BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Extremalpunktmethoden für geordnete Algebren

Von **Klaus Donner** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Heinz Bauer am 12.12.1975

Einleitung

Die Bestimmung der Extremalpunkte bzw. Extremalstrahlen konvexer Mengen bzw. Kegel stellt oft eine entscheidende Hürde für die Anwendung einer Reihe von Sätzen der Funktionalanalysis dar. Leider gibt es keine allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems. In wichtigen Spezialfällen jedoch liegt eine vollständige Charakterisierung der Extremalpunkte (bzw. -strahlen) vor. So konnte nachgewiesen werden, daß die Extremalpunkte gewisser konvexer Mengen von Linearformen und linearen Operatoren auf Algebren reeller Funktionen sämtlich *Algebrahomomorphismen* sind (vgl. [2], [3], [19]). Für kompakte Räume X und Y bilden etwa die positiven linearen Operatoren von $\boldsymbol{C}(X)$ in $\boldsymbol{C}(Y)$, die die konstante Funktion 1_X auf X in die Eins 1_Y auf Y abbilden, eine konvexe Menge M, deren Extremalpunkte genau die in M enthaltenen Algebrahomomorphismen von $\boldsymbol{C}(X)$ in $\boldsymbol{C}(Y)$ sind [16]. Das Vorhandensein „genügend vieler" *beschränkter* Funktionen und einer mit der *Multiplikation verträglichen Ordnung* stellt sich hierbei als zentrales Beweishilfsmittel heraus.

Offene oder versteckte Multiplikativitätseigenschaften von Extremalpunkten und Elementen auf Extremalstrahlen treten aber weit über den Rahmen der Funktionenalgebren hinaus auf. Als Beispiel betrachte man den Kegel K der vollständig monotonen Funktionen auf den nicht-negativen reellen Zahlen $\boldsymbol{R}_+$. Diese Funktionen sind genau die Laplace-Transformierten endlicher, positiver Maße auf $\boldsymbol{R}_+$. Eine vollständig monotone Funktion liegt dann und nur dann auf einem Extremalstrahl von K, wenn sie nicht-negatives Vielfaches eines Exponentials $t \mapsto e^{-kt} (t, k \in \boldsymbol{R}_+)$ ist. Andererseits erfüllt jedes derartige Exponential f die Gleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$. Die eindeutige lineare Fortsetzung von f auf die Halbgruppenalgebra A über der additiven Halb-

gruppe $\boldsymbol{R}_+$ ist also multiplikativ. Es stellt sich die Frage, welche Ordnung auf A zugrundegelegt werden sollte, um die vollständig monotonen Funktionen auf $\boldsymbol{R}_+$ mit den positiven Linearformen auf A identifizieren zu können. Tatsächlich läßt sich eine solche (linear verträgliche) Ordnung auf A angeben. Sie erfüllt das Monotoniegesetz der Multiplikation auf A, und die Elemente von A erweisen sich insofern als „beschränkt", als die Algebraeins zugleich Ordnungseinheit von A ist.

Betrachtet man vollständig monotone Funktionen auf den strikt positiven reellen Zahlen, so wird man auf eine Algebraeins in der zugehörigen Halbgruppenalgebra verzichten müssen. Auch die Möglichkeit der Einführung einer geeigneten Ordnung muß i. a. zugunsten einer Präordnung abgeschwächt werden. Die Verwendung abstrakter prägeordneter Algebren erweist sich auch dort als fruchtbar, wo zunächst keine Algebrastruktur zur Verfügung zu stehen scheint (vgl. [11], [13]).

In dieser Arbeit sollen zunächst einige im Fall von Funktionen-Algebren bereits bekannte Resultate auf sogenannte beschränkte, prägeordnete Algebren verallgemeinert werden. Durch eine Reihe inhaltlich weitgehend verschiedenartiger Beispiele wird zugleich die Anwendbarkeit dieser Verallgemeinerung belegt.

Um die erzielten Resultate für Integraldarstellungen nutzbar zu machen, ist darüber hinaus ein genauer Einblick in die Struktur des Kegels P der positiven Linearformen einer beschränkten, prägeordneten Algebra A erforderlich. Selbst für Funktionenalgebren ist dieser Problemkreis bisher weitgehend unerforscht geblieben. Es stellt sich heraus, daß der Kegel P einen ausgezeichneten Hut H besitzt, der ein Simplex ist und genau die positiven, multiplikativen Linearformen als Extremalpunkte aufweist. Leider ist H i. a. kein universeller Hut von P, d. h. der von H erzeugte Kegel $\boldsymbol{R}_+H$ stimmt nicht mit P überein. Daher sind die Choquetschen Integraldarstellungssätze nicht direkt anwendbar. Bezeichnet jedoch P_2 den Kegel aller derjenigen positiven Linearformen g auf A, die die Gleichung $g(xy) = 0$ für alle $x,y \in A$ erfüllen, und ist P_1 der Teilkegel von P, der alle Suprema aufsteigender Netze aus $\boldsymbol{R}_+H$ enthält, so gestattet P eine Zerlegung als direkte (Kegel-) Summe von P_1 und P_2. Nach [12] läßt sich jede Linearform aus P_1 durch genau ein positives

Radonmaß auf den nicht-trivialen, multiplikativen, positiven Linearformen von A darstellen. Unter geeigneten Bedingungen an den Werteraum erhält man ähnliche Resultate auch für Kegel positiver linearer Operatoren auf einer beschränkten, prägeordneten Algebra. Als Anwendung wird ein kurzer Beweis des Satzes von Bochner vorgeführt. Weitere Beispiele finden sich in [11], [12], [13].

1. Beschränkte, prägeordnete Algebren

Im folgenden sei $\boldsymbol{K}$ stets der Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen oder der Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen. Ist V ein $\boldsymbol{K}$-Vektorraum, $S \subset V$ ein konvexer Kegel (ausnahmslos mit Spitze in 0), so wird durch die Äquivalenz $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in S$ eine Präordnung auf V definiert, die mit der linearen Struktur verträglich ist. Sie wird kurz *S-Präordnung* genannt. Ist umgekehrt V ein prägeordneter $\boldsymbol{K}$-Vektorraum, so ist $V_+ := \{x \in V : x \geqslant 0\}$ ein konvexer Kegel, und die gegebene Präordnung ist die V_+-Präordnung.

Alle im folgenden auftretenden Algebren werden stets als *assoziativ*, jedoch *i. a. nicht* als *kommutativ* angenommen.

1.1. Definitionen: i) Ein konvexer Kegel H in einer $\boldsymbol{K}$-Algebra A heiße *Halbalgebra*, wenn $H \cdot H := \{xy : x, y \in H\} \subset H$. Die H-Präordnung auf A erfüllt dann die Monotoniegesetze bzgl. sämtlicher Algebraoperationen.

Eine $\boldsymbol{K}$-Algebra A, versehen mit einer Präordnung, heiße *prägeordnete Algebra*, wenn A_+ eine Halbalgebra ist.

ii) Sei A eine prägeordnete ($\boldsymbol{K}$-)Algebra. Dann bezeichne

$$C_A := \{x \in A_+ : xy \leqslant y \textit{ und } yx \leqslant y \textit{ für alle } y \in A_+\}$$

den *Einheitsintervall* von A. A heiße *beschränkt*, wenn A_+ mit dem vom Einheitsintervall erzeugten Kegel $\boldsymbol{R}_+ C_A = \{rx : r \in \boldsymbol{R}_+, x \in C_A\}$ übereinstimmt und der von A_+ erzeugte $\boldsymbol{K}$-Vektorraum $VR_{\boldsymbol{K}}(A_+)$ gleich A ist.

1.2. Bemerkungen: i) Sei A eine prägeordnete $\boldsymbol{K}$-Algebra. Dann ist das Einheitsintervall C_A eine *konvexe* und *linkserbliche*

Teilmenge von A_+[+]). Darüber hinaus gilt $C_A \cdot C_A \subset C_A$. Enthält A eine positive Eins $\mathbf{1}$, so ist $C_A = \{x \in A : 0 \leqslant x \leqslant \mathbf{1}\}$.

ii) Ist A eine beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{C}$-Algebra und i die imaginäre Einheit, so ist $A_+ - A_+$ eine beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{R}$-Algebra und $A = (A_+ - A_+) + i(A_+ - A_+)$.

iii) Zu jeder Teilmenge M von A gibt es eine kleinste, M umfassende Halbalgebra, die *von M erzeugte Halbalgebra.*

Ehe die obigen Definitionen durch Beispiele erläutert werden, soll ein Hilfssatz zur Konstruktion beschränkter prägeordneter Algebren angegeben werden.

1.3. Lemma: *Sei M eine Teilmenge einer $\boldsymbol{K}$-Algebra A mit $VR_{\boldsymbol{K}}(M) = A$. Ist A_+ die von M erzeugte Halbalgebra, und gilt*

$$y - xy \in A_+ \text{ und } y - yx \in A_+ \text{ für alle } x,y \in M,$$

so wird A mit der A_+-Präordnung eine beschränkte, prägeordnete Algebra. Die Menge M ist dann im Einheitsintervall enthalten.

Beweis: Sei $x \in M$. $H := \{y \in A_+ : y - xy \in A_+,\ y - yx \in A_+\}$ ist Halbalgebra mit $M \subset H \subset A_+$, also $H = A_+$, d. h. $y - xy \in A_+$ und $y - yx \in A_+$ für alle $y \in A_+$. Daher ist $x \in C_A$ und A_+ die von C_A erzeugte Halbalgebra. Schließlich wird A von M und folglich von A_+ linear erzeugt, d. h. A ist beschränkt.

1.4. Beispiele: i) Sei A eine $\boldsymbol{K}$-Algebra und $x \leqslant y$ für alle $x,y \in A$. Dann wird A mit dieser Präordnung eine beschränkte, prägeordnete Algebra. Das Einheitsintervall stimmt in diesem Fall mit A $(= A_+)$ überein.

ii) Sei S ein konvexer Kegel in einem $\boldsymbol{K}$-Vektorraum V mit $VR_{\boldsymbol{K}}(S) = V$. Definiert man eine Multiplikation in V durch die Vorschrift $xy = 0$ für alle $x,y \in V$, so wird V bzgl. der S-Präordnung eine beschränkte, prägeordnete Algebra mit $C_V = S$.

iii) Die Bezeichnung „*beschränkte, prägeordnete Algebra*" wird durch das folgende Beispiel erklärt:

[+] Eine Teilmenge M eines konvexen Kegels S heißt bekanntlich *linkserblich in S*, wenn mit jedem $x \in M$ auch alle Elemente $s \in S$ mit $s \leqslant x$ (in der S-Präordnung) zu M gehören.

Sei M eine Menge und A eine Algebra reeller oder komplexer Funktionen auf M (punktweise Verknüpfungen). A ist bei punktweiser Ordnung genau dann eine beschränkte, geordnete Algebra, wenn jede Funktion aus A beschränkt ist und $A = VR_K(A_+)$ gilt. Das Einheitsintervall besteht hier aus allen denjenigen Funktionen, die nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

iv) Sei H eine Halbgruppe und A die $\boldsymbol{R}$-Halbgruppenalgera von H. H werde mit seiner natürlichen Einbettung in A identifiziert. Die Menge

$$M := \{\prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - x_i) \cdot y \cdot \prod_{j=1}^{m} (\mathbf{1} - z_j) : n, m \in \boldsymbol{Z}_+, y \in H,$$
$$(x_i) \in H^n, (z_j) \in H^m\}$$

erfüllt dann die Voraussetzungen von Lemma 1.3 (die Produkte sind Abkürzungen für jene Elemente aus A, die bei formaler Ausmultiplikation entstehen, also z. B. $(\mathbf{1} - x)y = y - xy$). Zum Beweis seien $n, m \in \boldsymbol{Z}_+$, $(x_i) \in H^n$, $(z_j) \in H^m$, $y \in H$, $\zeta \in M$ gegeben. Dann liegt $\zeta(\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - x_i) \cdot y \prod_{j=1}^{m} (\mathbf{1} - z_j))$ in der von M erzeugten Halbalgebra A_+. Dies ist klar für $n + m = 0$ ($\mathbf{1} - y$ tritt dann als zusätzlicher Faktor an die Produktdarstellung von ζ). Ist die Behauptung bereits bewiesen für $n + m = k \in \boldsymbol{Z}_+$, so gilt für $n + m = k + 1$:

$$\zeta (\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - x_i) \cdot y \cdot \prod_{j=1}^{m} \{1 - z_j)) =$$

$$= \begin{cases} \zeta (\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - x_i) y \prod_{j=1}^{m-1} (\mathbf{1} - z_j)) + \zeta \cdot \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - x_i) y \prod_{j=1}^{m-1} (\mathbf{1} - z_j) z_m \\ \in A_+ + A_+ = A_+, \text{ falls } m > 0, \\ \zeta (\mathbf{1} - \prod_{i=2}^{n} (\mathbf{1} - x_i) y) + \zeta \cdot x_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} (\mathbf{1} - x_i) y \in A_+, \\ \text{falls } m = 0, \text{ also } n \geqslant 1. \end{cases}$$

In gleicher Weis beweist man $(\mathbf{1} - \eta)\, \zeta \in A_+$ für alle $\zeta, \eta \in M$. Nach 1.3 ist also A mit der A_+-Präordnung eine beschränkte, prägeordnete Algebra.

v) Sei V ein $\boldsymbol{R}$-Vektorraum, $S \subset V$ ein konvexer Kegel und A_+ der Kegel aller linearen Operatoren T von V in sich mit den Eigenschaften

$$T(S) \subset S \text{ und } \exists \lambda \in \boldsymbol{R}_+ : \forall x \in S : \lambda x - Tx \in S.$$

Dann ist $A_+ - A_+$ eine beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{R}$-Algebra bzgl. der A_+-Präordnung und der Hintereinanderausführung als Multiplikation. In der Tat ist A_+ eine Halbalgebra mit Eins I (= identische Abbildung), und der vom Einheitsintervall $C_A = \{T \in A_+ : T \leqslant I\}$ erzeugte Kegel ist A_+.

vi) Sei V eine kommutative $\boldsymbol{C}$-Algebra versehen mit einer linear verträglichen, lokalkonvexen, Hausdorffschen Topologie, so daß die Multiplikation $(x,y) \mapsto xy$ hypostetig ist bzgl. der Menge $\mathfrak{K}$ aller kompakten Teilmengen von V+). Weiter sei $\mathfrak{S}$ ein System kompakter, konvexer Teilmengen von V mit absorbierender Vereinigung B.

Für eine stetige $\boldsymbol{R}$-lineare Abbildung $x \mapsto \tilde{x}$ von V in sich bezeichne W den kleinsten abgeschlossenen konvexen Kegel, der $\{x\tilde{x} : x \in V\}$ enthält. Dann ist V eine prägeordnete Algebra bzgl. der W-Präordnung. Liegt $x\tilde{x}$ für jeden Extremalpunkt x einer der Mengen S ($S \in \mathfrak{S}$) im Einheitsintervall C_W von W, so gilt:

a) $\{y\tilde{y} : y \in B\} \subset C_W$,

b) $A_+ := \boldsymbol{R}_+ C_W$ *liegt dicht in* W,

c) $A := (A_+ - A_+) + i(A_+ - A_+)$ *ist eine beschränkte, prägeordnete* $\boldsymbol{C}$*-Algebra mit* $C_A = C_W$.

Beweis: Sei $S \in \mathfrak{S}$ und S_k die konvexe Hülle der Extremalpunkte von S. Zu $y \in S_k$ existieren dann Extremalpunkte $y_1, \ldots, y_n$ von S und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ und $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$. Aus der Gleichheit

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \tilde{y}_j = y\tilde{y} + \sum_{j<l} \lambda_j \lambda_l (y_j - y_l)(y_j - y_l)^{\sim}$$

+) Die bilineare Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ ist also stetig auf allen Mengen der Form $K \times V$ ($K \in \mathfrak{K}$).

ergibt sich $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \tilde{y}_j \geqslant y\tilde{y}$ in der W-Präordnung. Da C_W konvex und linkserblich in W ist, und da $y_j \tilde{y}_j \in C_W$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, folgt $y\tilde{y} \in C_W$.

Ist $z \in S$ beliebig, so existiert nach dem Satz von Krein-Milman ein gegen z konvergierendes Netz $(z_\tau)_{\tau \in T}$ in S_k. Aus der $\mathfrak{K}$-Hypostetigkeit der Abbildung $(x,y) \mapsto xy$ und der Stetigkeit von $x \to \tilde{x}$ ergibt sich daher $z\tilde{z} = \lim_{\tau \in T} z_\tau \tilde{z}_\tau \in C_W$, da C_W abgeschlossen ist.

Also ist $\{y\tilde{y} : y \in B\} \subset C_W$ und somit $\{x\tilde{x} : x \in V\} \subset \boldsymbol{R}_+ C_W = A_+$, da B absorbierend ist. Nach Definition von W liegt A_+ dicht in W und $C_W = \{x \in W : x - xy \in W \textit{ für alle } y \in A_+\} = \{x \in A_+ : x - xy \in A_+ \textit{ für alle } y \in A_+\} = C_A$.

Das folgende Beispiel ist eine erste Konkretisierung der soeben dargestellten Situation. Eine weitere Anwendung findet sich in [13].

vii) Sei G eine (additiv geschriebene) lokalkompekte abelsche Gruppe. Da G *parakompakt* ist (vgl. [4], chap. III, § 4, nº 6, prop. 13), ist der Raum $\boldsymbol{C}(G, \boldsymbol{C})$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf G *tonneliert* bzgl. lokal gleichmäßiger (= kompakter) Konvergenz auf G (vgl. [5], chap. IV, § 4, exercice 18). Der Dualraum $V = \boldsymbol{C}(G, \boldsymbol{C})'$ der *komplexen Radonmaße auf G mit kompaktem Träger* ist somit *quasivollständig* unter der Topologie der kompakten Konvergenz (vgl. [22], S. 85) und die Faltung $*$ eine $\mathfrak{K}$-hypostetige, bilineare Operation auf V+). Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ sei $S_K = \{\mu \in V : \|\mu\| \leqslant 1$ *und* $\operatorname{supp}(\mu) \subset K\}$. Dann ist $\mathfrak{S} := \{S_K : K \subset G$ *kompakt*$\}$ ein System kompakter Teilmengen von V (vgl. [5], chap. IV, § 4, nº 9, Cor. 1), und $B := \bigcup_{S_K \in \mathfrak{S}} S_K = \{\mu \in V : \|\mu\| \leqslant 1\}$ ist absorbierend. Weiter ist jeder Extremalpunkt von S_K ($K \subset G$ kompakt) von der Form $\lambda \varepsilon_x$ ($\lambda \in \boldsymbol{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $x \in K$), wobei ε_x das Dirac-Maß an der Stelle x bezeichnet (vgl. [14], S. 441). Ist μ das konjugierte Maß zu $\mu \in V$ nach Spiegelung von μ am Nullpunkt, so gilt $(\lambda \varepsilon_x) * \widetilde{(\lambda \varepsilon_x)} = \varepsilon_0$ für alle $\lambda \in \boldsymbol{C}$ mit $|\lambda| = 1$

+) Der Beweis erfolgt in völliger Analogie zu [6], chap. VIII, § 3, nº 3, cor. prop. 12.

und alle $x \in G$. Also sind die Voraussetzungen von Beispiel (vi) erfüllt.

Die gemäß (vi) konstruierte beschränkte, prägeordnete Algebra A stimmt mit V überein; denn für jedes $\mu \in V$ ist

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,[(\varepsilon_0 + \mu) * (\varepsilon_0 + \mu)^{\sim} - i(\varepsilon_0 + i\mu) * (\varepsilon_0 + i\mu)^{\sim} - (1 - i)(\varepsilon_0 + \mu * \tilde{\mu})] \in (A_+ - A_+) + i(A_+ - A_+).$$

Das folgende Lemma ist von entscheidender Bedeutung für die weiteren Ausführungen. Es vervollständigt die in 1.2. i begonnene Liste der wichtigen Eigenschaften des Einheitsintervalls.

1.5. Lemma: *Sei A eine prägeordnete Algebra. Dann gilt:*

a) $x + y - xy \in C_A$ *für alle* $x, y \in C_A$;

b) C_A *ist aufsteigend filtrierend.*

Beweis: Seien $x, y \in C_A$, $z \in A_+$. Da $z - yz \in A_+$, ist $x(z - yz) \leqslant z - yz$, d. h. $(x + y - xy)z \leqslant z$. Ebenso ergibt sich $z(x + y - xy) \leqslant z$.

Folglich ist $x + y - xy \in C_A$. Wegen $x \leqslant x + y - xy$ und $y \leqslant x + y - xy$ ist damit auch (b) bewiesen.

2. Multiplikativitätseigenschaften extremaler positiver linearer Operatoren

Seien V, W prägeordnete $\boldsymbol{K}$-Vektorräume. Ein linearer Operator $f: V \to W$ heiße *positiv*, wenn $f(V_+) \subset W_+$. $P(V, W)$ bezeichne den konvexen Kegel aller positiven linearen Abbildungen von V in W.

Ist A eine prägeordnete $\boldsymbol{K}$-Algebra, H eine konvexe Teilmenge des positiven Kegels V_+ eines prägeordneten $\boldsymbol{K}$-Vektorraums V, so ist $P_H(A, V) := \{f \in P(A, V) : f(C_A) \subset H\}$ konvex. Ist B eine weitere prägeordnete Algebra über demselben Körper $\boldsymbol{K}$, so bezeichne $AP(A, B)$ die Menge aller *positiven Algebrahomomorphismen* von A in B.

Sei E ein konvexer Kegel linearer Abbildungen von A in V. Liegen dann für jedes $y \in A_+$, $f \in P(A, V) \cap E$ die Abbildungen $x \mapsto f(xy)$, $x \mapsto f(yx)$ $(x \in A)$ in E, so heiße E *A-stabil*. Insbesondere ist $P(A, V)$ stets A-stabil.

Schließlich bezeichne $ex\,K$ die Menge der *Extremalpunkte* der konvexen Menge K, $es\,S$ die Menge der Elemente auf *Extremalstrahlen* des konvexen Kegels S.

Es ist nicht der Zweck dieses Abschnitts, die Frage nach der Multiplikativität von Extremalpunkten möglichst umfassend zu beantworten. Vielmehr soll vor allem im Hinblick auf die Anwendungen in der Integraldarstellungstheorie eine knappe Auswahl der wichtigsten Resultate vorgeführt werden. Die folgenden Sätze beschreiben $ex\,P_{C_B}(A, B)$ und $es\,P(A, V)$ für beschränkte, prägeordnete Algebren A. Einige der Ergebnisse lassen sich auch auf nicht-beschränkte, prägeordnete Algebren verallgemeinern [10]. Spezialfälle finden sich in [3], [17], [18], [19].

2.1. Satz: *Seien A, B prägeordnete* **K**-*Algebren, A beschränkt. Weiter sei E ein A-stabiler Teilraum linearer Abbildungen von A in B, der die Bedingung $b \cdot f, f \cdot b \in E$ für alle $b \in B, f \in E$* [+] *erfüllt. Dann ist $ex(P_{C_B}(A, B) \cap E) \subset AP(A, B)$.*

Beweis: Für $y \in C_A$ und $f \in ex(P_{C_B}(A, B) \cap E)$ sei $f^y : A \to B$ definiert durch $f^y(x) = f(xy) - f(x)f(y)$. Dann ist $f \pm f^y \in P(A, B)$; denn für $x \in A_+$ gilt:
$(f + f^y)(x) = f(x) + f(xy) - f(x)f(y) \geqslant 0$,
da $f(y) \in C_B$, also $f(x) - f(x)f(y) \geqslant 0$,
$(f - f^y)(x) = f(x) - f(xy) + f(x)f(y) = f(x - xy) + f(x)f(y) \geqslant 0$, da $y \in C_A$, also $x - xy \geqslant 0$. Weiter ergibt sich für $x \in C_A$
$0 \leqslant (f + f^y)(x) = f(x) + f(xy) - f(x)f(y) \leqslant f(x) + f(y) - f(x)f(y)$.
Aus Lemma 1.5 und der Linkserblichkeit von C_B folgt daher $(f + f^y)(x) \in C_B$. Schließlich beinhaltet die Ungleichung $0 \leqslant (f - f^y)(x) = f(x) - f(xy) + f(x)f(y) \leqslant f(x + y - xy)$, daß auf Grund von Lemma 1.5 auch $(f - f^y)(x)$ in C_B enthalten ist. Somit gilt $f \pm f^y \in P_{C_B}(A, B)$.

Da nach Voraussetzung $f^y \in E$ und $f \in ex(P_{C_B}(A, B) \cap E)$, folgt $f^y = 0$, d. h. $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x \in A$, $y \in C_A$. Da das Einheitsintervall C_A die beschränkte, prägeordnete Algebra A linear erzeugt, folgt die Behauptung.

[+] Für $b \in B$, $f \in P(A, B)$ oder $f \in P(A, \mathbf{K})$ bezeichne $b \cdot f$ die Abbildung $x \mapsto b \cdot f(x)$. Entsprechend ist $(f \cdot b)(x) = f(x) \cdot b$.

2.2. Satz: *Sei A eine beschränkte, prägeordnete $\mathbf{K}$-Algebra, V ein prägeordneter $\mathbf{K}$-Vektorraum, $E \subset P(A, V)$ ein A-stabiler, konvexer Kegel. Dann gilt für jedes $f \in \operatorname{es} E$:*

i) Es gibt ein $b \in V_+$ und ein $m \in AP(A, \mathbf{K})$, so daß $f = b \cdot m$ oder ii) $f(xy) = 0$ für alle $x, y \in A$.

Das Element b aus (i) liegt sogar in $\operatorname{es} V_+$, sofern für jede Abbildung der Form $c \cdot m \in E$ mit $c \in V_+$ und $m \in AP(A, \mathbf{K})$ auch $\{d \cdot m : d \in V_+,\ d \leqslant c\}$ Teilmenge von E ist.

Beweis: Seien $f \in \operatorname{es} E \setminus \{0\}$, $y \in C_A$ gegeben und $f^y, f_y \in E$ definiert durch $f^y(x) = f(xy)$, $f_y(x) = f(yx)$ $(x \in A)$. Dann ist $f^y \leqslant f$, $f_y \leqslant f$, also existieren reelle Zahlen $\overline{m}(y)$, $\bar{r}(y) \in [0, 1]$ derart, daß $f_y = \overline{m}(y)f$ und $f^y = \bar{r}(y)f$.

Sei $x \in C_A$ mit $f(x) \neq 0$. Dann gilt für $y, z \in C_A$ mit $y + z \in C_A$: $\overline{m}(y + z)f(x) = f((y + z)x) = f(yx) + f(zx) = (\overline{m}(y) + \overline{m}(z))f(x)$, also $\overline{m}(y + z) = \overline{m}(y) + \overline{m}(z)$.

Analog folgt $\overline{m}(\alpha y) = \alpha \overline{m}(y)$ und $\overline{m}(yz) = \overline{m}(y)\overline{m}(z)$ für alle $\alpha \in \mathbf{K}$, $y, z \in C_A$ mit $\alpha y \in C_A$.

Daher existiert eine eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung $m \in AP(A, \mathbf{K})$ von $\overline{m}$ auf $A = VR_{\mathbf{K}}(C_A)$. Für diese gilt wegen der Eindeutigkeit der linearen Fortsetzungen der auf C_A übereinstimmenden Abbildungen $y \mapsto f(yx)$ und $y \mapsto m(y)f(x)$ $(x, y \in A)$: $f(yx) = m(y)f(x)$ *für alle* $x, y \in A$.

In gleicher Weise existiert $r \in AP(A, \mathbf{K})$ derart, daß $f(xy) = r(y)f(x)$ *für alle* $x, y \in A$.

Ist nun $m = 0$, so folgt $f(xy) = m(x)f(y) = 0$ für alle $x, y \in A$, also Behauptung (ii). Existiert andererseits ein $z \in A$ mit $m(z) \neq 0$, und wählt man ein $y \in A$ mit $f(y) \neq 0$, so erhält man $m(z)m(x)f(y) = m(z)f(xy) = f(zxy) = r(xy)f(z) = r(x)r(y)f(z) = r(x)f(zy) = r(x)m(z)f(y)$ für alle $x \in A$. Hieraus folgt $m = r$ und $m(x)f(y) = f(xy) = r(y)f(x) = m(y)f(x)$ für alle $x, y \in A$, d. h. $m(x) \cdot f = f(x) \cdot m$ für alle $x \in A$.

Setzt man $b := \frac{f(z)}{m(z)}$ für ein $z \in A_+$ mit $m(z) > 0$, so ist $f = b \cdot m$. Erfüllt schließlich E die obige zusätzliche Bedingung, und wählt man $b_1 \in V_+$, $b_1 \leqslant b$ beliebig, so liegt $f_1 := b_1 \cdot m$ in E. Aus $f_1 \leqslant f$ folgt somit $f_1 = \lambda f$, d. h. $b_1 = \lambda b$ für ein $\lambda \in [0, 1]$.

2.3. Bemerkungen: i) Die zusätzlichen Bedingungen an E in

den Sätzen (2.1), (2.2) sind stets erfüllt, wenn B bzw. V mit dem Körper $\mathbf{K}$ übereinstimmt.

ii) Enthält die beschränkte, prägeordnete Algebra A eine Eins oder wird A von der Menge $A \cdot A = \{xy : x, y \in A\}$ linear erzeugt, so erfüllt nur das Nullfunktional die Bedingung (ii) aus Satz (2.2). Wie das Beispiel 1.4, ii zeigt, kann jedoch diese Alternative i. a. nicht ausgeschlossen werden.+)

iii) Sei A eine beschränkte, prägeordnete $\mathbf{K}$-Algebra. Der algebraische Dualraum A^* des Vektorraums A ist bekanntlich $\sigma(A^*, A)$-vollständig. Als abgeschlossene beschränkte Teilmenge von A^* ist daher die in A^* gebildete Polare $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ der absorbierenden Menge $C_A - A_+$ $\sigma(A^*, A)$-kompakt (vgl. [22], S. 144, Cor. 2). Darüber hinaus ist nicht nur $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$, sondern auch $P(A, \mathbf{K}) \setminus P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ konvex, d. h. $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ ist ein *Hut* von $P(A, \mathbf{K})$.

Zum Beweis seien $f, g \in P(A, \mathbf{K}) \setminus P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ und $\lambda \in [0, 1]$ gegeben. Wähle $x, y \in C_A$ derart, daß $f(x) > 1$ und $g(y) > 1$. Da das Einheitsintervall C_A nach Lemma 1.5 aufsteigend filtrierend ist, existiert ein $z \in C_A$ mit $z \geqslant x$, $z \geqslant y$. Aus der Ungleichung $(\lambda f + (1 - \lambda)g)(z) > 1$ folgt nun $\lambda f + (1 - \lambda)g \in P(A, \mathbf{K}) \setminus P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$.

iv) Enthält A eine positive Eins $\mathbf{1}$, so ist diese das Maximum von C_A, und $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ ist ein *universeller* Hut, dessen *positive Seite* $\{f \in P(A, \mathbf{K}) : f(\mathbf{1}) = 1\}$ eine $\sigma(A^*, A)$-kompakte Basis von $P(A, \mathbf{K})$ ist.

Eine teilweise Umkehrung der Sätze (2.1), (2.2) liefert der folgende Satz, dessen Beweisidee im wesentlichen auf [1] (S. 39, 40) zurückgeht.

2.4. Satz: *Für jede beschränkte, prägeordnete $\mathbf{K}$-Algebra A sind die Mengen $AP(A, \mathbf{K})$ und $exP_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ identisch.*

Beweis: Nach Satz (2.1) genügt es, die Inklusion $AP(A, \mathbf{K}) \subset exP_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ zu zeigen.

+ Ein Beispiel eines nicht-trivialen, extremalen, positiven linearen Funktionals auf einer Algebra reeller Funktionen, das die Bedingung (ii) aus Satz (2.2) erfüllt, findet sich in [3].

Ist $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$, so wähle man hierzu eine Familie $(u_x, v_x)_{x \in A}$ in $(A_+ - A_+) \times (A_+ - A_+)$ derart, daß $x = u_x + i v_x$ für alle $x \in A$ gilt, und setze $x^* := u_x - i v_x (x \in A)$. Im Falle $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ sei $x^* := x$ für jedes $x \in A$. Zu gegebenem $f \in AP(A, \boldsymbol{K})$ definiere man $l_a : P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{K}$ ($a \in A$ beliebig) durch
$l_a(g) = g(aa^*) - f(a)\overline{g(a)} - \overline{f(a)}g(a) + f(a)\overline{f(a)}$.+)

Bezeichnen Re bzw. Im die Real- bzw. Imaginärteilabbildung, so sind $Re \cdot l_a$, $Im \cdot l_a$ affine, stetige Funktionen auf $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$. Weiter liegt f in $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$, denn für alle $x \in C_A$, $y \in A_+$ ist $0 \leqslant f(y - yx) = f(y) - f(y)f(x)$, also $f(x) \in [0, 1]$. Für jedes $a \in A$ ist f sogar Nullstelle von l_a, und $l_a(g) = |(g - f)(a)|^2 \geqslant 0$ für alle $g \in ex\, P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K}) \subset AP(A, \boldsymbol{K})$, da $g(a^*) = \overline{g(a)}$. Nach dem *Minimumprinzip* (vgl. [1], S. 13ff.) folgt nun zunächst $Re \circ l_a \geqslant 0$ und $Im \circ l_a = 0$. Darüber hinaus ist für jede endliche Teilmenge $H \subset A$ $l_H := \sum_{a \in H} Re \circ l_a$ eine affine, stetige, positive Funktion auf $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$ mit $l_H(f) = 0$ und $q := sup\,\{l_H : H \subset A\ endlich\}$ eine numerische, nach unten halbstetige und konkave Funktion, da $\{l_H : H \subset A\ endlich\}$ aufsteigend filtrierend ist. Das Minimumprinzip garantiert somit die Existenz einer in $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$ *extremalen Minimalstelle* g von q. Wegen $q(f) = 0$ muß g eine Nullstelle von q sein, d. h. $Re(l_a(g)) = 0$ für alle $a \in A$. Da auch $Im(l_a(g)) = 0$ gilt, ist folglich $l_a(g) = |f(a) - g(a)|^2 = 0$ für alle $a \in A$. Also stimmt f mit $g \in ex\, P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$ überein.

2.5. **Folgerung:** *Sei A eine beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{K}$-Algebra, V ein prägeordneter $\boldsymbol{K}$-Vektorraum. Dann liegt $b \cdot g$ für jedes $b \in es\, V_+$, $g \in AP(A, \boldsymbol{K})$ auf einem Extremalstrahl von $P(A, V)$.*

Beweis: Sei $f = bg \neq 0$ mit $b \in es\, V_+$, $g \in AP(A, \boldsymbol{K})$, und sei $h \in P(A, V)$ mit $h \leqslant f$ gegeben. Für jedes $x \in A_+$ folgt aus der Ungleichung $0 \leqslant h(x) \leqslant g(x) \cdot b$ die Existenz einer eindeutig bestimmten reellen Zahl $\lambda(x) \geqslant 0$, so daß $h(x) = \lambda(x) b$. Nach linearer Fortsetzung von λ auf A gilt die letzte Gleichung für alle $x \in A$. Daher ist λ eine positive Linearform auf A mit $\lambda \leqslant g$.

+ $\bar{z}$ bezeichnet das zu $z \in \boldsymbol{K}$ konjugierte Element; $z = \bar{z}$, falls $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$.

Nach (2.4) ist andererseits g ein Extremalpunkt des Hutes $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$ von $P(A, \boldsymbol{K})$, also auf einem Extremalstrahl von $P(A, \boldsymbol{K})$ gelegen (vgl. [7], S. 208). Hieraus ergibt sich $\lambda = rg$ für ein $r \in [0, 1]$, d. h. $h = r \cdot (bg) = rf$.

2.6. Bemerkungen: Sei A eine beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{K}$-Algebra und V ein prägeordneter $\boldsymbol{K}$-Vektorraum. Weiter sei $E \subset P(A, V)$ ein A-stabiler konvexer Kegel mit der Eigenschaft:

Ist $b \cdot m \in E$ für ein $b \in V_+$ und ein $m \in AP(A, \boldsymbol{K})$, so auch $c \cdot m \in E$ für alle $c \in V_+$ mit $c \leqslant b$.

Wird dann A von der Menge $A \cdot A$ linear erzeugt, so gilt: $es\,E = \{bg \in E : b \in es\,V_+ \text{ und } g \in AP(A, \boldsymbol{K})\}$; denn „$\subset$" folgt aus (2.2) (2.2, ii impliziert $f = 0$ wegen $A = \mathrm{VR}_{\boldsymbol{K}}(A \cdot A)$), und „$\supset$" ergibt sich aus (2.5). Speziell sind für $E = P(A, V)$ unter den oben genannten Voraussetzungen an A die Mengen $es\,P(A, V)$ und $\{bg : b \in es\,V_+, g \in AP(A, \boldsymbol{K})\}$ identisch. Ist E ein A-stabiler Teilraum von A^*, so gilt analog:
$ex(P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K}) \cap E) = AP(A, \boldsymbol{K}) \cap E$.

2.7. Beispiele: i) Sei X ein *lokalkompakter* topologischer Raum und A die beschränkte, geordnete $\boldsymbol{C}$-Algebra aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf X. Dann ist $P(A, \boldsymbol{C})$ der Kegel der positiven Radonmaße auf X. Wegen $A = A \cdot A$ folgt aus (2.4):

$$es\,P(A, \boldsymbol{C}) = \{r \cdot \varepsilon_x : x \in X, r \in \boldsymbol{R}_+\},$$

wobei ε_x das Dirac-Maß an der Stelle x ist.

$P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{C})$ ist die Menge aller positiven Radonmaße auf X mit Gesamtmasse $\leqslant 1$. Nach (2.6) gilt:

$$ex\,P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{C}) = AP(A, \boldsymbol{C}) = \{\varepsilon_x : x \in X\} \cap \{0\}.$$

ii) Sei (H, τ) eine kommutative Halbgruppe und F der Raum aller reellen Funktionen auf H. Für jedes $x \in H$ bezeichnen $\Delta_x : F \to F$ den Differenzenoperator mit Schrittweite x, definiert durch $(\Delta_x)(f)(y) = f(y) - f(y \tau x)$.

Eine positive, reelle Funktion f auf H heißt *monoton von der Ordnung* ∞ (kurz: ∞-*monoton*), wen $\Delta_{x_1} \circ \ldots \circ \Delta_{x_n}(f)$ für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_n \in H$, $n \in \boldsymbol{N}$ positiv ist (vgl. [1], S. 37). Die eindeutige lineare Fortsetzung von f auf die *Halbgruppenalgebra* A ist dann positiv auf dem in 1.4, iv definierten Erzeu-

gendensystem M. Aus der Kommutativität der Halbgruppe H folgt die Inklusion $M \cdot M \subset M$, also ist der von M erzeugte konvexe Kegel eine Halbalgebra und stimmt mit der in 1.4, iv definierten Halbalgebra A_+ überein. Die lineare Fortsetzung von f auf A ist folglich positiv auf A_+. Umgekehrt ist offensichtlich die Einschränkung auf H einer positiven Linearform auf A ∞-monoton. Die folgende für beliebige (*auch nicht-kommutative*) Halbgruppen H gültige Definition stimmt daher im kommutativen Fall mit der üblichen Festlegung überein: Eine Funktion $f: H \to \boldsymbol{R}$ heißt ∞-*monoton*, wenn ihre lineare Fortsetzung auf A in $P(A, \boldsymbol{R})$ liegt.

Nach (2.4) ist eine Linearform g auf A genau dann ein Extremalpunkt von $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{R})$, wenn g positiv und multiplikativ ist. Die Einschränkung h von g auf H ist also in diesem Fall ein *Exponential* auf H. Gilt darüber hinaus $H \tau H = H$ (z. B. $H =$ additive Halbgruppe $\boldsymbol{R}_+ \setminus \{0\}$ oder Halbgruppe mit neutralem Element), so sind nach (2.6) die nicht-negativen Vielfachen der ∞-monotonen Exponentiale gerade die Funktionen auf Extremalstrahlen des Kegels der ∞-monotonen Funktionen.

iii) Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe und A die Algebra der komplexen Maße auf G mit kompaktem Träger wie in Beispiel 1.4, vii. Eine stetige komplexe Funktion f auf G heißt *positiv definit*, wenn die Linearform $\mu \mapsto \mu(f)$ $(\mu \in A)$ in $P(A, \boldsymbol{C})$ liegt. Der $\boldsymbol{C}$-Vektorraum E aller Linearformen $\mu \mapsto \mu(f)$ $(f \in \boldsymbol{C}(G, \boldsymbol{C}))$ ist A-stabil. Ist nämlich $\mu \in A$ gegeben, so definiert $g(x) = (\varepsilon_x * \mu)(f)$ eine stetige Funktion g auf G, und die Linearform $\nu \mapsto \nu(g) = (\nu * \mu)(f)$ liegt in E. Nach (2.6) sind die Extremalpunkte von $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{C}) \cap E$ gerade die Funtionale $\mu \mapsto \mu(f)$, wobei f positiv definites Exponential, d. h. *Charakter* auf G ist.

Ist λ ein Haar-Maß auf G, so erfüllt jeder Extremalpunkt $\varkappa$ von $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{C})$, der nicht in E liegt, die Bedingung $\varkappa(k\lambda) = 0$ für alle stetigen Funktionen k auf G mit kompaktem Träger. Zum Beweis nehme man $\varkappa(k\lambda) \neq 0$ für eine derartige Funktion k an. Es gilt: $\varkappa(k\lambda) \cdot \varkappa(\mu) = \varkappa(k\lambda * \mu)$ für alle $\mu \in A$. Um die Stetigkeit von $\varkappa$ bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz auf A zu beweisen, genügt es daher die ultrastarke Stetigkeit

von $\varkappa$ zu zeigen (vgl. [6] chap. VIII, § 4, n° 2, prop. 3). Sei hierzu $v \in A$, $\| v \| \leqslant 1$ gegeben. v ist von der Form $v = v_1 + i v_2$ mit $v_1, v_2 \in A_+ - A_+$. Da $\varkappa(v + \tilde{v}) = 2\,\varkappa(v_1) \in \boldsymbol{R}$ und $0 \leqslant \varkappa(v * \tilde{v}) = \varkappa(v)\varkappa(\tilde{v})$, folgt $\varkappa(\tilde{v}) = \overline{\varkappa(v)}$. Weiter ist nach 1.4, vi $v * \tilde{v} \in C_A$ und daher $| \varkappa(v) |^2 = \varkappa(v * \tilde{v}) \leqslant 1$, d. h. $| \varkappa(v) | \leqslant 1$.

Aus der Stetigkeit von $\varkappa$ bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz ergibt sich schließlich die Stetigkeit von $f: G \to \boldsymbol{C}$, definiert durch $f(x) = \varkappa(\varepsilon_x)$. Da $\varkappa(\mu) = \mu(f)$ für alle $\mu \in A$ gilt, folgt $\mu \in E$ im Widerspruch zur Annahme.

2.8. **Bemerkungen:** i) Wählt man für E den Raum *aller* linearen Abbildungen von A in B (bzw. V), so sind die Resultate (2.1), (2.2) und (2.4) für beschränkte, geordnete Algebren reeller Funktionen (bei punktweiser Ordnung und punktweisen Verknüpfungen) bekannt (vgl. [3], [16]). In [3] werden ähnliche Ergebnisse auch für den Fall hergeleitet, daß A eine Algebra unbeschränkter Funktionen ist und mit jeder Funktion $f \in A_+$ auch die beschränkte Funktion $\frac{f}{1+f}$ in A_+ liegt. Eine Verallgemeinerung dieser Resultate auf (abstrakte) unbeschränkte, prägeordnete Algebren findet sich in [10].

ii) Die Beschreibung der Extremalpunkte gewisser konvexer Mengen von invarianten Maßen und Operatoren führt ebenfalls auf Multiplikativitätseigenschaften (vgl. [8]). Durch eine geringfügige Verallgemeinerung des Begriffs „A-stabiler Kegel" erhält man Ergebnisse dieses Typs aus einem Analogen zu Satz 2.1 [11].

3. Struktur konvexer Mengen positiver linearer Operatoren auf einer beschränkten, prägeordneten Algebra

Eine Reihe von Fragen, die vor allem im Zusammenhang mit Integraldarstellungen eine Rolle spielen, blieb bisher unbeantwortet. So wäre es etwa wünschenswert zu wissen, ob $P_{[0,1]}(A, \boldsymbol{K})$ ein *Simplex* und $P(A, \boldsymbol{K})$ die Vereinigung seiner Hüte, also *gutfrisiert* ist. Während die erste Frage in (3.5) positiv entschieden wird, ist die Antwort auf die zweite i. a. negativ. Darüber hinaus erweisen sich selbst im gut-frisierten Fall die klassischen Choquetschen Sätze als nicht optimal an die Problemstellung angepaßt.

In den Anwendungen trifft man nämlich fast ausschließlich auf Integraldarstellungen mit Radonmaßen, die von den nichttrivialen, multiplikativen Funktionalen eines A-stabilen (abgeschlossenen) Kegels $E \subset P(A, \mathbf{K})$, also den Extremalpunkten von $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K}) \cap E$ getragen werden. Die hieraus resultierende einfache Gestalt der Integraldarstellung wird dadurch möglich, daß das Darstellungsmaß i. a. nicht (total) endlich ist. Nach [12] sind genau diejenigen Linearformen aus E durch beliebige Radonmaße auf den nichttrivialen, multiplikativen Linearformen in E darstellbar, die Suprema aufsteigender Netze aus dem von $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K}) \cap E$ erzeugten Kegel sind. Es ist daher das Ziel dieses Abschnitts, die Struktur von A-stabilen Kegeln E in $P(A, \mathbf{K})$ oder allgemeiner in $P(A, V)$ für einen geordneten Vektorraum V unter dem eben erwähnten Gesichtspunkt aufzuklären.

A sei im folgenden stets eine beschränkte, prägeordnete $\mathbf{K}$-Algebra, V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und W ein *punktetrennender* linearer Teilraum von V^*. V werde mit der schwachen Topologie $\sigma(V, W)$ versehen. Weiter sei V_+ ein ($\sigma(V, W)$-)vollständiger, konvexer, spitzer Kegel in V und H ein Hut von V_+. Unter der V_+-Ordnung wird V ein geordneter topologischer Vektorraum. $P := P(A, V)$ werde mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Diese stimmt mit der schwachen Topologie bzgl. $\{f \mapsto \varphi(f(x)) : \varphi \in W, x \in A\}$ überein. P ist in der zugehörigen natürlichen uniformen Struktur vollständig, da es eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums V^A ist.

Für $x \in C_A$ definiere man $(x_n) \in C_A^{\mathbf{N}}$ induktiv wie folgt: $x_1 := x$ und ist $x_1, \ldots, x_n \in C_A$ bereits konstruiert, so setze man $x_{n+1} := 2x_n - x_n^2$. Nach Lemma (1.5) ist $x_{n+1} \in C_A$ und $x_n \leqslant x_{n+1}$. Für die so definierte, *isotone* Folge (x_n) gilt dann das folgende

3.1. Lemma:

i) *Für jedes* $f \in P_H := P_H(A, V)$ *ist* $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} f(x_n) = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} f(x_n^2)$.

ii) *Ist* $y \in A_+$, $f \in P$, *so folgt* $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} f(yx_n) = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} f(yx_n^2)$.

Beweis: i) Sei $f \in P_H$ gegeben. Da $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$, $(f(x_n^2))_{n \in \mathbf{N}}$ isotone Folgen in der kompakten Menge H sind, existieren die Suprema in H und stimmen mit den Grenzwerten überein. Daher

gilt: $\sup_{n \in N} f(x_n) = \sup_{n \in N} f(x_{n+1}) = 2 \sup_{n \in N} f(x_n) - \sup_{n \in N} f(x_n^2)$,
also $\sup_{n \in N} f(x_n) = \sup_{n \in N} f(x_n^2)$, wie behauptet.

ii) Sei $f \in P$, $y \in A_+$ gegeben. Dann sind $(f(yx_n))_{n \in N}$, $(f(yx_n^2))_{n \in N}$ isotone Folgen in V_+, die durch $f(y)$ majorisiert werden. Da V_+ schwach vollständig ist, existieren wieder die jeweiligen Suprema. Der Rest der Behauptung ergibt sich nun wie in Teil (i).

3.2. **Folgerungen:** i) *Für jede positive, multiplikative Linearform* $f \neq 0$ *auf* A *ist* $\sup f(C_A) = 1$.

ii) *Erfüllt* $f \in P_H$ *die Gleichung* $f(xy) = 0$ *für alle* $x, y \in A$, *so ist* $f = 0$.

Beweis: i) Sei $f \in AP(A, \mathbf{K}) \setminus \{0\}$. Nach (2.4) ist $f \in P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$. Wähle $x \in C_A$ mit $f(x) > 0$. Dann gilt mit der von Lemma 3.1 konstruierten Folge (x_n):

$$1 \geqslant \sup f(C_A) \geqslant \sup_{n \in N} f(x_n) = \sup_{n \in N} f(x_n^2) = (\sup_{n \in N} f(x_n))^2 > 0,$$

also $\sup f(C_A) = 1$.

ii) Sei $f \in P_H$ mit $f(xy) = 0$ für alle $x, y \in A$. Angenommen, es gäbe ein $x \in C_A$ mit $f(x) > 0$. Definiert man die Folge (x_n) wieder wie oben, so folgt $f(x_{n+1}) = 2 f(x_n)$ und hieraus durch vollständige Induktion $f(x_{n+1}) = 2^n f(x)$ für alle $n \in \mathbf{N}$, was wegen $f(C_A) \subset H$ im Widerspruch zur Kompaktheit von H steht. Also ist $f(C_A) = \{0\}$ und damit $f = 0$.

3.3. **Bemerkung:** Die Menge P_H spielt für das Studium des Kegels P die gleiche ausgezeichnete Rolle wie $P_{[0,1]}(A, \mathbf{K})$ für $P(A, \mathbf{K})$. Insbesondere ist auch P_H ein Hut von P. Die Konvexität von $P \setminus P_H$ sieht man folgendermaßen ein: Sind $f, g \in P \setminus P_H$, so existieren $x, y \in C_A$ mit $f(x) \notin H$ und $g(y) \notin H$. Wähle $z \in C_A$ derart, daß $z \geqslant x$ und $z \geqslant y$ gemäß (1.5). Dann liegen auch $f(z)$ und $g(z)$ in der konvexen Menge $V_+ \setminus H$. Folglich ist $\lambda f(z) + (1 - \lambda) g(z) \in V_+ \setminus H$, d. h. $\lambda f + (1 - \lambda) g \in P \setminus P_H$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Um die Kompaktheit von P_H zu zeigen, sei schließlich φ das *Joch* (Minkowski-Funktional) der absorbierenden, konvexen Teilmenge $(C_A - C_A) + i(C_A - C_A)$ von A. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Produktraums $\prod_{x \in A} \varphi(x) H$ ist dann P_H kompakt.

Ist $E \subset P$ ein A-stabiler, abgeschlossener, konvexer Kegel, so ist trivialerweise $E_H := P_H \cap E$ ebenfalls ein Hut von E. Darüber hinaus ist P_H und in vielen Fällen auch E_H sogar ein Simplex, sofern H ein Simplex war. Um dies zu zeigen, benötigen wir das folgende Lemma, dessen Inhalt für $V = \mathbf{K}$ aus (2.6) bekannt ist.

3.4. **Lemma:** *Sei E ein A-stabiler, abgeschlossener, konvexer Teilkegel von P mit der folgenden Eigenschaft: Ist $c \cdot m \in E$ für $c \in V_+$ und $m \in AP(A, \mathbf{K})$, so ist $\{d \cdot m : d \in V_+, d \leqslant c\}$ eine Teilmenge von E.*

Dann gilt: $ex E_H = \{bg \in E : b \in exH, g \in AP(A, \mathbf{K})\}$.

Beweis: Bezeichnet j das Joch von E_H, so ergibt sich aus 2.2, 3.2, ii, 2.5 und [7], Satz 30.21:
$ex E_H \setminus \{0\} = \{b \cdot g \in E : b \in es V_+, g \in AP(A, \mathbf{K})$ und $j(bg) = 1\}$.
Seien $b \in es V_+$, $g \in AP(A, \mathbf{K})$ mit $bg \in E$ und $j(bg) = 1$ gegeben. Dann ist $b \in exH$. Hierzu genügt es zu zeigen, daß $l(b) = 1$ für das Joch l von H gilt.

Zunächst ist $g \neq 0$, $l(b) > 0$ wegen $j(bg) > 0$.

Angenommen, $l(b) < 1$. Dann wäre $(\frac{b}{l(b)} g)(C_A) \subset \frac{b}{l(b)} [0, 1]$, also $\frac{b}{l(b)} g \in E_H$, d. h. $j(\frac{b}{l(b)} g) \leqslant 1$. Dies ergibt $j(bg) \leqslant l(b) < 1$, einen Widerspruch.

Nimmt man andererseits an, daß $l(b) > 1$ ist, so gibt es nach 3.2, i ein $x \in C_A$ mit $g(x) > \frac{1}{l(b)}$. Dies impliziert $l(bg(x)) > 1$, also $bg \notin E_H$ entgegen der Annahme. Folglich ist $ex E_H \setminus \{0\} \subset \{bg \in E : b \in exH \setminus \{0\}, g \in AP(A, \mathbf{K}) \setminus \{0\}\}$.

Sei umgekehrt $b \in exH \setminus \{0\}$, $g \in AP(A, \mathbf{K}) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $bg \in E$ gegeben. Wäre $j(bg) > 1$, so gäbe es ein $x \in C_A$ mit $(bg)(x) \notin H$; aber dies ist unmöglich wegen der aus 3.2, i folgenden Beziehung $bg(x) \in b \cdot [0, 1] \subset H$.

Aus der Annahme $0 < j(bg) < 1$ ergibt sich schließlich $g(x) > j(bg)$ für ein $x \in C_A$ nach 3.2, i. Für dieses x gilt dann $l(\frac{bg(x)}{j(bg)}) > l(b) = 1$, also $\frac{bg(x)}{j(bg)} \notin H$. Das steht im Widerspruch zu $\frac{bg}{j(bg)} \in E_H$.

Daher gilt auch $\{bg \in E : b \in exH \setminus \{0\}, g \in AP(A, \mathbf{K}) \setminus \{0\}\} \subset exE_H \setminus \{0\}$ und damit die Behauptung.

3.5. **Satz:** *Ist der Hut $H \subset V_+$ ein Simplex, so auch P_H.*

Beweis: Für $x \in A$ sei $\hat{x} : AP(A, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ definiert durch $\hat{x}(f) = f(x)$. $\hat{x}$ ist trivialerweise stetig in der Spurtopologie von $\sigma(A^*, A)$ auf $AP(A, \mathbf{K})$, und $\hat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}$ ist eine Algebra stetiger Funktionen auf dem kompakten Raum $AP(A, \mathbf{K})$. Weiter gilt für $x, y \in A$ mit $\hat{x} = \hat{y}$ $f(x - y) = 0$ für alle $f \in AP(A, \mathbf{K})$, also auch $g(x - y) = 0$ für alle $g \in exP_H$ nach 3.4. Die abgeschlossene, konvexe Menge $\{h \in P_H : h(x - y) = 0\}$ enthält somit exP_H. Nach dem Satz von Krein-Milman folgt $h(x - y) = 0$ für alle $h \in P_H$ und sogar für alle $h \in P_e := \mathbf{R}_+P_H$.

Definiert man für $h \in P_e$ $\tilde{h} : \hat{A} \to V$ durch $\tilde{h}(\hat{x}) = h(x)$ $(x \in A)$, so ist $\tilde{h}$ ein wohldefinierter positiver, linearer Operator und $h \mapsto \tilde{h}$ eine affine Bijektion von P_e auf $\tilde{P}_e := \{h : \tilde{h} \in P_e\}$. Die konvexe Menge $H - H$ ist nun eine absorbierende Teilmenge des linearen Raums $V_1 := \mathbf{R}_+H - \mathbf{R}_+H$. Ihr Minkowski-Funktional stellt eine Norm auf V_1 dar.

Jeder lineare Operator $\tilde{h}$ $(h \in P_e)$ ist stetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz auf $\hat{A}$ und der Normtopologie auf V_1. Wählt man nämlich $\lambda > 0$ derart, daß $h \in \lambda P_H$, so gilt für alle $x \in A$ mit $\|\hat{x}\| \leqslant 1$, jedes $b \in exH$ und jedes $m \in AP(A, \mathbf{K}) : 0 \leqslant bm(x) + b \leqslant 2b$, was $bm(x) + b \in 2H$ und $bm(x) \in 2H - H \subset 2(H - H)$ impliziert. Die abgeschlossene, konvexe Teilmenge $\{g \in P_H : g(x) \in 2(H - H)\}$ von P_H enthält daher exP_H nach 3.4. Mit dem Satz von Krein-Milman schließt man $\frac{h(x)}{\lambda} \in 2(H - H)$, d. h. $h(x) \in 2\lambda(H - H)$. Umgekehrt ist jeder positive, stetige, lineare Operator $T : \hat{A} \to V_1$ von der Form $T = \tilde{h}$ für ein geeignetes $h \in P_e$. Definiert man nämlich $h(x) = T(\hat{x})$, so gilt $h(C_A) \subset \|T\| H$. Zum Beweis sei $x \in C_A$. Dann ist $\|\hat{x}\| = sup\,\{g(x) : g \in AP(A, \mathbf{K})\} \leqslant 1$ und somit $0 \leqslant h(x) = T(\hat{x}) \in \|T\| \cdot (H - H)$. Da H linkserblich ist, gilt sogar $h(x) \in \|T\| \cdot H$.

Sei schließlich B der gleichmäßige Abschluß von $\hat{A}$ in $\mathbf{C}(AP(A, \mathbf{K}), \mathbf{K})$. Da $H - H$ $\sigma(V, W)$-kompakt ist, folgt die Vollständigkeit der Normtopologie auf V_1 (vgl. [22] S. 18, 1.6).

Somit besitzt jeder Operator $\tilde{g}$ ($g \in P_e$) eine eindeutig bestimmte (positive) stetige Fortsetzung $\bar{\tilde{g}}: B \to V_1$. Die affine Abbildung $g \to \bar{\tilde{g}}$ von P_e auf den konvexen Kegel L aller positiven, stetigen linearen Operatoren von B in V_1 ist bijektiv. Da B ein Banachverband+) und $\boldsymbol{R}_+H$ trivialerweise ein normaler Kegel bzgl. der Normtopologie auf V_1 ist, ergibt sich die Linkserblichkeit von L in $P(B, V_1)$ (vgl. [17], S. 96). Schließlich ist mit dem schwach vollständigen Kegel V_+ auch der linkserbliche Teilkegel $\boldsymbol{R}_+H$ ein ordnungsvollständiger Verbandskegel (vgl. [7], S. 142). Daher sind $P(B, V_1)$, der linkserbliche Teilkegel L und der hierzu affinisomorphe Kegel P_e sämtlich Verbandskegel (vgl. [17], S. 68). Der zu P_e gehörige Hut P_H ist also ein Simplex ([20], S. 93).

3.6. **Bemerkung:** Die im Beweis von 3.5 auftretende Funktionenalgebra $\hat{A}$ steht offensichtlich in enger Beziehung zur beschränkten, prägeordneten Algebra A und verdient allgemeineres Interesse. Tatsächlich lassen sich für beschränkte, geordnete Algebren Darstellungssätze beweisen, die der Gelfand-Neumark-Darstellung kommutativer C^*-Algebren nahe verwandt sind. Im Gegensatz zur Darstellung kommutativer Banach-Algebren eignet sich als Darstellungsraum nicht die Menge aller nicht-verschwindenden, multiplikativen, linearen Funktionale, sondern der *lokalkompakte* Raum $AP(A, \boldsymbol{K}) \setminus \{0\}$ aller *positiven multiplikativen* Linearformen $\neq 0$. A wird dann als Algebra stetiger, im Unendlichen verschwindender Funktionen dargestellt (siehe [11]). Für beschränkte, prägeordnete Algebren mit positiver Eins ist der Darstellungsraum $AP(A, \boldsymbol{K}) \setminus \{0\}$ kompakt (vgl. [17], S. 173).

3.7. **Folgerung aus 3.5:** *Sei E ein A-stabiler, abgeschlossener, konvexer Teilkegel von P mit der in* 3.4 *erwähnten Eigenschaft. Ist der Hut H von V_+ ein Simplex, so gilt das gleiche für $E_H = P_H \cap E$. Darüber hinaus ist E_H eine kompakte Seite von P_H.*

Beweis: E_H ist konvexe, kompakte Teilmenge von P_H mit $ex\,E_H \subset ex\,P_H$ nach Lemma 3.4. Daher ist E_H eine abgeschlossene Seite des Simplexes P_H und somit ebenfalls ein Simplex (vgl. [15], S. 27, Cor. 2.21).

+ Die Verbandseigenschaften folgen aus [9], 7.3.1.1 (vgl. [9], 7.3.1.3).

Wie zu Beginn dieses Abschnitts bereits erwähnt, ist i. a. weder $P(A, V)$ noch $P(A, \boldsymbol{K})$ Vereinigung seiner Hüte, also gut-frisiert. Ist etwa A die beschränkte, geordnete Algebra der stetigen, reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem *nicht σ-kompakten, lokalkompakten* Raum X, so ist der Kegel $P(A, \boldsymbol{R})$ aller positiven Radonmaße auf X i. a. nicht gut-frisiert. Wie die folgenden Sätze zeigen, liefern die in [12] gewonnenen Resultate das geeignete Werkzeg für Integraldarstellungen in $P(A, V)$.

3.8. Satz: *Sei E ein A-stabiler, abgeschlossener, konvexer Teilkegel von P. Ist dann $f^y \in E$ für $f \in E$, $y \in C_A$ gegeben durch $f^y(x) = f(xy)$, so definiert die Gleichung $\Phi(f) = \sup_{y \in C_A} f^y$ eine affin-lineare Abbildung $\Phi : E \to E$ mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Bezeichnet I die identische Abbildung auf E, so gilt $(I - \Phi)(E) \subset E$, und die Funktionen $g \in (I - \Phi)(E)$ erfüllen die Gleichung $g(xy) = 0$ für alle $x, y \in A$. Weiter ist $I = \Phi$ auf $\boldsymbol{R}_+ E_H$, und 0 ist die größte untere Schranke von $\Phi(f)$ und $(I - \Phi)(f)$ für jedes $f \in E$.*

Beweis. Sei $f \in E$. Die nach (1.5) aufsteigend filtrierende Menge $\{f^y : y \in C_A\}$ wird durch f majorisiert. Da E abgeschlossen in P also vollständig ist, existiert somit $\sup_{y \in C_A} f^y$ in E, und Φ ist affin (vgl. [17], S. 7, Satz 1.1.9, iv). Sind weiter $x \in A_+$, $y \in C_A$ gegeben, und definiert man $(y_n) \in C_A^{\boldsymbol{N}}$ wie vor Lemma 3.1 mit $y_1 := y$, so gilt:
$xy_n - (xy_n - xy)y_n \geqslant xy_n - xy_n + xy = xy$ (da $y_n \geqslant y$ und $y_n \in C_A$) für alle $n \in \boldsymbol{N}$, also $\sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xy_n) - f(xy_m^2) + \sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xyy_n) \geqslant f(xy)$ für jedes $m \in \boldsymbol{N}$. Dies impliziert $\sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xy_n) - \sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xy_m^2) + \sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xyy_n) \geqslant f(xy)$, was mit 3.1, ii die Ungleichung $\Phi(f)(xy) \geqslant \sup_{n \in \boldsymbol{N}} f(xyy_n) \geqslant f(xy)$ liefert.

Da trivialerweise $\Phi(f)(xy) \leqslant f(xy)$ gilt, folgt $\Phi(f)(xy) = f(xy)$. Insbesondere ergibt dies

$\Phi(\Phi(f))(x) = \sup_{y \in C_A} \Phi(f)(xy) = \sup_{y \in C_A} f(xy) = \Phi(f)(x)$ und

$(I - \Phi)(f)(xy) = f(xy) - \Phi(f)(xy) = 0.$

Da C_A bzw. $A_+ A$ linear erzeugen, ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei nun $f \in \boldsymbol{R}_+ E_H$ und $x \in C_A$ gegeben. Ist (x_n) die vor Lemma 3.1 konstruierte Folge, so erhält man für $g := f - \Phi(f) \in \boldsymbol{R}_+ \cdot E_H$: $0 \leqslant g(x) \leqslant \sup_{n \in \boldsymbol{N}} g(x_n) = \sup_{n \in \boldsymbol{N}} g(x_n^2) = 0$, weil $g \in (I - \Phi)(E)$ ist (beachte 3.1, i!). Da hieraus $g(x) = 0$ folgt, und $VR_K(C_A) = A$ ist, gilt $f = \Phi(f)$. Dies liefert die gesuchte Gleichung $\Phi = I$ auf $\boldsymbol{R}_+ E_H$.

Schließlich seien $f, h \in E$ derart, daß $h \leqslant (I - \Phi)(f)$ und $h \leqslant \Phi(f)$. Dann ist $0 \leqslant \Phi(h) \leqslant \Phi \circ (I - \Phi)(f) = \Phi(f) - \Phi \circ \Phi(f) = 0$ und $0 \leqslant (I - \Phi)(h) \leqslant (I - \Phi)(\Phi(f)) = 0$, also $h = \Phi(h) = 0$. Somit ist 0 die größte untere Schranke von $(I - \Phi)(f)$ und $\Phi(f)$.

Nach Satz (3.8) ist $E - E$ die geordnete direkte Summe der reellen geordneten Vektorräume $\Phi(E) - \Phi(E)$ und $\{g \in E - E : g(xy) = 0 \textit{ für alle } x, y \in A\}$. Die eindeutige lineare Fortsetzung Φ_1 von Φ auf $E - E$ ist die Projektion auf den ersten direkten Summanden.

Φ sei im weiteren stets die in 3.8 definierte Abbildung. Für eine Teilmenge M eines konvexen, spitzen Kegels Q sei $s(M)$ die Menge aller Punkte $x \in Q$, die Suprema *aufsteigender filtrierender* Teilmengen von M sind (bzgl. der Q-Ordnung). Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende.

3.9. Lemma: *Ist der Hut H von V_+ universell, und ist E ein A-stabiler, abgeschlossener, konvexer Teilkegel von P, so gilt: $\Phi(E) = s(\boldsymbol{R}_+ E_H)$.*

Beweis: Ist $f \in \Phi(E)$ gegeben, so wähle man ein $g \in E$ derart, daß $f = \sup_{y \in C_A} g^y = \Phi(g)$. Zu jedem $y \in C_A$ gibt es ein $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$ mit $g(xy) \leqslant g(y) \in \lambda H$ für alle $x \in C_A$, also $g^y(C_A) \subset \lambda H$. Folglich ist $g^y \in \lambda E_H$. Da die Menge $\{g^y : y \in C_A\}$ aufsteigend filtrierend ist, liegt $f = \sup \{g^y : y \in C_A\}$ in $s(\boldsymbol{R}_+ E_H)$.

Umgekehrt existiert zu $f \in s(\boldsymbol{R}_+ E_H)$ eine aufsteigend filtrierende Menge $F \subset \boldsymbol{R}_+ E_H$ mit $f = \sup F$, und es gilt
$\Phi(f) = \sup \{g^y : y \in C_A, g \in F\} = \sup_{g \in F} \Phi(g) = \sup F = f$

(da Φ auf $\boldsymbol{R}_+E_H$ mit der identischen Abbildung übereinstimmt). Also ist auch $s(\boldsymbol{R}_+E_H) \subset \Phi(E)$, woraus die Behauptung folgt.

3.10. **Bemerkungen:** i) Unter den Voraussetzungen von (3.9) ist also E_H ein *fast-universeller* Hut, d. h. $E = s(\boldsymbol{R}_+E_H)$, sofern $A = VR_K(A \cdot A)$. Dies folgt sofort aus (3.8), da dann $(I - \Phi)(E)$ der Nullkegel ist (I = identische Abbildung auf E).

ii) Enthält A eine positive Eins $\boldsymbol{1}$, und ist H ein universeller Hut von V_+, so ist E_H ein universeller Hut. Ist nämlich $f \in E$ gegeben, und erfüllt $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$ die Bedingung $f(\boldsymbol{1}) \in \lambda H$, so gilt $f(x) \in \lambda H$ für alle $x \in C_A$. Folglich ist $f \in \lambda E_H$.

iii) Ist der Hut H ein Simplex und *fast-universell* in V_+, so gilt ebenfalls $\Phi(E) = s(\boldsymbol{R}_+E_H)$, sofern der A-stabile, abgeschlossene Kegel E die folgende Bedingung erfüllt:

Für jeden positiven Endomorphismus Θ von V und jedes $f \in E$ liegt auch $\Theta \circ f$ in E [12].

Die in (3.8) und (3.9) gewonnenen Strukturaussagen über A-stabile, abgeschlossene Teilkegel $E \subset P$ ermöglichen zusammen mit den in [12] bereitgestellten Resultaten einfache Beweise für eine Reihe von Integraldarstellungssätzen (vgl. [11], [12], [13]). Der folgende, kurze Beweis des Satzes von Bochner kann mit Hilfe der klassischen Choquetschen Integraldarstellungssätze geführt werden, benötigt also (3.8) und (3.9) nicht.

3.11. **Anwendung (Satz von Bochner):** Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit Haar-Maß λ und A die in 1.4, vii eingeführte beschränkte, prägeordnete $\boldsymbol{C}$-Algebra der komplexen Maße auf G mit kompaktem Träger. Nach 3.5 und 3.10, ii gibt es zu jedem $f \in P(A, \boldsymbol{C})$ genau ein endliches Radonmaß μ auf $AP(A, \boldsymbol{C}) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $f(\sigma) = \int m(\sigma)\, d\mu(m)$ für alle $\sigma \in A$ (siehe [7]).

$\Gamma_0 := \{m \in AP(A, \boldsymbol{C}) \setminus \{0\} : m(k\lambda) = 0$ *für alle* $k \in \boldsymbol{C}(G, \boldsymbol{C})$ *mit kompaktem Träger*$\}$ ist eine $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene Teilmenge des lokalkompakten Raums $AP(A, \boldsymbol{C}) \setminus \{0\}$. Daher sind $\Gamma_1 := (AP(A, \boldsymbol{C}) \setminus \{0\}) \setminus \Gamma_0$ und Γ_0 lokalkompakte Teilräume von $AP(A, \boldsymbol{C}) \setminus \{0\}$. Seien μ_1 bzw. μ_0 die Einschränkungen des zu f gehörigen Darstellungsmaßes μ auf Γ_1 bzw. Γ_0. Die zu G duale Gruppe Γ ist homöomorph zu Γ_1 vermöge der Homöo-

morphie $\chi \mapsto \check{\chi}$, wobei $\check{\chi}(\sigma) = \sigma(\chi)$ für jedes $\sigma \in A$ ist (vgl. [21], S. 10). Sei ν das Bildmaß von μ_1 unter der Umkehrhomöomorphie. Dann gilt:

$$f(\sigma) = \int_{\Gamma} \sigma(\chi) d\nu(\chi) + \int_{\Gamma_0} m(\sigma) d\mu_0(m) \text{ für alle } \sigma \in A.$$

Sei nun $g \in \boldsymbol{C}(G, \boldsymbol{C})$ positiv definit. Zur Linearform $\sigma \mapsto \sigma(g)$ auf A gehören dann wie oben endliche, positive Darstellungsmaße ν, μ_0. Ist $\sigma \in A$ ein positives Radonmaß, so existiert ein Netz $(k_j)_{j \in J}$ positiver, stetiger Funktionen auf G mit kompaktem Träger, so daß $\lim_{j \in J} k_j \lambda = \sigma$ bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz auf A. Das aus den Funktionen $\chi \mapsto (k_j \lambda)(\chi)$ gebildete Netz konvergiert dann lokal gleichmäßig gegen $\chi \mapsto \sigma(\chi)$ auf Γ. Da ν endlich ist und $\sup_{x \in G} |\chi(x)| \leqslant 1$ für alle $\chi \in \Gamma$, folgt $\sigma(g) = \lim_{j \in J} (k_j \lambda)(g) = \lim_{j \in J} \int (k_j \lambda)(\chi) d\nu(\chi) = \int \sigma(\chi) d\nu(\chi)$. Daher ist μ_0 hier das Null-Maß.

Literatur:

[1] Bauer, H.: Konvexität in topologischen Vektorräumen. Universität Hamburg (1963/64).

[2] Blumenthal, R. M. - Lindenstrauss, J. - Phelps, R. R.: Extreme operators into $\boldsymbol{C}(K)$. Pac. Journal 15 (1965), 747–756.

[3] Bonsall, F. F. - Lindenstrauss, J. - Phelps, R. R.: Extreme positive operators on algebras of functions. Math. Scand. 18 (1966) 161–182.

[4] Bourbaki, N.: General Topology I, Hermann/Addison-Wesley, Paris/Reading, Mass. (1966).

[5] Bourbaki, N.: Intégration. Chap. I–IV (deuxième éd.), Act. Sci. et Ind., Hermann, Paris (1967).

[6] Bourbaki, N.: Intégration. Chap. VIII. Act. Sci. et Ind., Hermann, Paris (1963).

[7] Choquet, G.: Lectures on Analysis II. Math. Lect. Notes Series; Benjamin, New York–Amsterdam (1969).

[8] Converse, G.: Extreme positive operators on $\boldsymbol{C}(X)$ which commute with certain operators. Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969), 149–158.

[9] Dieudonné, J.: Foundations of Modern Analysis. Academic Press, New York (1960).

[10] Donner, K.: Extreme und extremale positive Vektorraumhomomorphismen auf Vektorv. u. quasigeord. Alg. Diplomarbeit (unveröffentlicht).

[11] Donner, K.: Extremalpunktmethoden bei beschränkten, geord. Algebren. Dissertation (unveröffentlicht).

[12] Donner, K.: Integral representations by non-finite Radon measures and measures of finite variation. Erscheint demnächst in Math. Annalen.

[13] Donner, K.: A new proof of the Levy-Khintchine formula. Erscheint demnächst.

[14] Dunford, N. - Schwartz, J.: Linear Operators I. Interscience, New York (1958).

[15] Goullet de Rugy, A.: La théorie des cônes biréticulés. Ann. Inst. Four. XXI/4 (1971), 1–64.

[16] Ionescu Tulcea, A. and C.: On the lifting property (I). J. Math. Anal. and Appl. 3 (1961), 537–546.

[17] Jameson, G.: Ordered Linear Spaces. Lect. Notes in Math. 141; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[18] Kelley, J. L. - Vaught, R. L.: The positive cone in Banach algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 44–55.

[19] Phelps, R. R.: Extreme positive operators and homomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 263–274.

[20] Phelps, R. R.: Lectures on Choquet's Theorem. van Nostrand Math. Studies 7, New York (1966).

[21] Rudin, W.: Fourier Analysis on Groups. Wiley, New York (1962).

[22] Schaefer, H. H.: Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1971).