BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Sitzung vom 4. Juni 1976

Zur Existenz und analytischen Darstellung von Nullstellenfolgen bei Exponentialsummen

Von **Hermann Schmidt** und **Gottfried P. Meyer** in Würzburg

Einleitung

Vor über 50 Jahren hat in diesen Sitzungsberichten *G. Pólya* [4] grundlegende Ergebnisse über die Nullstellenverteilung bei Exponentialsummen der Gestalt

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(z)\, e^{a_\nu z}$$

mitgeteilt ($P_\nu(z)$ nicht identisch verschwindende Polynome, a_ν verschiedene komplexe Zahlen). Für $N \geq 1$ hat eine solche in der komplexen Zahlenebene stets unendlich viele Nullstellen; dies folgt aus einer asymptotischen Abschätzung bei *Pólya*, scheint aber wenig bekannt zu sein; so mag ein sehr kurzer Beweis mithilfe eines Satzes von *Hadamard* erwünscht sein, den wir einleitend geben. Ferner zeigt *Pólya*, daß außerhalb beliebig enger Winkelräume um die äußeren Normalen auf den Seiten eines gewissen durch f bestimmten Polygons Π, des „Indikatordiagramms", nur endlich viele Nullstellen liegen können; dabei ist Π die konvexe Hülle der Menge der „Exponentenpunkte" $\bar{a}_\nu$.

In der seitherigen, schon recht umfangreichen Literatur des Gebiets (von der wir nur unmittelbar gebrauchtes anführen) wurde nun eine Fülle weiterer qualitativer und asymptotischer Ergebnisse über die Verteilung der Nullstellen zu Tage gefördert. Im Unterschied dazu geht es uns hier darum, für ausgewählte Nullstellenfolgen explizite analytische Darstellungen durch konvergente und hinsichtlich des Folgenindex asymptotische Entwicklungen nach „Skalenfunktionen" zu gewinnen (Hauptsatz § 2); letztere setzen sich dabei multiplikativ aus Potenzen, Logarithmen und Exponentialfunktionen zusammen, wie es S. 136/7 im einzelnen erörtert wird. Die von uns erfaßten Fälle sind durch die Gradbedingung gekennzeichnet

(6) $$\operatorname{gr} P_j < (1 - \alpha_j) \operatorname{gr} P + \alpha_j \operatorname{gr} Q.$$

Dabei ist Π so gelegt – was ohne Einschränkung möglich ist –, daß die betreffende Polygonseite mit dem Intervall $< 0,1 >$ der reellen Achse zusammenfällt; die α_j sind die im Inneren derselben gelegenen Exponentenpunkte, und P_j, P, Q sind die diesen bzw. den Endpunkten entsprechenden Polynome.

Sätze dieser Art sind bisher nur für den Fall bekannt gewesen, daß die Polygonseite keine Exponentenpunkte im Innern enthält (vgl. die Dissertation von G. P. *Meyer*, Würzburg 1975). (6) besagt insbesondere, daß das „erweiterte Indikatordiagramm" im Sinne von *Schwengeler* [10] § 4 nur eine einzige Strecke über der betrachteten Polygonseite besitzt. Beispiele legen es nahe zu vermuten, daß sich diese Forderung lockern läßt, worauf aber hier nicht mehr eingegangen wird.

§ 1. Vorbemerkungen

$z^\nu e^{az}$ und $z^{\nu'} e^{a'z}$ ($\nu, \nu' \in \boldsymbol{N}_0$, $a, a' \in \boldsymbol{C}$) stellen offenbar genau dann die nämliche Funktion $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ dar, wenn $\nu = \nu'$, $a = a'$. Eine endliche Anzahl paarweise verschiedener solcher Funktionen ist, wie in der Lehre von den linearen Differentialgleichungen gezeigt wird, über $\boldsymbol{C}$ linear unabhängig. Eine Darstellung

(1) $$f(z) = \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu(z)\, e^{a_\nu z}$$
$$0 \not\equiv p_\nu(z) \in \boldsymbol{C}[z],\ a_\nu \in \boldsymbol{C},\ a_\nu \neq a_\varkappa\ (\nu \neq \varkappa)$$

ist daher eindeutig bestimmt.

Ist nämlich $f(z) = \sum_{\varkappa=0}^{N'} q_\varkappa(z)\, e^{b_\varkappa z}$ eine weitere Darstellung dieser Art, $\{a_\nu\} = \mathfrak{A}$, $\{b_\varkappa\} = \mathfrak{B}$, so gilt mit $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \{d_\nu\}$

$$\sum P_\nu(z)\, e^{d_\nu z} = 0 \qquad \begin{aligned} P_\nu &= p_{k_\nu} - q_{k_\nu} && d_\nu \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \\ &= p_{k_\nu} \neq 0 && d_\nu \notin \mathfrak{B} \\ &= -q_{k_\nu} \neq 0 && d_\nu \notin \mathfrak{A} \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit ist

$$P_\nu = 0 \ \forall\, \nu, \text{ daher } \mathfrak{A} = \mathfrak{B},\ N = N',\ p_k = q_k \ \forall\, k.$$

$N + 1$ heiße die Gliederzahl von f. Jetzt läßt sich formulieren:

Satz: Eine mindestens zweigliedrige Exponentialsumme hat stets unendlich viele Nullstellen. Eine mindestens dreigliedrige Summe nimmt jeden komplexen Zahlwert unendlich oft an.

Beweis: Wäre ersteres nicht der Fall, so hätte man für $f(z)$ neben der Darstellung (1) auch noch eine Darstellung $P(z)\, e^{g(z)}$ ($P(z)$ Polynom, $g(z)$ ganze Funktion), worin, da $f(z)$ höchstens die Ordnung eins hat, nach Hadamard[1] $g(z) = a + bz$ sein müßte; $f(z)$ hätte also die eingliedrige Darstellung $f(z) = P(z)\, e^a e^{bz}$, gegen die Annahme. Die zweite Aussage des Satzes gilt, da $f(z) - c$ mindestens zweigliedrig ist.

Wir benützen öfters folgende einfache Umgestaltung der Taylor-Formel für Polynome.

Hilfssatz: Es sei

$$H(z) = h_0 z^l + h_1 z^{l-1} + \ldots + h_l \in \boldsymbol{C}[z] \quad (l \in \boldsymbol{N}).$$

Dann ist für $z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$:

$$\text{(2)} \qquad H(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{H^{(k)}(z_2)}{k!}\, z_1^{\,k} + h_0 z_1^{\,l} = $$

$$= H(z_1) + \sum_{k=0}^{l-1} d_k(z_2)\, z_1^{\,k}$$

mit

$$\text{(3)} \qquad d_k(z_2) = \frac{H^{(k)}(z_2)}{k!} - h_{l-k} \qquad (k = 0, \ldots, l-1).$$

§ 2. Der Hauptsatz

Wir müssen jetzt die Grundlagen der Theorie des Indikatordiagramms nach Polya [5] und Schwengeler [10] für unsere Funktionsklasse als bekannt voraussetzen. Hierfür vergleiche auch Dickson [1], [2]. Der bequemen Sprechweise halber normieren wir das konvexe Polygon $\Pi(f)$, was immer möglich ist, so, daß die gerade betrachtete Seite des Polygons mit der Strecke $I := [0,1]$ der reellen Achse zusammenfällt, das Innere von $\Pi(f)$

---

[1] Der hier gebrauchte Sonderfall seines berühmten Satzes ist nach Valiron [11], Cor. 7 (a), S. 18 mit den einfachsten Mitteln zu erhalten.

in der unteren Halbebene liegt; auf I gebe es $s+2$ $(s \in \boldsymbol{N}_0)$ reelle Exponentenpunkte $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{s+1} = 1$. Die Exponentialsumme hat also die Darstellung

$$(4) \qquad F(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{s} P_k(z)\, e^{\alpha_k z} + Q(z)\, e^z + \\ + \sum_{\tau=1}^{t} Q_\tau(z)\, e^{b_\tau z},$$

wobei $(s, t \in \boldsymbol{N}_0)$

$$(5) \qquad \begin{aligned} &0 \not\equiv P(z),\ Q(z) \in \boldsymbol{C}[z], \\ &0 \not\equiv P_k(z),\ Q_\tau(z) \in \boldsymbol{C}[z] \quad (k = 1, \ldots, s)\ (\tau = 1, \ldots, t), \\ &0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{s+1} = 1, \\ &b_\tau \in \boldsymbol{C},\ b_j \neq b_k\ (j \neq k), \quad \operatorname{Im} b_\tau > 0 \quad (\tau = 1, \ldots, t). \end{aligned}$$

Hauptsatz: Gegeben sei die Exponentialsumme (4) mit (5). Es sei

$$W_\delta := \{z = re^{i\varphi} \in \boldsymbol{C} \mid r > 0,\ |\varphi - \tfrac{\pi}{2}| < \delta;\ \delta > 0\}.$$

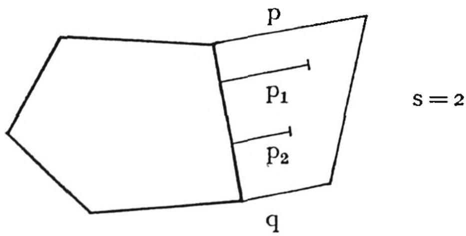
Es gelte

$$(6) \qquad \operatorname{grad} P_k(z) < (1 - \alpha_k) \operatorname{grad} P(z) + \alpha_k \operatorname{grad} Q(z) \\ (k = 1, \ldots, s).$$

Dann besitzt die Exponentialsumme $F(z)$ für jedes noch so kleine $\delta (> 0)$ unendlich viele Nullstellen $z_n \in W_\delta$. Für $n > N_0$ (N_0 hinreichend groß) existiert für z_n eine absolut konvergente Reihendarstellung, aus der sich eine asymptotische Entwicklung hinsichtlich n für $n \to \infty$ im Sinne von Herm. Schmidt [7] gewinnen läßt.

Bemerkung: Die Ungleichung (6) besagt geometrisch, daß die Punkte (α_k, p_k) unterhalb der Verbindungsstrecke $\mathfrak{f}$ von $(0, p)$ mit $(1, q)$ liegen, so daß also $\mathfrak{f}$ einzige obere Stützsehne[1]) der $s+2$ erwähnten Punkte ist, und daß im Innern von $\mathfrak{f}$ keine solchen gelegen sind. Wenn man die Richtung der äußeren Normalen der betreffenden Polygonseite als „Richtung nach oben" nimmt, erhält man so auch eine von der speziellen Normierung der Lage von Π unabhängige Form der Bedingung (6).

[1] Vgl. hierzu Herm. Schmidt [8], insbesondere S. 535.



Beweis: Zur Abkürzung setzen wir

$$p := \text{grad } P(z), \quad q := \text{grad } Q(z),$$
$$p_k := \text{grad } P_k(z) \qquad (k = 1, \ldots, s),$$
$$P(z) := c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \ldots + c_p,$$
$$(c_0, \ldots c_p) \in \boldsymbol{C}^{p+1}, \; c_0 \neq 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Q(z)$ ein normiertes Polynom. Für die Gleichung $F(z) = 0$ machen wir für $p \neq q$ die Transformation ($n \in \boldsymbol{N}$)

(7) $$z = \omega_n + (p - q) \operatorname{Lg}(C\omega_n) + \zeta$$

$$\omega_n := 2n\pi i, \quad \mathrm{C} := (-c_0)^{\frac{1}{p-q}}, \quad \zeta \in \boldsymbol{C}.$$

Dabei bedeute $\operatorname{Lg} z = \operatorname{Lg} |z| + i \operatorname{Arc} z$ den Hauptwert des Logarithmus ($\operatorname{Lg} |z|$ reell, $-\pi < \operatorname{Arc} z \leq \pi$).

Mit (2), (3) und (7), wobei zunächst $z_2 = \zeta$, alsdann gleich dem Mittelglied $(p - q) \operatorname{Lg}(C\omega_n)$ genommen wird, folgt

(8) $$P(z) = c_0 \omega_n^p \, [1 + R(\omega_n, \zeta)]$$

mit

(9) $$R(\omega_n, \zeta) := \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu c_0^{-1} \omega_n^{-\nu} + \sum_{\nu=0}^{p-1} d_\nu[(p-q) \operatorname{Lg}(C\omega_n)] \, \omega_n^{\nu-p} c_0^{-1} + \sum_{\nu=0}^{p-1} [\omega_n + (p-q) \operatorname{Lg}(C\omega_n)]^\nu \, \omega_n^{-p} \mathrm{d}_\nu(\zeta) c_0^{-1},$$

$$d_\nu(t) = \frac{P^{(\nu)}(t)}{\nu!} - c_{p-\nu} \qquad (\nu = 0, \ldots, p-1).$$

$R(\omega_n, \zeta)$ hat also die Gestalt:

$$(10) \qquad R(\omega_n, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{3p} \varepsilon_\nu(n)\, g_\nu(\zeta);$$

dabei ist $g_\nu(\zeta)$ ein Polynom in ζ, und es ist

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_\nu(n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, 3p).$$

Analog ergibt sich

$$(12) \qquad P_k(z) = \beta_{k,0}\, \omega_n^{p_k} [1 + R_k(\omega_n, \zeta)] \qquad (k = 1, \ldots, s),$$

wenn wir mit $\beta_{k,0}$ den höchsten Koeffizienten von $P_k(z)$ bezeichnen. $R_k(\omega_n, \zeta)$ ist analog zu (10) von der Gestalt

$$(13) \qquad R_k(\omega_n, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{3p_k} \varepsilon_{k,\nu}(n)\, g_{k,\nu}(\zeta) \qquad (k = 1, \ldots, s),$$

wobei $g_{k,\nu}(\zeta)$ ein Polynom in ζ ist, und es ist

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_{k,\nu}(n) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, s,\ \nu = 1 \ldots, p_k).$$

Schließlich haben wir

$$(15) \qquad Q(z) = \omega_n^{q} [1 + R_0(\omega_n, \zeta)],$$

wobei wiederum

$$(16) \qquad R_0(\omega_n, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{3q} \varepsilon_{0,\nu}(n)\, g_{0,\nu}(\zeta)$$

mit Polynomen $g_{0,\nu}(\zeta)$;

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_{0,\nu}(n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, 3q).$$

(7) liefert vermöge (8), (12) und (15) die zu $F(z) = 0$ äquivalente Gleichung

$$(18) \qquad e^\zeta - 1 + e^\zeta R_0(\omega_n, \zeta) - R(\omega_n, \zeta) + \\ + \sum_{k=1}^{s} \omega_n^{p_k + p(\alpha_k - 1) - q\alpha_k} [1 + R_k(\omega_n, \zeta)]\, \beta_{k,0} (-c_0)^{\alpha_k - 1} e^{\alpha_k \zeta} + \\ - \sum_{\tau=1}^{t'} \tilde{\varepsilon}_\tau(n)\, \tilde{g}_\tau(\zeta) = 0.$$

Dabei haben wir noch berücksichtigt, daß wir mit (7) erreichen (bei passendem $t' \in N_0$):

$$(19) \qquad \omega_n^{-p} c_0^{-1} \sum_{\tau=1}^{t} Q_\tau(z)\, e^{b_\tau z} = \sum_{\tau=1}^{t'} \tilde{\varepsilon}_\tau(n)\, \tilde{g}_\tau(\zeta);$$

$\tilde{g}_\tau(\zeta)$ ist eine ganze Funktion. Wegen Im $b_\tau > 0$ gilt nun

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} \tilde{\varepsilon}_\tau(n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, t').$$

Wegen (10, (13), (16) und (19) hat (18) die Gestalt

$$(21) \qquad e^\zeta - 1 - \sum_{\nu=1}^{h} \varepsilon_\nu(n)\, g_\nu(\zeta) = 0$$

mit passendem $h \in N$ und ganzen Funktionen $g_\nu(\zeta)$, wobei nach (11), (14), (17), (20) und der Voraussetzung (6)

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_\nu(n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h).$$

Es sei die positive Zahl $r < 2\pi$ beliebig, dann fest gewählt. Wir betrachten die Gleichung (21) für $|\zeta| \leq r$. Ersetzen wir in (21) die von n abhängigen Größen $\varepsilon_\nu(n)$ durch Veränderliche $\zeta_\nu \in C$ $(\nu = 1, \ldots, h)$, so erhalten wir ein reguläres Problem einer impliziten Funktion von mehreren komplexen Veränderlichen

$$(23) \qquad e^\zeta - 1 - \sum_{\nu=1}^{h} \zeta_\nu\, g_\nu(\zeta) = 0.$$

Nach Herm. Schmidt [6], (§ 1; setze speziell $\psi(w) = w$, $n = 1$) besitzt (23) genau eine Lösung ζ mit $|\zeta < r$, falls

$$(24) \qquad |\zeta_\nu| \leq \delta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, h);$$

dabei sollen die $\delta_\nu > 0$ der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{h} \delta_\nu M_\nu < r$$

genügen, wo M_ν geeignet gewählte positive Zahlen sind, für die

$$\left| \frac{\zeta}{e^\zeta - 1}\, g_\nu(\zeta) \right| \leq M_\nu \text{ für } |\zeta| \leq r$$

gilt. Die Lösung läßt sich für $|\zeta_\nu| \leq \delta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, h)$ als eine absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe in $\zeta_1, \ldots, \zeta_h$

darstellen (siehe [6], (8) bzw. (10)). Ist $p = q$, so führt die Transformation

$$z = \omega_n + \mathrm{Lg}\,(-c_0) + \zeta,$$

wie man sofort sieht, zum Ziel.

Wegen (22) ist für $n > N_0$ ($N_0 \in \boldsymbol{N}$ hinreichend groß) die Bedingung $|\varepsilon_\nu(n)| \leq \delta_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, h$) erfüllt; (21) besitzt demnach für $n > N_1$ genau eine Lösung $\zeta = \zeta_n$ mit $|\zeta_n| < r$ und $z_n \in W_\delta$. Die Differenz $z_n - [\omega_n + (p - q)\,\mathrm{Lg}\,(C\omega_n)]$ läßt sich in eine für $n > N$ absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln. Die auftretenden Glieder zerfallen in drei Klassen:

1. Produkte von Potenzen und Logarithmen von ω_n; man überzeugt sich an Hand von (9), (13) und (16), daß sie von der Form $\omega_n^k\,[\mathrm{Lg}\,(C\omega_n)]^l$ ($l \in \boldsymbol{N}_0$, $k \in \boldsymbol{Z}$) sind.

2. Exponentialglieder der Form $\gamma_n^{\sigma_\nu} e^{-\lambda_\nu \gamma_n}$ mit $\sigma_\nu \in \boldsymbol{N}_0$, $\gamma_n := \omega_n + (p - q)\,\mathrm{Lg}(C\omega_n)$, $\mathrm{Re}\,(\lambda_\nu \gamma_n) > 0$, wobei $-\lambda_\nu$ nur positiv ganzzahlige Linearkombinationen der endlich vielen Zahlen $b_1, \ldots, b_t$ durchläuft.

3. Produkte von Elementen des ersten und zweiten Typs.

Wir ordnen die Glieder der Reihe nach unserer Klasseneinteilung um:

$$z_n - [\omega_n + (p - q)\,\mathrm{Lg}(C\omega_n)] = S_1(\omega_n) + S_2(\omega_n) + S_3(\omega_n);$$

die Reihe $S_j(\omega_n)$ enthalte nur Glieder vom j-ten Typ ($j = 1,2,3$). Treten nur Glieder vom ersten Typ auf (d. h. $t = 0$), so ist $S_2(\omega_n) = S_3(\omega_n) \equiv 0$. Man überzeugt sich an Hand von (3), (9), (13) und (16), daß in der Reihe $S_1(\omega_n)$ nur Funktionen der Gestalt $(\mathrm{Lg}\ C\omega_n)^{\varkappa-\lambda}\ \omega_n^{-\varkappa}$ ($0 \leq \lambda \leq \varkappa$, $\varkappa \in \boldsymbol{N}$) auftreten. Die Reihe $S_1(\omega_n)$ ist dann eine asymptotische Entwicklung für $n \to \infty$, was man ähnlich wie bei Herm. Schmidt [9] ((4), (6)) zeigt, wo nur zwei Größen ζ_1 und ζ_2 auftreten. Wir betrachten die Reihe $S_2(\omega_n)$ ($S_1(\omega_n) = S_3(\omega_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \mathrm{grad}\ P(z) = \mathrm{grad}\ Q(z) = 0$). Sie ist eine asymptotische Entwicklung ihrer Summe, wofür im Falle des Auftretens von positiven Potenzen von γ_n eine Erweiterung der Bemerkung 2 bei Herm. Schmidt [6] heranzuziehen ist. Hierbei ist (in der dortigen Sprechweise) in dem Faktor $z^{\varkappa-\lambda}\ \varkappa$ durch ein $\sigma_\varkappa = O(\alpha_\varkappa)$ für $\varkappa \to \infty$ zu ersetzen. Im allgemeinen Fall ist $S_2(\omega_n) + S_3(\omega_n)$ immer noch $O(\gamma_n^{k_0} e^{-\mu_1 \gamma_n})$ für $n \to \infty$ $(\mathrm{Re}(\mu_1 \gamma_n) > 0,\ k_0 \in \boldsymbol{Z})$, da ein maximales Glied herausgezogen werden kann, so daß $S_1(\omega_n)$ eine asymptotische Entwicklung für $z_n - \gamma_n$ für $n \to \infty$ ist, wenn auch trotz der Konvergenz von $S_1(\omega_n)$ keine Darstellung für $z_n - \gamma_n$.

Literaturverzeichnis

[1] D. G. Dickson, Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients; Mem. Amer. Math. Soc. 23 (1957), 1–72.

[2] D. G. Dickson, Zeros of exponential sums; Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 84–89.

[3] G. P. Meyer, Konvergente und asymptotische Reihenentwicklungen von Nullstellenfolgen und nichtalgebroiden Umkehrelementen von Exponentialsummen; Diss. Würzburg, 1975.

[4] G. Pólya, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser transzendenter Funktionen; Sitz.-Ber. Bayr. Akad. d. Wiss, Math-Nat. Kl. 1920, 285–290.

[5] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen; Math. Z. 29 (1929), 549–640.

[6] Herm. Schmidt, Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen; Math. Z. 40 (1936), 266–278.

[7] Herm. Schmidt, Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen; Math. Ann. 113 (1937), 629–656.

[8] Herm. Schmidt, Über die Existenz und Darstellung von impliziten Funktionen bei singulären Anfangswerten; Math. Z. 43 (1938), 533–552.

[9] Herm. Schmidt, Lösung der Aufgabe 247; Jahresber. DMV 48 (1938), 57–59.

[10] E. Schwengeler, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen (Exponentialsummen); Diss. Zürich, 1925.

[11] G. Valiron, Lectures on the general theory of integral functions; Chelsea Publ. Company, New York, 1949.