $w = u + iv$  die Bedingung der konformen Abbildung

$$x + iy = f(w). \quad (2.1/1)$$

Mit Einführung der beiden im Definitionsgebiet holomorphen Funktionen  $f_1(w)$  und  $f_2(w)$  kann für die AIRYSCHER Spannungsfunktion der Scheibenprobleme

$$F = F(w, \bar{w}) = \overline{f(w)} f_1(w) + f(w) \overline{f_1(w)} + \dagger f_2(w) + \overline{f_2(w)} \quad (2.1/2)$$

gesetzt werden. Am lastfreien Rand (hier längs der Linie  $u = 0$  bzw.  $u_0$  oder  $\bar{w} = -w$  bzw.  $2u_0 - w$ ) gilt bei einfach zusammenhängendem Definitionsbereich die Bedingung

$$F_{,w} = \overline{f(w)} f_{1w} + f_{,w} \overline{f_1(w)} + f_{2,w} = 0. \quad (2.1/3)$$

Die jeweils zu überwindende Schwierigkeit besteht darin, daß der hieraus für  $f_{2,w}$  entstehende Ausdruck voraussetzungsgemäß holomorph sein muß.

Für den Riß am freien Rand gilt die Abbildungsfunktion (1.1/6)

$$f(w) = \sqrt{w^2 + 1}. \quad (2.1/4)$$

Die rechts stehende Funktion ist nicht rational. Als geeignete Ersatzdarstellung diene eine mit (2.1/4) identische unendliche Reihe, die so aufgebaut sei, daß sie auch als abgebrochene Reihe sowohl für große Werte von  $w$  als auch in der näheren Umgebung der Rißspitze ( $w$  klein) mit (2.1/4) identisch bleibt, also in  $w$  bzw.  $1 + w^2/2$  übergeht. Mit den Umformungen

$$f(w) = \sqrt{[(w+1)^2 + (w-1)^2]/2} = (w+1) \sqrt{(1+\eta^2)/2}$$

mit

$$\eta = (w-1)/(w+1) \quad (2.1/5)$$

kann

$$f(w) = (w+1) \sqrt{1 - (1-\eta^2)/2}$$

gesetzt werden. Da die unter der Wurzel auftretende Klammer sowohl für  $w \rightarrow \infty$  als auch für  $w \rightarrow 0$  verschwindet, wird zweckmäßig nach dieser Größe entwickelt:

$$f(w) = (w+1) \sum_{s=0}^n \binom{1/2}{s} (-1)^s 2^{-s} (1-\eta^2)^s. \quad (2.1/6)$$

Für  $n = \infty$  entspricht diese Funktion mit  $n = 0$  exakt der eckigen Kontur des Randes, für  $n = 2; 3; 4; \dots$  usw. einer Randlinie

mit mehr oder weniger stark abgerundeten äußeren Ecken. Da in den beiden äußeren Ecken keine wesentliche Kraftübertragung stattfindet (in Analogie zur Strömungslehre kann man von „Totwassergebieten“ sprechen), ist auch bei Verwendung einer Reihe mit nur wenigen Gliedern zu erwarten, daß der Spannungszustand in der näheren Umgebung der Reißspitze mit ausreichender Genauigkeit erfaßt wird. Die numerischen Ergebnisse bestätigen diese Vermutung sogar im Falle  $n = 2$ , vgl. (2.1/22).

Die Randbedingung (2.1/3), die nach Wahl von  $f_1$  zur Ermittlung von  $f_{2,w}$  dient, enthält die zu  $f$  konjugiert komplexe Funktion  $\bar{f}$  mit der am Rand  $u = 0$  geltenden Substitution  $\bar{w} = -w$  bzw.  $\bar{\eta} = 1/\eta$ . An der Stelle  $w = 1$  bzw.  $\eta = 0$ , also im Inneren des Definitionsgebietes treten dann die Pole  $\eta^{-1}; \eta^{-3}; \dots; \eta^{-(2n-1)}$  auf, die durch geeignete Wahl von  $f_1$  zu kompensieren sind, damit  $f_{2,w}$  holomorph wird. Aus diesem Grunde sind die in (2.1/3) auftretenden Funktionen nach Potenzen von  $\eta^2$  zu entwickeln. Zunächst ergibt sich für  $f(w)$ :

$$f(w) = (w + 1) \sum_{q=0}^{2n} a_q \eta^q \quad (2.1/7)$$

mit

$$a_q = \sum_{s=q/2}^n (-1)^{s+q/2} 2^{-s} \binom{1/2}{s} \binom{s}{q/2} \text{ für } q = 0; 2; \dots; (2n)$$

bzw.

$$a_q = 0 \text{ für } q = 1; 3; \dots; (2n - 1). \quad (2.1/8)$$

In Zusammenhang mit der Theorie der Binomialkoeffizienten gelten diverse Kontrollgleichungen, z. B.

$$\sum_{q=0}^{2n} a_q = 1; \sum_{q=0}^{2n} q a_q = 1/2; \sum_{q=0}^{2n} q^2 a_q = 3/4 \text{ usw.} \quad (2.1/9)$$

Für die zu  $f$  konjugiert komplexe Funktion  $\bar{f}$  gilt am Rand  $u = 0$ , d. h. mit  $\bar{w} = -w$  bzw.  $\bar{\eta} = 1/\eta$ ,

$$\overline{f(w)} = -(w + 1) \sum_{q=0}^{2n} a_q \eta^{1-q}; \quad (2.1/10)$$

sie enthält daher für  $q = 2; 3; \dots; (2n)$  an der Stelle  $w = 1$  bzw.  $\eta = 0$  die Pole  $\eta^{-1}; \eta^{-3}; \dots; \eta^{1-2n}$ . Weiter folgt

$$f_{,w} = \sum_{q=0}^{2n} a_q [q \eta^{q-1} + (1 - q) \eta^q]. \quad (2.1/11)$$

Für  $f_1$  bietet sich ein zur Vernichtung der Pole geeigneter Aus-  
druck analog zu (2.1/7) an:

$$f_1(w) = \frac{1}{8} (w + 1) \sum_{p=0}^{2n} b_p \eta^p. \quad (2.1/12)$$

Die Konstanten  $b_p$  sind, wie sich in der weiteren Rechnung be-  
stätigt, reell. Der Faktor  $1/8$  dient zur Kompensation des bei Er-  
mittlung der Spannungen auftretenden Faktors 8. Als Nenn-  
spannung dient hier die in den ungestörten Bereichen, d. h. für  
große Werte von  $|w|$  herrschende konstante Zugspannung. Wird  
zur Normierung, analog zu (2.1/9),

$$\sum_{p=0}^{2n} b_p = 1 \quad (2.1/13)$$

gesetzt, so folgen für große Werte von  $|w|$ :  $f = w$  und  $f_1 = w/8$ ,  
sowie aus (2.1/3) mit  $\bar{w} = -w$ :  $f_{2,w} = w/4$  und damit bis auf  
eine unwesentliche Konstante  $f_2 = w^2/8$ . Für die AIRYSCHEN  
Funktion ergibt sich somit im Bereich großer  $|w|$ -Werte gemäß  
(2.1/2):  $F = u^2/2$ , wobei  $u$  in diesem Bereich mit  $x$  identisch ist.  
Aus den Definitionsgleichungen der AIRYSCHEN Funktion folgen  
die Spannungen  $\sigma_x = F_{,yy} = 0$ ;  $\tau_{xy} = -F_{,xy} = 0$  und als  
„Nennspannung“

$$\sigma_y = F_{,xx} = \sigma_N = 1. \quad (2.1/14)$$

Der Ansatz (2.1/12) erfüllt somit den für  $|w| \rightarrow \infty$  zu fordern-  
den Übergang zum homogenen Zugspannungszustand. Analog  
zu (2.1/10) und (2.1/11) folgen weiter

$$\overline{f_1(w)} = -\frac{1}{8} (w + 1) \sum_{p=0}^{2n} b_p \eta^{1-p} \quad (\text{für } \bar{w} = -w), \quad (2.1/15)$$

$$f_{1,w} = \frac{1}{8} \sum_{p=0}^{2n} b_p [p \eta^{p-1} + (1-p) \eta^p]. \quad (2.1/16)$$

Hiermit geht (2.1/3) über in

$$f_{2,w} = \frac{w+1}{8} \sum_{p=0}^{2n} \sum_{q=0}^{2n} (a_p b_q + a_q b_p) [q \eta^{q-p} + (1-q) \eta^{q+1-p}]. \quad (2.1/17)$$

Das Verschwinden der hierin bei  $\eta = 0$  auftretenden Pole  $\eta^{-t}$  mit  
 $t = 1; 2; \dots; (2n-1)$  wird durch Erfüllung der folgenden

$(2n - 1)$  Gleichungen gewährleistet (Umformungen mit  $q - p = -t$  bzw.  $q + 1 - p = -t$ ):

$$\sum_{p=t+1}^{2n} [(p-t)(a_p b_{p-t} + a_{p-t} b_p) + (t+2-p)(a_p b_{p-t-1} + a_{p-t-1} b_p)] = 0 \quad (2.1/18)$$

für  $t = 1; 2; \dots; (2n - 1)$ .

Da die Konstanten  $b_0$  und  $b_1$  nur in der Kombination  $(b_0 + b_1)$  auftreten (bis auf eine additive Konstante bei  $f_1$ , die auf den Spannungszustand ohne Einfluß ist), kann über  $b_0$  oder  $b_1$  frei verfügt werden. Analog zu  $a_1 = 0$  sei auch

$$b_1 = 0 \quad (2.1/19)$$

gesetzt. Zusammen mit (2.1/13), (2.1/18) und (2.1/19) stehen mithin  $(2n + 1)$  lineare inhomogene Gleichungen zur Verfügung, die zur Ermittlung der Konstanten  $b_q$  gerade ausreichen.

Für den Faktor der an der Rißspitze auftretenden Spannung ist zu setzen [8]:

$$\alpha_R = \sigma_{\max}/\sigma_N = 8 [(f_{1,w})_{w=0}/(f_{,w})_{w=u_0}]. \quad (2.1/20)$$

Während der Zähler für  $w = 0$  einen bestimmten, von Null verschiedenen Zahlenwert annimmt, der sich auch für  $w = u_0 \ll 1$  nicht merkbar ändert, würde der Nenner für  $w = 0$  (mathematischer Riß) verschwinden und  $\alpha_R$  singulär werden. Wird wie in 1.2 die zu  $u = 0$  infinitesimal benachbarte Randlinie  $u = u_0 \ll 1$  verwendet, so hat die Rißspitze den von Null verschiedenen Krümmungsradius  $\rho$ , und der Nenner nimmt für alle  $n \geq 2$  den Wert  $(f_{,w})_{w=u_0} = u_0 = \sqrt{\rho/t}$  an. Damit folgt

$$\alpha_R = \sum_{q=0}^{2n} (-1)^q (1 - 2q) b_q \sqrt{t/\rho}. \quad (2.1/21)$$

Nachstehende Tabelle zeigt einige Ergebnisse der numerischen Berechnungen.

$n$	2	3	4	5	75
$\alpha_R \sqrt{\rho/t}$	263/117 = 2,24786	2,2539	2,2497	2,2462	2,24305

(2.1/22)

Bereits im Jahre 1957 veröffentlichte WIGGLESWORTH [10] eine Lösung dieses Problems auf anderem Wege mit erheblichem Aufwand (20 Druckseiten). Der anfängliche Vorteil, den er durch Anwendung von Integraltransformationen erzielen konnte, ging am Schluß der Arbeit wieder verloren, weil zur Auflösung der Endgleichungen doch wieder Reihenentwicklungen erforderlich wurden. Für den mathematischen Reiß ergab sich hiernach die Spannung  $1,568 \sigma_N \sqrt{t/r}$  (mit  $r$  als Abstand von der Reißspitze). Bei Umrechnung auf die Maximalspannung an einer Reißspitze mit dem Krümmungsradius  $\rho$  ist mit  $\sqrt{2r/\rho}$  zu multiplizieren. Nach Division durch die Nennspannung folgt  $\alpha_R = 2,2429 \sqrt{t/\rho}$  und damit praktisch Übereinstimmung. Beim ebenen Spannungszustand gilt für den Spannungsintensitätsfaktor

$$K_I = \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho/2}, \quad (2.1/23)$$

also hier  $K_I = 1.1215 \sigma_N \sqrt{\pi t}$ . Im übrigen sei auf die Schlußbemerkung des Abschnittes 1.1 verwiesen.

## 2.2. Zugbeanspruchte Halbscheibe mit halbelliptischer Randkerbe

Eine Halbscheibe wird einachsrig auf Zug beansprucht. Am geradlinigen, in Zugrichtung liegenden freien Rand befindet sich eine halbelliptische Kerbe (Bild 2). Wie in 1.2 gilt die Abbildungsfunktion

$$f(w) = w + k \sqrt{w^2 + 1}. \quad (2.2/1)$$

Mit denselben Überlegungen wie im vorigen Abschnitt werden die Reihen

$$f(w) = (w + 1) \sum_{q=0}^{2n} a_q \eta^q; \quad f_1(w) = \frac{1}{8} (w + 1) \sum_{p=0}^{2n} b_p \eta^p \quad (2.2/2)$$

eingeführt. Die Konstanten  $a_q$  sind hier

$$a_0 = k \sum_{s=0}^{2n} (-1)^s 2^{-s} \binom{1/2}{s} + 1/2; \quad a_1 = 1/2;$$

$$a_q = k \sum_{s=0}^{2n} (-1)^{s+q/2} 2^{-s} \binom{1/2}{s} \binom{s}{q/2} \quad \text{für } q = 2; 4; \dots; (2n); \quad (2.2/3)$$

$$a_q = 0 \quad \text{für } q = 3; 5; \dots; (2n - 1).$$

An die Stelle von (2.1/9) treten hier die Beziehungen

$$\sum_{q=0}^{2^n} a_q = 1 + k; \sum_{q=0}^{2^n} q a_q = \frac{1+k}{2}; \sum_{q=0}^{2^n} q^2 a_q = (3k+2)/4. \quad (2.2/4)$$

An die Stelle von (2.1/13), (2.1/14) und (2.1/19) treten hier

$$\sum_{q=0}^{2^n} b_q = 1 + k; \sigma_N = 1; b_1 = 1/2. \quad (2.2/5)$$

Im übrigen bleibt der Rechnungsgang formal derselbe wie in 2.1, insbesondere bleiben auch die Gleichungen (2.1/18) bestehen. In (2.1/20) ist  $u_0 = 0$  und  $(f,w)_{u=0} = 1$  zu setzen (vgl. 1.2). Die numerische Auswertung ergibt für den Faktor der Spannungskonzentration folgende Zahlenwerte:

$\sqrt{t_0/\varrho_0}$	1	1,5	1,75	$\rightarrow \infty$	
$\alpha_0$ für $n = 2$	3,17	4,31	4,88	2,248	$\sqrt{t_0/\varrho_0}$ (2.2/6)
$\alpha_0$ für $n = 75$	3,06	4,13	4,66	2,243	$\sqrt{t_0/\varrho_0}$

Für  $n = 75$  zeigt sich gute Übereinstimmung mit Ergebnissen von MAUNSELL für die Halbkreis Kerbe [11] und SEIKA für die halbelliptische Kerbe [12]. Beide Autoren benötigten einen erheblich größeren formalen und numerischen Aufwand. Die von SEIKA angegebene Näherungsformel  $\alpha_0 = 0,941 + 2,125 \sqrt{t_0/\varrho_0}$  liefert für großes  $t_0/\varrho_0$  um ca. 5% zu niedrige Werte. Bei der nachstehend angegebenen Näherungsformel bleibt der Fehler im gesamten Bereich unter 1%:

$$\alpha_0 = \frac{1 + 2,48 \sqrt{t_0/\varrho_0} + 1,16 t_0/\varrho_0}{1 + 0,517 \sqrt{t_0/\varrho_0}}. \quad (2.2/7)$$

### 2.3. Zugbeanspruchte Halbscheibe mit Riß in halbelliptischer Kerbe

Am geradlinigen Rand der zugbeanspruchten Halbscheibe befindet sich nunmehr eine halbelliptische Kerbe mit Riß (Bild 3). Als Abbildungsfunktion dient (1.3/1):

$$f(w) = \sqrt{w^2 + b^2} + k \sqrt{w^2 + 1} \quad (2.3/1)$$

Hier müssen für die beiden auftretenden Wurzeln Ersatzdarstellungen verwendet werden. Denselben Gedankengängen wie in 2.1 und 2.2, d. h. hier der Forderung des gesicherten Überganges in

$(1+k)w$  für großes  $|w|$  sowie in  $b+k+(k+1/b)w^2/2$  für kleines  $|w|$ , genügt zunächst die abgebrochene Binomialreihe (für  $n \geq 2$ )

$$f(w) = \sum_{s=0}^n \binom{1/2}{s} (-1)^s 2^{-s} [(w+b)(1-\eta_1^2)^s + k(w+1)(1-\eta^2)^s], \quad (2.3/2)$$

mit der neuen Variablen

$$\eta_1 = (w-b)/(w+b). \quad (2.3/3)$$

Nach Umformung folgt mit Verwendung der in (2.1/8) eingeführten Konstanten die Reihendarstellung

$$f = \sum_{q=0}^{2n} [a_q(w+b)\eta_1^q + ka_q(w+1)\eta^q]; \quad (2.3/4)$$

weiter ergibt sich

$$f_{1,w} = \sum_{q=0}^{2n} \{a_q [q\eta_1^{q-1} + (1-q)\eta_1^q] + ka_q [q\eta^{q-1} + (1-q)\eta^q]\}; \quad (2.3/5)$$

$$\bar{f} = - \sum_{q=0}^{2n} [a_q(w+b)\eta_1^{1-q} + ka_q(w+1)\eta^{1-q}] \quad (2.3/6)$$

für  $\bar{w} = -w$ .

Aus der letzten Gleichung ersieht man, daß dieser in (2.1/3) einzusetzende Ausdruck nicht nur an der Stelle  $w=1$  die Pole  $\eta^{-t}$  sondern auch an der Stelle  $w=b$  die Pole  $\eta_1^{-t}$  mit  $t=1; 2; \dots; (2n-1)$  enthält. Zur Beseitigung dieser Singularitäten sei für  $f_1$  die zu  $f$  analoge Reihendarstellung eingeführt:

$$f_1 = \frac{1}{8} \sum_{p=0}^{2n} [b_p(w+b)\eta_1^p + c_p(w+1)\eta^p]. \quad (2.3/7)$$

Damit folgen

$$f_{1,w} = \frac{1}{8} \sum_{p=0}^{2n} \{b_p [p\eta_1^{p-1} + (1-p)\eta_1^p] + c_p [p\eta^{p-1} + (1-p)\eta^p]\}; \quad (2.3/8)$$

$$\bar{f}_1 = - \frac{1}{8} \sum_{p=0}^{2n} [b_p(w+b)\eta_1^{1-p} + c_p(w+1)\eta^{1-p}] \quad (2.3/9)$$

für  $\bar{w} = -w$ .

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in (2.1/3) treten bei den Polen  $\eta_1^{-t}$  noch Potenzen von  $\eta$  und bei den Polen  $\eta^{-t}$  noch Potenzen von  $\eta_1$  als Faktoren auf, wodurch Reihenentwicklungen von  $\eta$  nach Potenzen von  $\eta_1$  sowie solche von  $\eta_1$  nach Potenzen von  $\eta$  erforderlich werden; diese gehen aus den Definitionsgleichungen (2.1/5) und (2.3/3) direkt hervor:

$$\eta_1^q = \sum_{r=0}^{\infty} d_r^{(q)} \eta^r \text{ mit } d_r^{(q)} = \sum_{s=0}^{q \text{ bzw. } r} \binom{q}{s} \binom{-q}{r-s} g^{q+r-2s} \quad (2.3/10)$$

$$\eta^q = \sum_{r=0}^{\infty} e_r^{(q)} \eta_1^r \text{ mit } e_r^{(q)} = \sum_{s=0}^{q \text{ bzw. } r} (-1)^{q+r} \binom{q}{s} \binom{-q}{r-s} g^{q+r-2s}. \quad (2.3/11)$$

Hierbei wurde der Parameter

$$g = (1 - b) / (1 + b) \quad (2.3/12)$$

eingeführt, dessen Werte – wie beim Parameter  $b$  – zwischen 0 und 1 liegen. Die für das Verschwinden der beiden Polgruppen zu erfüllenden Bedingungen lassen sich schließlich nach weiteren Umformungen in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=t+1}^{2n} \{ (q-t)(ka_q c_{q-t} + ka_{q-t} c_q) - (q-t-2) \times \\ & \quad \times (ka_q c_{q-t-1} + ka_{q-t-1} c_q) + \\ & + \sum_{p=0}^{2n} (ka_q b_p + a_p c_q) [p d_{q-t-1}^{(p-1)} - (p-1) d_{q-t-1}^{(p)}] \} = 0; \end{aligned} \quad (2.3/13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{q=t+1}^{2n} \{ (q-t)(a_q b_{q-t} + a_{p-t} b_q) - (q-t-2) \times \\ & \quad \times (a_q b_{q-t-1} + a_{q-t-1} b_q) + \\ & + \sum_{p=0}^{2n} (a_q c_p + ka_p b_q) [p e_{q-t-1}^{(p-1)} - (p-1) e_{q-t-1}^{(p)}] \} = 0. \end{aligned} \quad (2.3/14)$$

Beide Gleichungsgruppen gelten für  $t = 1; 2; \dots; (2n-1)$ . Dazu kommen die Normierungen [die Konstanten  $b_0, c_0, b_1, c_1$  treten nur in den Kombinationen  $(b_0 + b_1)$  und  $(c_0 + c_1)$  auf]:

$$\sum_{q=0}^{2n} b_q = 1; \quad \sum_{q=0}^{2n} c_q = k; \quad b_1 = 0; \quad c_1 = 0. \quad (2.3/15)$$

Damit stehen für die unbekanntenen Konstanten  $b_q$  und  $c_q$  gerade

ausreichend viele Gleichungen zur Verfügung. Für die Nennspannung gilt wieder

$$\sigma_N = 1. \quad (2.3/16)$$

Die Parameter  $b$  bzw.  $g$  und  $k$  stehen mit den geometrischen Parametern  $t/t_0$  bzw.  $s = \sqrt{t/(t_0 + t)}$  und  $t_0/\varrho_0$  in Zusammenhang (vgl. 1.2 und 1.3). Insbesondere kann  $k$  auf  $\alpha_0$  zurückgeführt werden (vgl. 2.2). Der Faktor  $\alpha$  der Spannungskonzentration errechnet sich dann aus (2.1/20). Der gewonnene Wert geht im Grenzfall  $b \rightarrow 1$  in den *Faktor des langen Risses*

$$\alpha_L = 2,243 \sqrt{(t_0 + t)/\varrho} \quad (2.3/17)$$

über, der sich mithin auch bei Zugbeanspruchung vom Reißfaktor  $\alpha_R$  nur durch die um die Tiefe der Makrokerbe vergrößerte Reißlänge unterscheidet. Im Grenzfall  $b \rightarrow 0$  ergibt sich als *Faktor des kurzen Risses*

$$\alpha_K = 2,243 \alpha_0 \sqrt{t/\varrho} = \alpha_0 \alpha_R. \quad (2.3/18)$$

Auch bei Zugbeanspruchung gilt daher die Multiplikationsregel der kurzen Risse. Die entsprechenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{IL}$  bzw.  $K_{IK}$  folgen jeweils durch Multiplikation mit  $\sigma_N \sqrt{\pi \varrho/2}$ . Für die numerische Auswertung erweist es sich als zweckmäßig, statt  $\alpha$  die Größe  $\alpha/\alpha_L = K_I/K_{IL}$  zu berechnen, die nur von den beiden Parametern  $\alpha_0$  und  $s$  bzw.  $t/t_0$  abhängt. Nachstehende Tabelle enthält einige Ergebnisse.

$t/t_0$	klein	1,530	3,190	0,164	1,750	0,163	0,363	groß
$\alpha_0$	beliebig	1,2	1,2	2,01	2,01	3,06	3,06	beliebig
$\alpha/\alpha_L$	$\alpha_0 s$	0,900	0,978	0,709	0,999	0,883	0,977	1

Für praktische Zwecke bietet sich folgende Näherungsformel als ausreichend an (Fehler unter 1,5 %):

$$(\alpha/\alpha_L)_{\text{zug}} = s \left\{ 1 + [(\alpha_0 - 1)^{-2,5} + (1/s - 1)^{-2,5}]^{-0,4} \right\}. \quad (2.3/20)$$

Bild 5 zeigt den Verlauf von  $(\alpha/\alpha_L)_{\text{zug}}$  als Funktion von  $s$  für  $\alpha_0 = 1; 2; 3; \dots; 10$ . Im Bereich der kurzen Risse und ebenso der langen Risse gilt (2.3/20) exakt. Die Kurve für die Halbkreiskerbe ( $\alpha_0 = 3,06$ ) fällt innerhalb der Bildgenauigkeit mit der

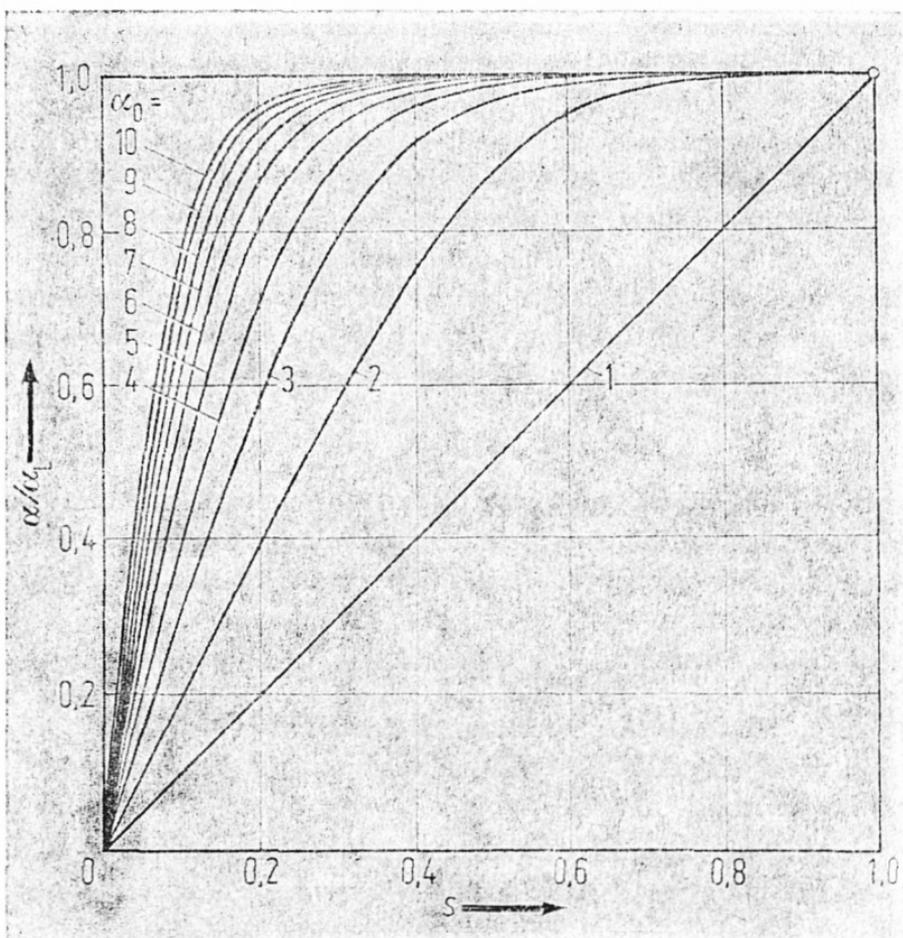


Bild. 5 Das Verhältnis  $\alpha/\alpha_L = K_I/K_{IL}$  für Zugbeanspruchung als Funktion des Parameters  $s = \sqrt{t/(t+t_0)}$  und des Makrokerbfaktors  $\alpha_0$ .

Kurve für  $\alpha_0 = 3$  zusammen.

Auch für dieses Problem gilt (2.1/23), also hier

$$K_I = 1,1215 (\alpha/\alpha_L)_{\text{zug}} \sigma_N \sqrt{\pi(t+t_0)}.$$

Im übrigen sei auf die Schlußbemerkung des Abschnittes 1.1 verwiesen.

#### Schrifttum

- [1] H. Neuber, Kerbspannungslehre, Berlin, 1. Aufl. 1937, 2. Aufl. 1958.
- [2] H. Liebowitz, Fracture, Bd. 2 u. 3, New York - London 1968-72.
- [3] H. G. Hahn, Bruchmechanik, LAMM 30, Stuttgart 1976.

- [4] T. Yokobori, A. Kamei, S. Konosu, Rep. of the Res. Inst. f. Strength and Fracture of Materials, Tohoku University 7 (1971) S. 57-62.
- [5] G. V. Kolossow, Z. Math. Phys. 62 (1914) S. 383.
- [6] N. J. Muskelisvili, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933) S. 264.
- [7] H. Neuber, Spannungsfunktionen der Verzahnungen, Proc. Int. Symp. Tiflis 1963, Moskau, Verlag Wissenschaft 1965.
- [8] H. Neuber, Ing.-Arch. 36 (1968) S. 387.
- [9] H. Neuber, Ing.-Arch. 37 (1968) S. 1.
- [10] L. A. Wigglesworth, Mathematika 4 (1957) S. 76.
- [11] F. G. Maunsell, Phil. Mag. VII, Bd. 21 (1936) S. 765.
- [12] M. Seika, Ing.-Arch. 27 (1960) S. 287.