BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Kriterium für platte holomorphe Abbildungen

Von Burchard Kaup*

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 8. November 1968

In [5] bewies R. Kiehl, daß platte holomorphe Abbildungen zwischen komplexen Räumen (es sind stets komplexe Räume im Sinne von [2] gemeint) offen sind. Nicht alle offenen holomorphen Abbildungen sind platt. Da platte holomorphe Abbildungen mit algebraischen Methoden besonders gut untersucht werden können, interessiert die Frage, wann die (oft leichter zu verifizierende) Offenheit einer holomorphen Abbildung ihre Plattheit impliziert. Dazu bewies H. Kerner in [4], Satz 1:

Ist $h: X \to \boldsymbol{C}^n$ holomorph und offen, ist $h^{-1}(h(x))$ reduziert in x, so ist h platt in x.

Aus [3], Satz 2.4 folgt dann, daß X reduziert ist in x. Das obige Kriterium ist nicht mehr anwendbar z. B. für eine holomorphe verzweigte Überlagerung $h: \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$.

In dieser Arbeit wird nun bewiesen:

Satz. *Es sei X ein reindimensionaler*** (nicht notwendig reduzierter) *komplexer Raum, $x \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) *Ist U eine offene Umgebung von x in X, n eine natürliche Zahl, $h: U \to \boldsymbol{C}^n$ offen und holomorph, dann ist h platt in x.*

b) *Es gibt eine offene Umgebung U von x in X und eine holomorphe Abbildung $h: U \to \boldsymbol{C}^n$ mit $n = \dim X$, die platt in x ist.*

c) *Der Strukturhalm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein Macaulay-Ring.*

Den Herren Prof. Dr. G. Scheja und Dr. U. Storch danke ich für einige wertvolle Hinweise.

---

* Diese Arbeit wurde gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds.

** Ein komplexer Raum X heißt reindimensional, wenn $\dim {}_xX =$ const. auf X; X kann dann eingebettete Komponenten haben.

1. Es sei R ein lokaler Ring (kommutativ, mit Einselement), $\mathfrak{n} := \sqrt{(0)}$ das Nilradikal von R. $\operatorname{red}(R) := R/\mathfrak{n}$ heißt *Reduktion* von R, $\operatorname{red}: R \to \operatorname{red}(R)$ sei die kanonische Projektion. R heißt *reduziert*, wenn $\mathfrak{n} = (0)$. Ein Element $r \in R$ heißt *aktiv* in R, wenn $\operatorname{red}(r)$ kein Nullteiler in $\operatorname{red}(R)$ ist. Aus der Tatsache, daß in einem noetherschen Ring die Menge der Nullteiler gleich der Vereinigung aller zu (0) assoziierten Primideale ist, folgert man leicht

$$(1) \qquad r \text{ aktiv in } R \Leftrightarrow r \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_i(0)} \mathfrak{p}.$$

(Mit $\operatorname{Ass}(0)$ bezeichnen wir die Menge der zu $(0) \subset R$ assoziierten Primideale, mit $\operatorname{Ass}_i(0)$ die Menge der isolierten Primideale von (0).) Eine Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ von Nichteinheiten in R heißt *Primfolge* in R, wenn die Restklasse a_i' von a_i kein Nullteiler in $R/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ist für $i = 1, \ldots, n$. (Für $i = 1$ soll das heißen, daß a_1 kein Nullteiler in R ist). Ein lokaler Ring R heißt *Macaulay-Ring*, wenn es eine Primfolge $(a_1, \ldots, a_n)$ in R gibt mit $n = \dim R$.

Im folgenden benötigen wir (vgl. [6], App. 6, Th. 2 und Cor. 5):

(2) *Ist R ein Macaulay-Ring, so gilt:*

a) $\operatorname{Ass}(0) = \operatorname{Ass}_i(0)$.

b) *Ist die Nichteinheit $r \in R$ kein Nullteiler, so ist R/rR wieder ein Macaulay-Ring.*

(3) *Ist R ein Macaulay-Ring oder ein reduzierter Ring, so ist ein Element $r \in R$ genau dann aktiv in R, wenn es kein Nullteiler in R ist.*

Beweis: In beiden angegebenen Fällen ist $\operatorname{Ass}(0) = \operatorname{Ass}_i(0)$.

2. Es sei $f: R \to S$ ein Homomorphismus zwischen den noetherschen Ringen R und S, $\mathfrak{a}$ sei ein Ideal in R, so daß $\mathfrak{b} := f(\mathfrak{a})S$ im Radikal von S enthalten ist; M sei ein endlicher S-Modul. Wegen [1], Chap. III, § 5, Prop. 2 ist M Ideal-separiert (vgl. Def. 1 aus dem gerade zitierten Paragraphen) bezüglich $\mathfrak{a}$, wegen Theorem 1 aus demselben Paragraphen gilt also:

(4) *M ist genau dann platter R-Modul, wenn $M/\mathfrak{b}M$ platter $(R/\mathfrak{a})$-Modul und* $\operatorname{Tor}_1^R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$ *ist.*

Wir benötigen folgendes Korollar zu (4):

(5) *Es sei $a \in R$ kein Nullteiler, $b := f(a)$ liege im Radikal von S. Dann ist S genau dann ein platter R-Modul, wenn S/b platter (R/a)-Modul und b kein Nullteiler in S ist.*

Beweis: Wenn a kein Nullteiler in R ist, dann ist

$0 \longrightarrow R \xrightarrow{a'} R \longrightarrow R/a \longrightarrow 0$ mit $a'(r) := ar$ eine Auflösung von R/a, daraus errechnet man $\operatorname{Tor}_1^R(S, R/a) = \operatorname{Kern}(b' : S \to S)$ mit $b'(s) := bs$. Also ist $\operatorname{Tor}_1^R(S, R/a) = 0$ genau dann, wenn b kein Nullteiler in S ist.

3. Alle vorkommenden komplexen Räume seien komplexe Räume im Sinne von Grauert ([2]). Wir schreiben X statt $(X, \mathcal{O}_X)$, $H(X) := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Eine holomorphe Abbildung $h: X \to Y$ heißt platt in $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ platter $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Modul ist bezüglich $h_x^* : \mathcal{O}_{Y,h(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Es sei $f \in H(Y)$; mit $N(f)$ bezeichnen wir den durch f erzeugten analytischen Unterraum von Y, (es ist also $\mathcal{O}_{N(f)} = \left(\mathcal{O}_Y/(f)\right)|_{\{y;\, f(y)=0\}}$), mit f_y bezeichnen wir den durch f in $\mathcal{O}_{Y,y}$ erzeugten Keim. Es sei $h: X \to Y$ holomorph, $f \in H(Y)$, $x \in X$, $y := h(x)$, $f(y) = 0$, f_y kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{Y,y}$, $g := f \circ h$. Aus (5) folgt sofort:

(6) *h ist platt in x genau dann, wenn $h' := h|_{N(g)} : N(g) \to$ $\to N(f)$ platt ist in x und g_x kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist.*

(7) *Eine holomorphe Abbildung $h = (h_1, \ldots, h_n) : X \to \boldsymbol{C}^n$ mit $h(x) = 0$, $n \geqq 1$, ist genau dann platt in x, wenn $(h_{1,x}, \ldots, h_{n,x})$ eine Primfolge in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist.*

Beweis: Es seien $z_1, \ldots, z_n$ die Koordinatenfunktionen des $\boldsymbol{C}^n$; es ist $h_i = h^*(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir führen Induktion über n.

$\boldsymbol{n = 1}$. $z_{1,0}$ ist kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^1,0}$, wegen (6) ist also $h = h_1$ genau dann platt in x, wenn $h_{1,x}$ kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist und $h' : N(h_1) \to N(z_1)$ platt ist in x. Da $N(z_1)$ ein Punkt ist mit $\boldsymbol{C}$ als Strukturhalm, ist h' aber immer platt. Da $h_{1,x}$ genau dann eine (einelementige) Primfolge ist, wenn es kein Nullteiler ist, ist der Fall $n = 1$ bewiesen. (Der Fall $n = 1$ ist gerade die Aussage von Hilfssatz 1 aus [4]).

$n \to n + 1$. Sei $h : X \to \mathbf{C}^{n+1}$ mit $h(x) = 0$ gegeben. Wegen (6) ist h genau dann platt in x, wenn $h' = (h'_1, \ldots, h'_n) : X' = N(h_{n+1}) \to \to N(z_{n+1}) = \mathbf{C}^n$ platt in x ist und wenn $h_{n+1,x}$ kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist; unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung also genau dann, wenn $h'_{1,x}, \ldots, h'_{n,x}$ eine Primfolge in $\mathcal{O}_{X',x} = \mathcal{O}_{X,x}/h_{n+1,x}$ ist und $h_{n+1,x}$ kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Da $h'_{i,x}$ die Restklasse von $h_{i,x}$ in $\mathcal{O}_{X',x}$ ist, ist das äquivalent damit, daß $(h_{1,x}, \ldots, h_{n+1,x})$ eine Primfolge in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist.

(8) *Ist $f : X \to \mathbf{C}$ holomorph und offen in einer Umgebung von $x \in X$, dann ist f_x aktiv in $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Beweis: Wir können o. B. d. A. X als reduziert annehmen; dann wollen wir annehmen, f_x sei nicht aktiv in $\mathcal{O}_{X,x}$, also ein Nullteiler. Dann gibt es $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $g_x \neq 0$, $f_x g_x = 0$; wir können o. B. d. A. $g \in H(X)$ und $fg = 0$ annehmen. Da g auf wenigstens einer irreduziblen Komponente K von X durch x nicht identisch verschwindet, ist $f|_K$ identisch Null, also f nicht offen in einer Umgebung von x. – Es gilt übrigens auch die Umkehrung: Ist f_x aktiv, so ist f offen in einer Umgebung von x.

4. Wir kommen jetzt zum Beweis des oben angegebenen Satzes.

a) ⇒ b). Es sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Parametersystem von $\mathcal{O}_{X,x}$. Da X reindimensional ist, gibt es eine Umgebung U von x in X und Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $f_{i,x} = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß $h = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbf{C}^n$ offen ist; wegen a) ist h platt in x.

b) ⇒ c). Es sei o. B. d. A. $h = (h_1, \ldots, h_n)$ mit $h(x) = 0$. Dann ist $h_{1,x}, \ldots, h_{n,x}$ eine Primfolge in $\mathcal{O}_{X,x}$ wegen (7), also ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Macaulay-Ring.

c) ⇒ a). Wir führen den Beweis durch Induktion über n, es sei o. B. d. A. $h(x) = 0$, $U = X$.

$n = 0$ ist trivial.

$n = 1$. h ist offen, also ist h_x aktiv in $\mathcal{O}_{X,x}$ wegen (8), also kein Nullteiler wegen (3), also ist h platt in x wegen (7).

$n \to n + 1$. Sei $h = (h_1, \ldots, h_{n+1}) : X \to \boldsymbol{C}^{n+1}$ gegeben.

$h_{n+1} : X \to \boldsymbol{C}$ ist offen, also ist $h_{n+1,x}$ kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$. Sei $X' := N(h_{n+1})$; $h' := h|_{X'} : X' \to \boldsymbol{C}^n$ ist wieder offen. Da $h_{n+1,x}$ kein Nullteiler ist, ist $\mathcal{O}_{X',x}$ wieder ein Macaulay-Ring wegen (2), also ist h' platt in x nach Induktionsvoraussetzung, also ist h platt in x wegen (6).

Damit ist der Satz bewiesen.

5. Ist X nicht reindimensional in x, so ist natürlich $\mathcal{O}_{X,x}$ kein Macaulay-Ring; es kann aber sein, daß jede offene holomorphe Abbildung von einer Umgebung von x in einen $\boldsymbol{C}^n$ schon platt ist: sei etwa X reduziert, $x \in X$, $\dim_x X \geqq 2$, es gebe eine Komponente K von X mit $x \in K$, $\dim K = 1$. Ist dann U eine Umgebung von x in X, $h : U \to \boldsymbol{C}^n$ offen und holomorph, dann ist $n = 1$, h_x kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ wegen (8), also ist h platt in x wegen (7).

Literaturverzeichnis

[1] Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Chap. 3, Paris 1961.

[2] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I. H. S. 5, 233–292 (1960).

[3] –, und Kerner, H.: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. 153, 236–260 (1964).

[4] Kerner, H.: Zur Theorie der Deformationen komplexer Räume. Math. Zeitschr. 103, 389–398 (1968).

[5] Kiehl, R.: Aequivalenzrelationen in analytischen Räumen. Math. Zeitschr. 105, 1–20 (1968)

[6] Zariski, O. und Samuel, P.: Commutative Algebra, Vol. 2. van Nostrand, New York (1959).