BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Basis-Untermoduln und Quasi-kotorsions-Moduln über diskreten Bewertungsringen

Von Helmut Zöschinger

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit dem maximalen Ideal (p), und sei M ein R-Modul. Ein Untermodul S von M heißt bekanntlich *Basis-Untermodul* von M, wenn er die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(B 1) S ist dicht in M (d. h. M/S teilbar)

(B 2) S ist rein in M (d. h. $Sp^n = S \cap Mp^n$ für alle n)

(B 3) S ist direkte Summe von zyklischen Moduln.

Wir untersuchen in Abschnitt 1 den Zusammenhang zwischen den Basis-Untermoduln von M und den sogenannten *Komplementen des Radikals* von M, d. h. den minimalen Elementen in der Menge $\{U \subset M \mid U + Mp = M\}$. Ein Untermodul V von M ist genau dann ein Komplement des Radikals, wenn er die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(K 1) V ist dicht in M

(K 2) V ist neat in M (d. h. $Vp = V \cap Mp$)

(K 3) V ist koatomar (d. h. direkte Summe aus einem endlich erzeugten und einem beschränkten Modul).

Falls ein solches V existiert, heißt M *radikal-komplementiert*. In diesem Fall ist sogar jeder Basis-Untermodul ein Komplement des Radikals, und man wird fragen, wann umgekehrt jedes Komplement des Radikals schon ein Basis-Untermodul von M ist: Nach Proposition 3 ist das genau dann der Fall, wenn M koatomar oder der Torsionsuntermodul $T(M)$ teilbar ist. Um diese Antwort zu erhalten, untersuchen wir zuvor die Bedingungen dafür, daß M *genügend viele* Komplemente des Radikals bzw. Basis-Untermoduln besitzt, d. h. daß jeder dichte Untermodul von M ein Komplement des Radikals bzw. einen Basis-Untermodul umfaßt.

Bekanntlich ist M genau dann radikal-komplementiert, wenn M in seiner injektiven Hülle $\hat{M}$ ein Komplement hat. Aber M braucht dann nicht in jedem Zwischenmodul zu $\hat{M}$ ein Komplement zu haben, und so suchen wir in Abschnitt 2 nach der entsprechenden Zusatzbedingung. Sie führt zum Begriff des *Quasikotorsions-Moduls*, und mit seiner Hilfe können wir weiter zeigen: Hat M in jeder wesentlichen Erweiterung ein Komplement, so auch in jeder Erweiterung N, mit N/M torsionsvoll. – Aber eine genauere Strukturbestimmung dieser Moduln steht noch aus.

1. Die Komplemente des Radikals. Stets sei im folgenden R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K \neq R$ und maximalem Ideal (p). Für die Grundtatsachen über R-Moduln siehe [2], über radikal-komplementierte R-Moduln siehe [5].

Proposition 1. Für einen R-Modul M sind äquivalent:

(i) $Ra(M)$ hat genügend viele Komplemente in M.

(ii) Jeder neat-Untermodul von M ist radikal-komplementiert.

(iii) Falls $M/Ra(M)$ nicht endlich erzeugt ist, ist jeder Untermodul von M radikal-komplementiert.

Beweis. (i $\to$ ii) Sei U ein neat-Untermodul von M, d. h. $Ra(U) = U \cap Ra(M)$. Bildet man $M/U = D(M/U) \oplus M_1/U$, so ist auch M_1 neat in M, und $M_1 + Ra(M) = M$. Nach Voraussetzung gibt es ein Komplement V von $Ra(M)$ in M, mit $V \subset M_1$. Es folgt $V + Ra(M_1) = M_1$ mit $V \cap Ra(M_1)$ klein in V, d. h. M_1 ist radikal-komplementiert. Dann ist es aber auch U nach ([5] Lemma 3.2), weil M_1/U reduziert ist. (ii $\to$ iii) Als radikal-komplementierter Modul ist M von der Form $M = D \oplus B \oplus F$ mit D teilbar torsionsvoll, B beschränkt, F torsionsfrei und $F/Ra(F)$ endlich erzeugt. Sei nun $M/Ra(M)$ nicht endlich erzeugt, also $B = B_0 \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} B_i)$ mit B_i zyklisch ungleich Null für alle $i \geq 1$. Wir müssen nach ([5] Lemma 3.2) zeigen, daß F und D endlichen Rang haben. Angenommen es gibt ein $X \subset F$ mit $X \cong R^{(\mathbb{N})}$, so wähle man ein $Y \subset Ra(X)$ mit $X/Y \cong \oplus_{i=1}^{\infty} B_i$. Offenbar ist dann $F \times (X/Y)$ bis auf Isomorphie direkter Summand in M, und weil die Diagonale $X \to F \times (X/Y)$ ein neat-Monomorphismus ist, sogar X bis auf Isomorphie ein neat-Untermodul von M. Weil aber X nicht radikal-komplementiert ist, hat man einen Widerspruch. Angenommen es gibt eine Zerlegung $D = D_0 \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} D_i)$ mit $D_i \cong K/R$ für alle $i \geq 1$, so wähle man $Y_i \subset X_i \subset D_i$ mit $Y_i \cong R/(p^i)$ und $X_i/Y_i \cong B_i$ für alle $i \geq 1$. Definiert man $Y = \oplus Y_i$ und $X = \oplus X_i$, so folgt $Y \subset Ra(X)$ und $X/Y \cong \oplus_{i=1}^{\infty} B_i$, also wie oben, daß X bis auf Isomorphie ein neat-Untermodul von M ist, obwohl nicht radikal-komplementiert. Das kann nicht sein. (iii → i) Sei $X + Ra(M) = M$. Falls $M/Ra(M)$ endlich erzeugt ist, gibt es sofort ein endlich erzeugtes $X_1 \subset X$ mit $X_1 + Ra(M) = M$. Andernfalls wähle man einen Basis-Untermodul X_1 von X, der dann nach Voraussetzung radikal-komplementiert ist, und für den natürlich $X_1 + Ra(M) = M$ gilt. Beide Male ist also X_1 komplementiert, und ein Komplement von $X_1 \cap Ra(M)$ in X_1 ist dann auch ein Komplement von $Ra(M)$ in M, das in X enthalten ist.

Als einfaches Beispiel für einen radikal-komplementierten Modul, bei dem das Radikal nicht genügend viele Komplemente hat, kann man jetzt $M = [K/R \times R/(p)]^{(N)}$ wählen.

Bemerkung. Man zeigt leicht, daß für einen beliebigen Untermodul U von M gilt: Ist V ein Komplement von U in M, $V = v_0 R \oplus V'$ mit $v_0 \neq 0$, und $u_0 \in U$, so ist auch $W = (v_0 + u_0)R + V'$ ein Komplement von U in M. Damit läßt sich die der Proposition 1 entgegengesetzte Situation sofort beschreiben: Hat $Ra(M)$ nur ein Komplement in M, so ist M bereits koatomar oder teilbar.

Proposition 2. Für einen R-Modul M sind äquivalent:

(i) M hat genügend viele Basis-Untermoduln.

(ii) Jeder dichte neat-Untermodul von M ist rein in M.

(iii) Falls M nicht koatomar ist, ist $T(M)$ teilbar.

Beweis. (iii → ii) Falls M koatomar ist, ist nur M dicht in M; falls aber $T(M)$ teilbar ist, zeigt man sogar für jeden neat-Untermodul U von M durch Induktion über n, daß $Up^n = U \cap Mp^n$ für alle n ist. (ii → i) Sei $X + Ra(M) = M$. Die Menge $\{U \subset X \mid U \text{ neat in } M\}$ hat nach Zorn ein maximales Element X_1, und weil X/X_1 keinen von Null verschiedenen neat-Untermodul von M/X_1 umfaßt, folgt $X/X_1 \subset Ra(M/X_1)$, und daraus $X_1 + Ra(M) = M$. Wählt man einen Basis-Untermodul X_2 von X_1, so ist auch X_2

dicht und neat in M, nach Voraussetzung also rein in M, d. h. ein Basis-Untermodul von M. (i $\rightarrow$ ii) Sei U dicht und neat in M. Nach Voraussetzung gibt es einen Basis-Untermodul S von M, mit $S \subset U$. Weil U/S direkter Summand in M/S ist, folgt U rein in M.

(ii $\rightarrow$ iii) *Behauptung 1:* $N = K/R \times R/(p^t)$, mit $t \geq 1$, erfüllt nicht die Bedingung (ii). Zum Beweis wähle man Zwischenmoduln $0 \neq Y \subset X \subset K/R$ mit $X/Y \cong R/(p^t)$. Die Diagonale $X \rightarrow K/R \times (X/Y)$ ist dann ein neat-Monomorphismus mit dichtem Bild, aber ihr Bild ist nicht isomorph zu $R/(p^t)$, also auch nicht rein. *Behauptung 2:* Erfüllt $N = N_0 \oplus N'$, mit $N_0 \cong R/(p^t)$ und N' torsionsfrei, die Bedingung (ii), so ist N' bereits endlich erzeugt. Angenommen nämlich, es ist N' nicht koatomar, so gibt es einen Basis-Untermodul $V' \neq N'$. Wählt man dazu $0 \neq a \in N'$ mit $aR \cap V' = 0$, und $N_0 = v_0R$, $u_0 = ap$, so folgt $(v_0 + u_0)R \cong R$, $(v_0 + u_0)R \cap V' = 0$, $W = (v_0 + u_0)R \oplus V'$ dicht und neat in N. Nach Voraussetzung ist W rein in N, also Basis-Untermodul, also isomorph zum Basis-Untermodul $V = v_0R \oplus V'$, der nicht torsionsfrei ist. Das kann nicht sein. *Behauptung 3:* $N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i$, mit $N_i \cong R/(p^{t_i})$ und $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, erfüllt nicht die Bedingung (ii). Zum Beweis wähle man in $N' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ zwei Basis-Untermoduln V', V'' mit $V' \cap V'' = 0$ (etwa wie in [3] Lemma 1), und dann $a \in V''$ mit $ap^{t_0+1} \neq 0$. Mit $N_0 = v_0R$ und $u_0 = ap$ folgt dann $(v_0 + u_0)p^{t_0} \neq 0$, $(v_0 + u_0)R \cap V' = 0$, $W = (v_0 + u_0)R \oplus V'$ dicht und neat in N. Aber weil W nicht isomorph zum Basis-Untermodul $V = v_0R \oplus V'$ ist, ist W nicht rein in N.

Gelte nun (ii) für M, und sei $T(M)$ nicht teilbar, also $M = M_0 \oplus M_1$ mit $M_0 \cong R/(p^t)$. Weil es von M nach $M_0 \times (M_1/T(M_1))$ einen Epimorphismus mit reinem Kern gibt, gilt auch für diesen Modul die Bedingung (ii), so daß $M_1/T(M_1) \cong M/T(M)$ endlich erzeugt ist nach Behauptung 2. Bleibt zu zeigen, daß $T(M)$ beschränkt ist: Nach Behauptung 1 ist es reduziert, und ein Basis-Untermodul S von $T(M)$ erfüllt wieder (ii), ist also nach Behauptung 3 beschränkt, also auch $T(M)$.

Bemerkung. Die entgegengesetzte Situation, daß nämlich M nur einen Basis-Untermodul hat, ist wohlbekannt (zumindest im

Torsions-Fall; siehe [1] p. 149): Sie ist äquivalent damit, daß M koatomar oder teilbar ist, oder daß $T(M)$ beschränkt und $M/T(M)$ teilbar ist.

Proposition 3. Für einen radikal-komplementierten R-Modul M sind äquivalent:

(i) Jedes Komplement des Radikals ist ein Basis-Untermodul.

(ii) Die Komplemente des Radikals sind zueinander isomorph.

(iii) Falls M nicht koatomar ist, ist $T(M)$ teilbar.

Beweis. Nach dem vorhergehenden ist nur noch (ii $\rightarrow$ iii) zu zeigen. Man hat die Zerlegung $M = D \oplus B \oplus F$ mit D teilbar torsionsvoll, B beschränkt, F torsionsfrei und $F/Ra(F)$ endlich erzeugt. Besitze nun M die Eigenschaft (ii), und sei $T(M)$ nicht teilbar, also $B = B_0 \oplus B'$ mit $B_0 \cong R/(p^t)$ und $B'p^t = 0$. Angenommen, es ist $D \neq 0$, also $D = D_0 \oplus D'$ mit $D_0 \cong K/R$, so gibt es nach dem Beweis der Behauptung 1 in Proposition 2 Komplemente V_1, V_2 des Radikals von $D_0 \oplus B_0$, mit $V_1 \cong R/(p^t)$ und $V_2 \cong R/(p^{t+1})$. Wählt man ein Komplement W von $Ra(F)$ in F, so sind $V_i \oplus B' \oplus W$ für $i = 1, 2$ Komplemente von $Ra(M)$ in M, nach Voraussetzung also isomorph. Dann sind aber auch die Torsionsanteile isomorph, d. h. (weil W torsionsfrei) $V_1 \oplus B' \cong V_2 \oplus B'$, was nicht möglich ist. Angenommen, es ist F nicht endlich erzeugt, so gibt es nach dem Beweis der Behauptung 2 in Proposition 2 Komplemente W_1, W_2 des Radikals von $B_0 \oplus F$, mit $W_1 \cong R/(p^t) \times R^n$ und $W_2 \cong R^{n+1}$, wobei n der p-Rang von F ist, d. h. die Dimension des Vektorraumes $F/Ra(F)$. Weil dann $W_i \oplus B'$ für $i = 1, 2$ Komplemente von $Ra(M)$ in M sind, sind nach Voraussetzung insbesondere die torsionsfreien Anteile R^n bzw. R^{n+1} isomorph, was nicht wahr ist.

2. *Quasi-kotorsions-Moduln.* Zur Frage, welche radikal-komplementierten Moduln in jeder wesentlichen Erweiterung ein Komplement haben, erinnern wir zuerst an ein Ergebnis aus [5]: Genau dann hat M in jeder Erweiterung ein Komplement (was wir als Eigenschaft (E) bezeichneten), wenn M radikal-komplementiert und kotorsion ist. Es gilt also, für unser Problem den Begriff „kotorsion" abzuschwächen. Dazu eignet sich Rotmans Charakterisierung der Kotorsions-Moduln in [4] Proposition 4.6,

die man (weil wir ja $D(M) \neq 0$ zulassen) so lesen muß: Genau dann ist M kotorsion, wenn für jede Erweiterung $M \subset N$ gilt: $D(N/M) = (D(N) + M)/M$. Die für uns geeignete Abschwächung liegt nahe:

Definition. Ein R-Modul M heiße *quasi-kotorsion*, wenn für jede Erweiterung N, mit N/M torsionsvoll, gilt: $D(N/M) = (D(N) + M)/M$.

Wir behaupten, daß M genau dann quasi-kotorsion ist, wenn es in jeder Erweiterung N, mit $N/M \cong K/R$, ein Komplement hat: Ist M quasi-kotorsion und N wie angegeben, so folgt aus $D(N) + M = N$, daß es ein teilbares, direkt unzerlegbares $X \subset N$ gibt mit $X \not\subset M$, und dieses X ist schon ein Komplement von M in N; hat aber M die angegebene Komplementeigenschaft und ist N/M torsionsvoll, so folgt $D(N/M) = \bigoplus A_i/M$ mit $A_i/M \cong K/R$ für alle i, und wählt man für jedes i ein Komplement V_i von M in A_i, so sind alle V_i teilbar, so daß aus $\Sigma V_i \subset D(N)$ folgt $D(N/M) \subset (D(N) + M)/M$ wie gewünscht. – Jetzt läßt sich unsere Frage leicht beantworten:

Proposition 4. Für einen R-Modul M sind äquivalent:

(i) M hat in jeder wesentlichen Erweiterung ein Komplement.

(ii) M ist radikal-komplementiert und quasi-kotorsion.

(iii) M hat in jeder Erweiterung N, mit N/M torsionsvoll, ein Komplement.

Beweis. (i $\to$ ii) Ist V ein Komplement von M in $\hat{M}$, so ist $V \cap M$ ein Komplement von $Ra(M)$ in M. Sei nun $M \subset N$ mit $N/M \cong K/R$. Weil sich (i) auf Faktormoduln vererbt, hat auch $M_1 = M/T(M)$ in jeder wesentlichen Erweiterung ein Komplement. Für $N_1 = N/T(M)$ gilt, daß $T(N_1)$ als Untermodul von N_1/M_1 Null oder direkt unzerlegbar ist, und daß $(M_1 + T(N_1))/T(N_1)$ groß in $N_1/T(N_1)$ ist. Es folgt, daß $M_1 + T(N_1)$ ein Komplement in N_1 hat, also auch M_1. Und weil $T(M)$ die Eigenschaft (E) hat, hat endlich auch M ein Komplement in N. (ii $\to$ iii) Sei $M \subset N$ mit N/M torsionsvoll. Um zu zeigen, daß M ein Komplement in N hat, kann man nach ([5] Hilfssatz 5.1) gleich N/M teilbar annehmen. Aus quasi-kotorsion folgt dann $D(N) +$

$M = N$, und weil $M/D(N) \cap M$ reduziert ist, ist auch $D(N) \cap M$ radikal-komplementiert, hat also im teilbaren $D(N)$ ein Komplement, das dann auch ein Komplement von M in N ist.

Die Klasse der Quasi-kotorsions-Moduln ist – falls R unvollständig – nicht gegenüber endlichen direkten Summen abgeschlossen. Wir zählen zum Abschluß einige ihrer Eigenschaften auf.

Proposition 5. Sei U ein Untermodul von M:

(a) Ist M quasi-kotorsion, so ist auch M/U quasi-kotorsion.

(b) Ist M quasi-kotorsion und M/U reduziert, so ist auch U quasi-kotorsion.

(c) Ist U kotorsion und M/U quasi-kotorsion, so ist auch M quasi-kotorsion.

(d) Genau dann ist $M \times R$ quasi-kotorsion, wenn M kotorsion ist.

(e) Ist M quasi-kotorsion und R vollständig, so ist M bereits kotorsion.

Beweis. (a) Das zeigt man ebenso, wie in ([5] Lemma 1.3) die Tatsache, daß sich die Eigenschaft (E) auf Faktormoduln vererbt. (b) Sei $U \subset N$ mit $N/U \cong K/R$. Via Fasersumme kann man einen gemeinsamen Obermodul F annehmen mit $N + M = F$ und $N \cap M = U$. Nach Voraussetzung hat M ein Komplement V in F, und weil V teilbar, also in $D(F) = D(N)$ enthalten ist, ist V auch ein Komplement von U in N. (c) Zu $M \subset N$, mit $N/M \cong K/R$, gibt es zunächst ein Komplement V/U von M/U in N/U; weil aber U kotorsion und V/U isomorph zu K oder K/R ist, hat man noch ein Komplement von U in V, das dann auch ein Komplement von M in N ist. (d) Nach Proposition 4 ist R quasi-kotorsion, so daß nach eben aus M kotorsion sofort $M \times R$ quasi-kotorsion folgt. Sei umgekehrt $M \times R$ quasi-kotorsion und $M \subset N$ mit $N/M \cong K$. Wählt man dazu einen nichttrivialen Zwischenmodul $M \subset X \subset N$, so ist $X \cong M \times R$ und $N/X \cong K/R$. Nach Voraussetzung hat X ein Komplement V in N, und weil X/M klein in N/M ist, ist V auch ein Komplement von M in N, also schon $V \oplus M = N$. (e) Es ist jetzt R kotorsion, nach (c) also $M \times R$ quasi-kotorsion, so daß (d) die Behauptung liefert.

Bemerkung. Ist A ein nicht-lokaler Dedekindring, so ist in Proposition 4 die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) fast trivial (siehe [5] Lemma 5.5). Dafür wird jetzt die Beschreibung der A-Moduln, die in ihrer injektiven Hülle ein Komplement haben, ein Problem – erschwert dadurch, daß sich diese Eigenschaft nicht mehr auf direkte Summanden vererbt.

Literatur

[1] Fuchs, L.: Infinite abelian groups I: Academic Press, New York, London (1970).

[2] Kaplansky, I.: Infinite abelian groups: Univ. Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1969.

[3] Mitchell, A. R.-Mitchell, R. W.: Disjoint basic subgroups: Pac. J. Math. 23 (1967) 119–127.

[4] Rotman, J.: A completion functor on modules and algebras: J. Algebra 9 (1968) 369–387

[5] Zöschinger, H.: Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben: Math. Scand. 35 (1974) 267–287.