BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Verfahren zur Berechnung stabiler Magnetohydrodynamischer Gleichgewichte

Von **Arnulf Schlüter**, München-Garching

Vorgelegt am 6. Juni 1975

1. Das linearisierte Stabilitätsproblem

In der sogenannten idealen magnetohydrodynamischen Näherung wird ein Plasma durch den folgenden Satz dynamischer Gleichungen beschrieben: [1]. [2]

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \varrho (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\, \boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}\, p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \varrho \boldsymbol{v} \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\; p - \varrho p\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \tag{4}$$

mit $\mu \boldsymbol{j} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}; \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$

(μ = Permeabilität des Vakuums; $\gamma > 1$ Adiabaten-Koeffizient)

Die Gültigkeitsdauer dieser Gleichungen setzt voraus, daß mehrere Annahmen berechtigt sind:

Es gilt das ideale Gasgesetz; insbesondere ist der Druck isotrop.
Die Zustandsänderungen sind isentrop, d. h. $dp/p = \gamma d\varrho/\varrho$.
Die Wärmeleitfähigkeit, die Viskosität und der elektrische Widerstand sind vernachlässigbar klein.

Die Berechtigung dieser Annahmen in den tatsächlichen Anwendungsfällen soll hier nicht diskutiert werden. Die meisten realistischeren Alternativen zu dieser Annahme führen zu sehr viel komplexeren Gleichungen, so daß man trotz berechtigter Bedenken diese Gleichungen jedenfalls dann benutzt, wenn geometrische Bedingungen die Lösung komplexerer Gleichungen aussichtslos erscheinen lassen.

Besonderes Interesse gilt den statischen Lösungen des Systems, d. h. den Gleichgewichten, samt deren infinitesimaler Umgebung (Index *o* für die Gleichgewichtsgrößen)

$$\text{grad}\, p_0 = \boldsymbol{j}_0 \times \boldsymbol{B}_0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = L\, \boldsymbol{v} \tag{6}$$

mit
$$\varrho_0 L\, \boldsymbol{v} = \text{grad}\,(\boldsymbol{v}\, \text{grad}\, p_0 + \gamma p_0\, \text{div}\, \boldsymbol{v}) + \frac{1}{\mu} \text{rot}\, \dot{\boldsymbol{B}} \times \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{j}_0 \times \dot{\boldsymbol{B}}$$

wo
$$\dot{\boldsymbol{B}} = \text{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0)$$

Aus der Gleichung (5) folgt

$$\boldsymbol{B}_0 \cdot \text{grad}\, p_0 = 0; \tag{7}$$

also verläuft eine bestimmte Feldlinie ganz auf einer isobaren Fläche, die man daher auch „magnetische" Fläche nennt. Bei den interessierenden Lösungen des Gleichgewichtes bilden die Isobaren ineinandergeschachtelte toroidale Flächen, wobei auf dem innersten, zu einer geschlossenen Linie (der „Seele") entarteten Toroid der Druck seinen höchsten Wert annimmt, und auf jedem isobaren Toroid der Druck geringer ist als in seinem Innern, bis zu einem äußersten Toroid, auf dem der Druck Null ist. Zur Lösung der Bewegungsgleichung (6) oder auch von (1) . . . (4), kann man oft auf der Null-Isobare eine materielle Wand mit verschwindendem elektrischen Widerstand annehmen, so daß dort die (erfüllbaren und genügenden) Randbedingungen gelten:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{v}_{(n)} = 0 & \quad \text{bzw.} \quad & \boldsymbol{v}_{(n)} = 0 \\ \boldsymbol{B}_{(n)} = 0 & & \dot{\boldsymbol{B}}_{(n)} = 0 \end{matrix} \tag{8}$$

wobei (n) die Normal-Komponente bezeichnet.

Soll ein praktisch Plasma-freier Raum zwischen Plasma und Wand beschrieben werden, ist es am einfachsten anzunehmen, daß im ganzen Volumen außerhalb der beschriebenen Nullisobaren der Druck verschwindet, die Magnetfeldlinien jedoch auch dort auf ineinandergeschachtelten Toroiden verlaufen (d. h. magnetische Flächen bilden), und auf *einer* solchen Fläche dieselben Randbedingungen wie vorhin gelten. Zweckmäßig ist dann die – nicht unrealistische – Annahme, daß im drucklosen Außenbereich, die Dichte ϱ *nicht* verschwindet, sondern einen verhältnismäßig kleinen positiven Wert hat.

Der Operator L, der nur die Abhängigkeit vom Ort enthält, ist bei den angegebenen Randbedingungen selbstadjungiert [1]; er besitze die reellen Eigenwerte λ_ν und die dazugehörigen Eigenfunktionen $\boldsymbol{v}_\nu$. Lösungen der Gleichung sind daher

$$\boldsymbol{v} = \sum_\nu \left(a_\nu \boldsymbol{v}_\nu e^{+\sqrt{\lambda_\nu}t} + b_\nu \boldsymbol{v}_\nu e^{-\sqrt{\lambda_\nu}t}\right) \tag{9}$$

mit beliebigem a_ν, b_ν (jedoch so, daß die Summe der rechten Seite existiert). Die Folge der λ_ν besitzt keine untere, bei stetig differenzierbaren p_0 und $\boldsymbol{j}_0$ jedoch eine obere Grenze. Existiert kein positiver Eigenwert von λ_ν, so heißt die Konfiguration *stabil*.

Obwohl die Äquivalenz der Gleichungen (6) und (8) mit einem Variationsproblem die Herleitung von Stabilitätskriterien erlaubt, und zwar sowohl von notwendigen wie hinreichenden, ist es nicht gelungen, auf analytischem Wege einen hinreichenden Überblick zu gewinnen, der es gestattet, für die meisten Konfigurationen von praktischer Wichtigkeit zu entscheiden, ob sie stabil sind. Dies gilt insbesondere, wenn das betrachtete Gleichgewicht keine Symmetrieen besitzt. Ein praktisch benutzter Weg zur Entscheidung dieser Frage besteht dann darin, daß zu weitgehend willkürlich gewählten Anfangsbedingungen (die (8) erfüllen) die Gleichung (6) numerisch gelöst wird. Ist das Gleichgewicht instabil, und ist die Anfangsbedingung nicht (zufällig) gerade so gewählt, daß sie orthogonal auf den instabilen Eigenfunktionen ist, so setzt sich nach genügend langer Zeit die Eigenfunktion größter Anwachsrate durch. Durch Modifikation der Parameter des Gleichgewichtes kann man dann versuchen, die Anwachsrate dieser Mode und schließlich aller instabilen Moden zu verringern und möglichst zum Verschwinden zu bringen. Eine erhebliche praktische Schwierigkeit bietet dabei die numerische Trennung der instabilen Moden von den unvermeidbar gleichzeitig „angeregten", stabilen – und das heißt hier oszillatorischen – Moden. Dies gilt umso mehr, je geringer einerseits die Anwachsrate der In-stabilität ist und je kleiner andererseits die Frequenzen der angeregten stabilen Moden sind. Erschwerend ist hierbei die Besonderheit des Operators L, dessen Eigenwert 0 hoch entartet ist, da bereits

$$\boldsymbol{v}_0 = a(p_0)\,\boldsymbol{j}_0 + b(p_0)\,\boldsymbol{B}_0 \tag{10}$$

für beliebige Funktionen $a(p_0)$ und $b(p_0)$ Eigenfunktion zum Eigenwerte 0 sind und daher zeitunabhängige Lösungen von (6) darstellen.

Es ist besser anstatt dieses üblichen Lösungsverfahrens für Gleichung (6) nun folgende Gleichung mit denselben räumlichen Operator L und denselben Randbedingungen numerisch zu lösen:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = L\boldsymbol{w} \tag{11}$$

Lösungen dieser Gleichung sind mit beliebigen $\check{C}_\nu$ entsprechend zu (9):

$$\boldsymbol{w} = \sum_\nu \check{C}_\nu\, \boldsymbol{v}_\nu\, e^{\lambda_\nu t} \tag{12}$$

Offenbar ist (11) genau dann instabil, wenn es auch die Gleichung (6) ist. Gibt es nur *eine* Eigenfunktion zum größten (positiven) Eigenwert von L, wird sie asymptotisch in beiden Fällen die Lösung dominieren, sofern sie durch die Anfangsbedingung angeregt ist. Oszillatorische Beiträge existieren hier nicht, und im Falle stabilen Gleichgewichts konvergiert jede stetige Lösung von (11) überall gegen Null, abgesehen von möglichen zum Eigenwert Null gehörenden Beiträgen, die als solche erkennbar sein sollten.

Bei der praktischen numerischen Lösung der durch eine Differenzengleichung angenäherten Gleichung (11) steht den Vorteilen das bekannte ungünstigere numerische Verhalten einer parabolischen verglichen mit dem der ursprünglichen hyperbolischen Gleichung entgegen. Bei der Wahl einer engen räumlichen Maschenweite des zur Diskretisierung verwendeten Netzes kann der bei expliziten Verfahren für die numerische Stabilität größte zulässige Zeitschritt unangenehm klein werden. In einem gewissen Umfang kann diese Einschränkung durch den Ersatz der Dichte ϱ_0 in der Definition von L (siehe Gleichung (6)) durch eine andere überall positive Ortsfunktion verbessert werden, da die Stabilitätsgrenze der Differentialgleichungen hierdurch nicht verändert wird (wohl aber im allgemeinen die Moden und die Größe der Eigenwerte). Die bekannten – etwas umständlicheren – impliziten Verfahren mildern die Auswirkung der Forderung nach numerischer Stabilität jedenfalls beträchtlich.

2. Asymptotische Gleichgewichte

Die Wirkung des Ersatzes von Gleichung (6) durch (9) kann (abgesehen wieder von den zum Eigenwert 0 gehörigen Beiträgen) anschaulich so beschrieben werden, daß mit den geänderten Gleichungen die Lösung sich einem stabilen Gleichgewicht nähert (die Größen erster Ordnung werden Null), von einem instabilen Gleichgewicht sich aber i. a. entfernt. Es entsteht daher die Frage, ob eine Modifikation der vollen nichtlinearen Gleichungen (1) ... (4) so möglich ist, daß sich ihre Lösungen *stabilen* Gleichgewichten asymptotisch annähern. Die Antwort ist von überraschender Einfachheit: Man ersetze das Trägheitsglied in (1) durch ein „Reibungsglied" mit dem positiven „Reibungskoeffizienten" ϱ, so daß man erhält:

$$\varrho \boldsymbol{w} = -\operatorname{grad} p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B}) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div} \varrho \boldsymbol{w} \tag{15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\boldsymbol{w} \operatorname{grad} p - \gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{w} \tag{16}$$

mit $\mu \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$

und den Randbedingungen

$$\boldsymbol{w}_{(n)} = 0; \quad \boldsymbol{B}_{(n)} = 0 \tag{17}$$

Linearisierung dieser Gleichungen in der Umgebung von $\boldsymbol{w} = 0$ führt offenbar wieder zu (5) und (11) mit demselben Operator L.

Das System (13) ... (17) besitzt einen Energiesatz, der bei Integration über das ganze (toroidförmige) Gebiet innerhalb der begrenzenden Wand lautet:

$$(18) \qquad \int \varrho\, \boldsymbol{w}^2\, d^3\tau = -\frac{d}{dt} \int \left\{ p/(\gamma - 1) + \boldsymbol{B}^2/2\mu \right\} d^3\tau$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist positiv definit; wegen (17) kann sein Integral nie zunehmen, daher muß jede (stetige) Lösung von (13) ... (17) die Eigenschaft besitzen, daß $\boldsymbol{w}$ überall asymptotisch verschwindet. D. h. aber wegen (13), daß ein statisches Gleichgewicht asymptotisch erreicht wird. Nach der vorangegangenen Diskussion über das Verhalten in der infinitesimalen Umgebung von Gleichgewichten ist dieses Gleichgewicht sogar stabil, sofern nicht etwa instabile Moden „unangeregt" bleiben. Mit dieser Möglichkeit muß gerechnet werden, wenn Rand- und Anfangsbedingungen Symmetrieen besitzen, die durch die Differentialgleichungen erhalten bleiben. Dies wäre bei Rotationssymmetrie um eine Achse oder Spiegelsymmetrie zu einer Ebene der Fall.

Die Gleichungen (14), (15) und (16) können als Erhaltungssätze für den magnetischen Fluß, die Materie und die Entropie interpretiert werden. Insbesondere bleiben zwischen je zwei ineinandergeschachtelten magnetischen Flächen (die sich verschieben und deformieren können) die eingeschlossene Masse und die beiden eingeschlossenen magnetischen Flüsse (entlang dem Toroid, bzw. um die „Seele" herum) konstant.

Diese Bedingungen verknüpfen die Anfangskonfiguration, die durch die Anfangsbedingungen beschrieben wird, ziemlich eng mit dem asymptotischen Gleichgewicht. Dadurch wird i. a. ausgeschlossen, daß dieses zur trivialen Klasse $p = \text{const}$ gehört. Andererseits verhindert die Bindung an diese Erhaltungsgrößen den Zugang zu Gleichgewichten noch niedrigerer Energie (die also „stabiler" sind), der erwünscht sein kann. Der Ersatz der Gleichung (14) etwa durch

$$(14^+) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B}) - \operatorname{rot}\,(g\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{j}))$$

mit g beliebig nicht-negativ

führt mit der zusätzlichen Randbedingung

$$(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B})_{(n)} \ (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{j}) = 0$$

auf der Wand zu einer weiteren Abnahme der Energie, ohne die statischen Lösungen und ihre infinitesimalen Umgebungen zu beeinflussen.

Obwohl zu erwarten ist, daß eine beliebige vorgegebene (nichtsymmetrische) Anfangssituation zu einem stabilen Gleichgewicht führt, darf nicht auch erwartet werden, daß das Gleichgewicht vom physikalischen Standpunkt aus akzeptabel ist; insbesondere etwa deshalb nicht, weil der Druck in der Nähe der Wand unzulässig groß wird. Das Verfolgen der Entwicklung der numerischen Lösung sollte wegen der Anschaulichkeit der Gleichungen (13) . . . (16), ein intuitives Verständnis herbeiführen, so daß durch gezielte Veränderungen in den Anfangs- und Randbedingungen akzeptable Gleichgewichte erreicht werden können.

Die berichtete Untersuchung habe ich im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik im Rahmen des Vertrages mit Euratom durchgeführt. Ich danke insbesondere den Drs. P. Merkel und K. U. von Hagenow für nützliche Diskussionen.

Literatur

[1] Hain, K., R. Lüst und A. Schlüter: Z. f. Naturforschung **12a**, 833–841 (1957)

[2] Bernstein, I. B., E. A. Frieman, M. D. Kruskal, and R. M. Kulsrud: Proc. Roy. Soc. (London) A 244, 17 (1958).