BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Darstellung holomorpher Funktionen durch Laplace-Maße in der komplexen Zahlenebene

Von Peter Vachenauer in München

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 5. Juli 1968

1. Einleitung

Die von G. Aumann [1] vorgeschlagene Methode der matriziellen Trennung der Veränderlichen bei linearen partiellen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten liefert (angewandt auf die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen) für holomorphe Funktionen f einer komplexen Veränderlichen z Darstellungen der Form

$$f(z) = \int e^{s \cdot z}\, dm(s), \tag{1.1}$$

worin m ein komplexwertiges Maß auf dem Körper der Lebesgue-meßbaren Mengen in der komplexen s-Ebene bezeichnet und die Integration über die gesamte komplexe Zahlenebene zu erstrecken ist.

Bekannte Darstellungen dieser Art ergeben sich für spezielle Maße: Etwa die „Exponentialreihen", wenn das Maß m auf eine abzählbare Punktmenge konzentriert ist (d. h. außerhalb einer abzählbaren Punktmenge im Komplexen verschwindet) oder die „eindimensionalen Laplace- bzw. Fourier-Transformationen", wenn m auf die reelle bzw. imaginäre Achse der s-Ebene konzentriert ist. Schließlich treten Darstellungen der Form (1.1) mit kompaktem Integrationsbereich bei der Laplace-Transformation analytischer Funktionale auf ([5], S. 97).

Trotz dieses umfassenden Charakters hat die Darstellung (1.1) bisher wenig Beachtung gefunden. Der Grund hierfür mag vielleicht darin liegen, daß eine holomorphe Funktion f verschiedene Darstellungen der Form (1.1) besitzt.

In der vorliegenden Arbeit wird die durch (1.1) vermittelte verallgemeinerte Laplace-Transformation daher allgemein für

Borelsche Maße in der komplexen Zahlenebene betrachtet. Hinsichtlich ihrer Wirksamkeit bei der Darstellung holomorpher Funktionen interessiert dabei: (a) Von welcher Gestalt sind die Bereiche der z-Ebene, in welchen Integrale der Gestalt (1.1) konvergieren? Wie läßt sich für ein Borelsches Maß m der Konvergenzbereich des Integrals (1.1) bestimmen? (b) Welche Funktionen f können in ihrem Holomorphiegebiet in der Form (1.1) dargestellt werden? (c) Durch welche Spezialisierung des Integrationsbereiches kann Eindeutigkeit der Darstellung erzielt werden?

Nach den einleitenden Vorbereitungen wird in Abschnitt 3 in Beantwortung der Frage (a) gezeigt, daß ein Integral (1.1) stets in einer konvexen Menge der z-Ebene konvergiert und daß jedes konvexe Gebiet als Konvergenzgebiet $K^0(m)$ eines Borelschen Maßes m auftreten kann. Weiterhin wird eine Formel zur Bestimmung von $K^0(m)$ angegeben. In Beantwortung von (b) wird gezeigt, daß jede holomorphe Funktion f lokal eine Darstellung (1.1) besitzt. Ist das Holomorphiegebiet G von f der Durchschnitt endlich vieler offener Kreisscheiben, so gibt es eine Darstellung (1.1) für f, die sogar in G konvergiert.

Die Darstellung (1.1) ist im allg. nicht eindeutig: Es gibt sogenannte Nullmaße m, für welche die zugeordnete Funktion (1.1) in einem nicht leeren Gebiet M der z-Ebene verschwindet. In Beantwortung der Frage (c) und in Verallgemeinerung der bekannten Eindeutigkeitssätze für die eindimensionalen Fourier- und Laplace-Transformationen werden in Abschnitt 4 solche Bereiche M und S der komplexen Zahlenebene gekennzeichnet, für welche die Zuordnung

$$(1.2) \qquad m \mapsto \left(z \mapsto f(z) = \int_S e^{sz}\, dm(s), \quad z \in M \right)$$

umkehrbar eindeutig ist.

Die Fülle der Nullmaße bedingt unterschiedliche Konvergenzbereiche der möglichen Darstellungen (1.1) einer holomorphen Funktion f. In der Menge dieser Darstellungen entspricht somit der analytischen Fortsetzung von f bei den zugeordneten Darstellungsmaßen m die Addition eines Nullmaßes. Aus diesem Grunde interessieren Darstellungen der Nullmaße über einem komplexen Bereich M, d. h. der Maße m, für welche

$$\int e^{sz}\, dm(s) = 0 \quad \text{für alle } z \in M. \tag{1.3}$$

Es sei im Rahmen dieser Arbeit nur am Rande erwähnt, daß für Nullmaße, die auf den Rand S einer kompakten Menge mit zusammenhängenden Komplement in der s-Ebene konzentriert sind, mit Hilfe der Theorie der Dirichlet-Algebren eine eindeutig charakterisierende Darstellung gegeben werden kann.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für deren Förderung danke ich Herrn Prof. Dr. G. Aumann.

2. Vorbereitungen

1. Im folgenden bezeichne $\boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen, $\boldsymbol{R}$ die Menge der reellen und $\boldsymbol{C}$ die Menge der komplexen Zahlen; ist S eine Teilmenge von $\boldsymbol{C}$, so bezeichne S^0 den offenen Kern und $\bar{S}$ die abgeschlossene Hülle von S und $\mathfrak{B}(S)$ den Borel-Körper über S, d. i. der kleinste σ-Mengenkörper über S, der alle kompakten Teilmengen von S enthält. $\mathfrak{B}$ kennzeichne den Borel-Körper über $\boldsymbol{C}$ und χ_E die charakteristische Funktion einer Menge $E \subseteq \boldsymbol{C}$ (d. h. $\chi_E(s) = 1$ für $s \in E$ und $\chi_E(s) = 0$ für $s \notin E$). Ist $s \mapsto f(s)$ eine komplexwertige Funktion in der komplexen s-Ebene und B eine Teilmenge von $\boldsymbol{C}$, so setzen wir $f(B)$ für $\{f(s) : s \in B\}$ und $f^{[-1]}(B)$ für $\{s : f(s) \in B\}$.

2. Ist Σ ein σ-Mengenkörper von Teilmengen in $\boldsymbol{C}$ und $m : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ ein Maß auf Σ, so kennzeichnet im folgenden $\operatorname{Supp} m$ den Träger von m und $|m|(S)$ für $S \in \Sigma$ die Totalvariation von m auf S.

Eine Funktion $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ heißt bekanntlich im Lebesgueschen Sinne m-integrierbar, wenn sie m-meßbar und $\int |f(s)|\, d|m|(s) < < +\infty$ ist ([4], S. 112). Wir sagen demnach, daß das Laplace-Integral

$$\int e^{s \cdot z}\, dm(s)^{1} \tag{2.0}$$

[1] Falls nicht besonders gekennzeichnet, erstrecken sich alle vorkommenden Integrale über die Ebene $\boldsymbol{C}$.

für ein $z \in \boldsymbol{C}$ existiert, wenn $s \mapsto e^{sz}$, $s \in \boldsymbol{C}$, m-meßbar ist und

$$\int |e^{sz}| \, d|m|(s) < +\infty. \tag{2.1}$$

Im Gegensatz hierzu ist das eindimensionale Laplace-Integral bekanntlich als uneigentliches Integral unabhängig von (2.1) definiert. Der Träger des Maßes m in (2.0) ist im allg. ein reell zweidimensionaler Bereich, daher könnten uneigentliche Integrale der Form (2.0) nur mit zusätzlichen Bedingungen definiert werden ([8], S. 18). Es zeigt sich aber, daß für unsere Zwecke bereits die eigentliche Integration (mit der Bedingung (2.1)) ausreichend ist.

Für jedes $z \in \boldsymbol{C}$ ist $e_z : s \mapsto e^{sz}$ eine stetige Funktion auf $\boldsymbol{C}$, die für kein $s \in \boldsymbol{C}$ verschwindet. Ist daher e_z für ein $z \in \boldsymbol{C}$ m-integrierbar, so ist $|m|(S) < +\infty$ für alle S mit $\inf\{\mathrm{Re}(sz) : s \in S\} > -\infty$. Ist e_z sogar für alle $z = z_n$ einer Nullfolge $(z_n)_n$ m-integrierbar, so muß die Lebesguesche Vervollständigung Σ_m^* von Σ bezüglich m den Borelkörper $\mathfrak{B}$ enthalten ([11], S. 8).

Wir beschränken uns daher in der Betrachtung der Laplace-Integrale (2.0) auf komplex-wertige Borelsche Maße in der komplexen Zahlenebene, die auf den kompakten Teilmengen von $\boldsymbol{C}$ von beschränkter Totalvariation sind.

Definition 1

Ist S eine abgeschlossene Teilmenge von $\boldsymbol{C}$, so bezeichnet $B(S)$ den (linearen) Raum der komplex-wertigen Borelschen Maße auf S, die auf den kompakten Teilmengen von S von beschränkter Totalvariation sind; $B_0(S)$ bezeichnet den Teilraum der beschränkten Maße in $B(S)$.

3. Borelsche Laplace-Maße

Im Raum $B(\boldsymbol{C})$ definieren wir nun die für unsere Zwecke nötigen Teilräume und führen zu diesem Zwecke den Begriff des Laplace-Maßes ein:

Definition 2

Für eine Teilmenge M von $\mathbf{C}$ wird

$$BL(M) := \{m \in B(\mathbf{C}) : \int |e^{sz}|\, d|m|(s) < +\infty \text{ für alle } z \in M\}$$

der (lineare) Raum der Borelschen Laplace-Maße über M (kurz BL-Maße über M) genannt.

Definition 3

Für eine Teilmenge M von $\mathbf{C}$ wird

$$BLN(M) := \{m \in BL(M) : \int e^{sz}\, dm(s) = 0 \text{ für alle } z \in M\}$$

der (lineare) Raum der Laplace-Nullmaße über M genannt.

Die Existenz derartiger Nullmaße zeigt

Beispiel 1

Ist S eine beschränkte geschlossene und rektifizierbare Jordan-Kurve, so ist $m \in BLN(\mathbf{C})$, wenn $\operatorname{Supp} m = S$ und

$$m(B) = \oint_S \chi_B(s)\, ds \text{ für alle } B \in \mathfrak{B}.$$

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar mit [4], S. 114, S. 180:

Lemma 1

Es sei $a \in \mathbf{C}$ beliebig, dann ist die Abbildung $\bar{e}_a : B(\mathbf{C}) \to B(\mathbf{C})$ mit

$$\bar{e}_a(m)(B) := \int_B e^{sa}\, dm(s) \text{ für beschränktes } B \in \mathfrak{B},\ m \in B(\mathbf{C}),$$

für jedes $M \subseteq \mathbf{C}$ ein Isomorphismus zwischen den linearen Räumen $BL(M)$ und $BL(\{z - a : z \in M\})$ bzw. zwischen $BLN(M)$ und $BLN(\{z - a : z \in M\})$.

Und

Lemma 2

Sind M_1 und M_2 Teilmengen von $\mathbf{C}$ und $M_1 \subseteq M_2$, so gilt stets

$$BL(M_2) \subseteq BL(M_1) \subseteq B(\mathbf{C}) \text{ und } BLN(M_2) \subseteq BLN(M_1).$$

3.1 Die Topologisierung der Maßräume

1. Die Konvergenz von BL-Maßen bezieht sich auf eine geeignete Topologisierung der Räume $BL(M)$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$. Hinsichtlich der Darstellung (1.1) einer holomorphen Funktion f benötigen wir einen Konvergenzbegriff für Maße $m \in BL(M)$, der zumindest die punktweise Konvergenz der zugeordneten Funktionen f nach sich zieht:

Ist $0 \in M$, so gilt $BL(M) \subset B_0(\boldsymbol{C})$. Es ist daher naheliegend, in diesem Falle $BL(M)$ als topologischen Teilraum des vollständig normierten Raumes $(B_0(\boldsymbol{C}), \|\,.\,\|)$ mit

$$\|m\| := |m|(\boldsymbol{C}), \quad m \in B_0(\boldsymbol{C}), \tag{3.0}$$

zu betrachten. Das lineare Funktional

$$m \mapsto \int e^{sz}\, dm(s), \quad m \in BL(M), \tag{3.1}$$

ist jedoch nur für $z = 0$ auf $(B_0(\boldsymbol{C}), \|\,.\,\|)$ beschränkt. Dies zeigt

Beispiel 2

Es sei $M = \boldsymbol{C}$ und $(m_n)_n$ die Folge der Maße $m_n \in B_0(\boldsymbol{C})$ mit $\operatorname{Supp} m_n = S_n := \{s : |s| = A \cdot n\}$, $0 < A < +\infty$, und

$$\int e^{sz}\, dm_n(s) = \frac{A^n\, n!}{2\pi i} \oint_{S_n} \frac{e^{sz}}{s^{n+1}}\, ds, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Die Folge $(m_n)_n$ konvergiert in $(B_0(\boldsymbol{C}), \|\,.\,\|)$ gegen $m = 0$; denn

$$\lim_{n\to\infty} \|m_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Da für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ und jedes $z \in \boldsymbol{C}\ \ S_n$ im Holomorphiegebiet von $s \mapsto e^{sz}$ liegt, folgt mit dem Residuensatz für Kurvenintegrale

$$\int e^{sz}\, dm_n(s) = (A \cdot z)^n, \quad n \in \boldsymbol{N},$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int e^{sz}\, dm_n(s) \right| = +\infty \quad \text{für } |z| > A^{-1}.$$

2. Soll das lineare Funktional (3.1) für jedes $z \in M$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, stetig sein, so muß in $BL(M)$ eine von M abhängige Topologie eingeführt werden. Um eine lokal-konvexe und separierte Topologie zu gewinnen, betrachten wir die Familie der Normen

$$\left\{\|m\|_{\{z\}} := \int |e^{sz}|\, d|m|(s),\ m \in BL(M)\right\},\ z \in M,$$

und für $z \in M$, $\varepsilon > 0$, $m \in BL(M)$ setzen wir

$$V^M_{z,\varepsilon}(m) := \{m' \in BL(M) : \|m' - m\|_{\{z\}} < \varepsilon\}. \tag{3.2}$$

Definition 4

Ist M eine Teilmenge von $\boldsymbol{C}$, so bezeichnet τ_M die gröbste Topologie im linearen Raum $BL(M)$, die die Umgebungsbasis der Null

(3.3)
$$\mathfrak{B}_M(0) := \left\{V^M_{z_1,\varepsilon}(0) \cap \ldots \cap V^M_{z_n,\varepsilon}(0) : z_1, \ldots z_n \in M, n \in \boldsymbol{N}, \varepsilon > 0\right\}$$

enthält und mit der algebraischen Struktur von $BL(M)$ verträglich ist. Für $L \subseteq M$ und $m \in BL(M)$ ist

$$\|m\|_L := \sup_{z \in L} \int |e^{sz}|\, d|m|(s). \tag{3.4}$$

(Ist L offen, so ist $m \mapsto \|m\|_L$ keine Norm auf $BL(L)$!)

Da für jedes $z \in M$ und $m, m' \in BL(M)$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$,

$$\left|\int e^{sz}\, dm(s) - \int e^{sz}\, dm'(s)\right| \leq \|m - m'\|_{\{z\}},$$

gilt

Lemma 3

Für jedes $z \in M$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, ist das lineare Funktional (3.1) stetig auf $(BL(M), \tau_M)$.

Konvergiert also eine Folge $(m_n)_n$ in $(BL(M), \tau_M)$ gegen ein $m \in BL(M)$, so konvergiert die zugehörige Funktionenfolge $(f_n)_n$ in (1.1) punktweise, d. h. für jedes $z \in M$, gegen die mit (1.1) zu m gehörige Funktion f.

Zur weiteren Untersuchung der Räume $(BL(M), \tau_M)$ benötigen wir

Lemma 4

Für jedes $z \in \boldsymbol{C}$ ist der normierte Raum $(BL(\{z\}), \|\cdot\|_{\{z\}})$ vollständig, d. h. ein Banachraum.

Beweis:

Der Isomorphismus $\bar{e}_z : (BL(\{z\}), \|\cdot\|_{\{z\}}) \to (B_0(\boldsymbol{C}), \|\cdot\|)$ mit

$$\bar{e}_z(m)(B) := \int_B e^{sz}\, dm(s), \quad B \in \mathfrak{B}, \quad m \in BL(\{z\}),$$

ist wegen $\|\bar{e}_z(m)\| = \|m\|_{\{z\}}$ isometrisch und $(B_0(\boldsymbol{C}), \|\cdot\|)$ ist nach [4], S. 161, vollständig,

w. z. b. w.

Satz 1

Für alle M, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, ist $(BL(M), \tau_M)$ ein vollständiger separierter lokalkonvexer Raum und stets ist $(BLN(M), \tau_M)$ ein abgeschlossener Teilraum von $(BL(M), \tau_M)$.

Beweis:

1. Die Topologie τ_M ist durch eine Familie von Normen über $BL(M)$ in der üblichen Weise definiert ([7], S. 23), daher ist $(BL(M), \tau_M)$ lokal-konvex und separiert.

Zum Nachweis der Vollständigkeit betrachten wir einen Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ in $(BL(M), \tau_M)$. Ein Filter in einem lokal-konvexen Raum heißt bekanntlich Cauchy-Filter, wenn er zu jeder Umgebung V des Nullelements eine Menge F enthält, so daß für $m_1, m_2 \in F$ stets $m_1 - m_2 \in V$ folgt.

Wegen (3.2) ist für $z \in M$ und $n \in \boldsymbol{N}$ die Menge $V^M_{z,1/n}(0)$ Umgebung der Null; daher enthält $\mathfrak{F}$ für jedes $z \in M$ eine Folge $(F_{z,n})_n$ von Mengen $F_{z,n}$ mit $F_{z,k} \subseteq F_{z,n}$ für $k > n$, so daß für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ und beliebige $m_1, m_2 \in F_{z,n}$

$$\|m_1 - m_2\|_{\{z\}} < 1/n.$$

Jede Folge $(m_{z,n})_n$ mit $m_{z,n} \in F_{z,n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, ist daher eine Cauchy-Folge in $(BL(\{z\}), \|\cdot\|_{\{z\}})$.

Mit Lemma 4 konvergieren alle derartigen Folgen $(m_{z,n})_n$ gegen einen Grenzwert m_z in $(BL(\{z\}), \|.\|_{\{z\}})$ und es gilt für alle $B \in \mathfrak{B}$

$$m_z(B) = \lim_{n\to\infty} m_{z,n}(B). \tag{3.5}$$

Für alle $z', z \in M$ ist $F_{z,n} \cap F_{z',n} \neq \emptyset$. Wir können daher eine Folge $(m_n)_n$ finden, die gegen m_z bezüglich $\|.\|_{\{z\}}$ und gegen $m_{z'}$ bezüglich $\|.\|_{\{z'\}}$ konvergiert. Wegen (3.5) ist daher $m_z = m_{z'}$. Es existiert somit ein $m \in BL(M)$, so daß für alle $z \in M$ $m = m_z$ gilt.

Der Filter $\mathfrak{F}$ konvergiert gegen m; denn jede Umgebung von m in $(BL(M), \tau_M)$ enthält eine Menge der Gestalt

$$F_{z_1, 1/n_1} \cap \ldots \cap F_{z_k, 1/n_k} \text{ mit } z_1, \ldots z_k \in M,\ n_1, \ldots n_k \in \boldsymbol{N} \text{ und } k \in \boldsymbol{N}.$$

2. Ist $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter in $(BLN(M), \tau_M)$ mit dem Limes $m \in BL(M)$, so gilt für jedes $z \in M$ und für die in 1. definierten $m_{z,n} \in BLN(M)$

$$\left|\int e^{sz}\, dm(s)\right| = \left|\int e^{sz}\, dm(s) - \int e^{sz}\, dm_{z,n}(s)\right| \leqq \|m - m_{z,n}\|_{\{z\}},$$

somit ist $m \in BLN(M)$,

w. z. b. w.

Ist M eine Teilmenge von $\boldsymbol{C}$ und $u \in \boldsymbol{C}$, so setzen wir abkürzend Stern (u, M) für $\{u\} \cup \{z \in M :$ Es gibt ein $k > 1$, so daß auch $u + k(z-u) \in M\}$. Es gilt dann die folgende Charakterisierung konvergenter Folgen in $(BL(M), \tau_M)$:

Satz 2

Es sei M eine Teilmenge von $\boldsymbol{C}$ und $(m_n)_n$ für ein $z_0 \in \boldsymbol{C}$ eine $\|.\|_{\{z_0\}}$-Cauchy-Folge. Gibt es zu jedem Punkt f von $M^* :=$ $:=$ Stern(z_0, M) ein $K_f < +\infty$, so daß für alle $n \in \boldsymbol{N}$ $\|m_n\|_{\{f\}} \leq K_f$, dann ist $(m_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $(BL(M^*), \tau_{M^*})$.

Beweis:

1. Wir zeigen zunächst, daß für jedes $z \in M^*$ die Folge $(m_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $(BL(\{z\}), \|.\|_{\{z\}})$ ist und betrachten zu

diesem Zwecke die Maße m'_n, $n \in \boldsymbol{N}$, aus $(B_0(\mathbf{C}), \|\cdot\|)$ mit

$$m'_n(B) := \int_B e^{s z_0} \, d m_n(s), \quad B \in \mathfrak{B}, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Ist $z \in M^*$, so gibt es ein $k > 1$, so daß $z_0 + k(z - z_0) \in M$. Mit $\lambda := k^{1/2}$ ist wegen $\lambda > 1$ und

$$z_0 + \lambda\big((z_0 + \lambda(z - z_0)) - z_0\big) = z_0 + \lambda^2(z - z_0)$$

auch $z_0 + \lambda(z - z_0) \in M^*$.

Mit der Hölderschen Ungleichung ([4], S. 119) gilt somit für beliebiges $n, l \in \boldsymbol{N}$

$$\|m_l - m_n\|_{\{z\}} = \int |e^{s(z - z_0)}| \cdot |e^{s z_0}| \, d\,|m_l - m_n|\,(s) \leqq$$

$$\leqq \Big\{\int |e^{s(z - z_0)}|^{\lambda} \, d\,|m'_l - m'_n|\,(s)\Big\}^{1/\lambda} \cdot \Big\{\int 1^{\mu} \, d\,|m'_l - m'_n|\,(s)\Big\}^{1/\mu},$$

wobei μ gemäß $1/\lambda + 1/\mu = 1$ endlich und positiv ist.

Für $f := z_0 + \lambda(z - z_0)$ ist

$$\|m_l - m_n\|_{\{z\}} \leq \Big\{\int |e^{s(z_0 + \lambda(z - z_0))}| \, d\,|m_l - m_n|\,(s)\Big\}^{1/\lambda} \cdot \|m_l - m_n\|_{\{z_0\}}^{1/\mu}$$

$$\leq \{2 K_f\}^{1/\lambda} \cdot (\|m_l - m_n\|_{\{z_0\}})^{1/\mu}.$$

2. Jede τ_{M^*}-Umgebung von $0 \in BL(M^*)$ enthält wegen (3.2) und (3.3) eine Menge der Gestalt

$$V^{M^*}_{z_1, \varepsilon}(0) \cap \ldots \cap V^{M^*}_{z_k, \varepsilon}(0) \text{ mit } z_1, \ldots z_k \in M^*, \ k \in \boldsymbol{N}, \ \varepsilon > 0.$$

Wegen 1. gibt es ein $N \in \boldsymbol{N}$, so daß für alle $l, n > N$ die Maße $m_l - m_n$ in $V^{M^*}_{z_1, \varepsilon}(0) \cap \ldots \cap V^{M^*}_{z_k, \varepsilon}(0)$ liegen; daher ist der durch $(m_n)_n$ erzeugte Fréchet-Filter ein Cauchy-Filter in $(BL(M^*), \tau_{M^*})$,

w. z. b. w.

Ist M offen, so ist Stern $(0, M) = M \cup \{0\}$, daher folgt mit Satz 2 aus Satz 1

Korollar 1

Ist M eine offene Teilmenge von $\boldsymbol{C}$ und $(m_n)_n$ eine $\|.\|$-Cauchy-Folge in $BL(M)$ und gibt es zu jeder kompakten Menge F, $F \subset M$, ein $K_F < +\infty$, so daß für alle $n \in \boldsymbol{N}$ $\|m_n\|_F \leqq K_F$, so besitzt $(m_n)_n$ einen Grenzwert in $(BL(M), \tau_M)$.

3.2 Der Konvergenzbereich

1. Wir wenden uns nun den in der Einleitung aufgeworfenen Fragestellungen zu und untersuchen zu diesem Zwecke zunächst das Konvergenzverhalten des Integrals (2.0) für ein Maß $m \in B(\boldsymbol{C})$:

Definition 5

Der Konvergenzbereich $K(m)$ eines Maßes $m \in B(\boldsymbol{C})$ ist die Menge aller $z \in \boldsymbol{C}$, für die (2.1) erfüllt ist; das Konvergenzgebiet $K^0(m)$ von m ist der offene Kern von $K(m)$.

Für jedes $m \in B(\boldsymbol{C})$ ist $K(m)$ charakterisiert durch

Satz 3

Ist M' die konvexe Hülle der Menge M in $\boldsymbol{C}$, so ist $BL(M') = BL(M)$, d. h. für jedes $m \in B(\boldsymbol{C})$ ist der Konvergenzbereich $K(m)$ konvex.

Beweis:

Mit Lemma 2 ist wegen $M \subseteq M'$ sicher $BL(M') \subseteq BL(M)$. Seien umgekehrt $z, z' \in M$ und $m \in BL(M)$, dann gilt für jedes λ, $0 < \lambda < 1$, mit der Hölder-Ungleichung und $p := 1/\lambda > 1$ und $q := 1/(1-\lambda) > 1$

$$\int |e^{(\lambda z + (1-\lambda) z') s}| \, d|m|(s) \leq$$
$$\leq \left[\int |e^{sz}|^{\lambda p} \, d|m|(s)\right]^{1/p} \cdot \left[\int |e^{sz'}|^{(1-\lambda) q} \, d|m|(s)\right]^{1/q} =$$
$$= \left[\int |e^{sz}| \, d|m|(s)\right]^{1/p} \cdot \left[\int |e^{sz'}| \, d|m|(s)\right]^{1/q} < +\infty .$$

W. z. b. w.

Satz 3 deckt die Bedeutung der konvexen Mengen für die BL-Maße in $B(\mathbf{C})$ auf; daher nun kurz die für uns wichtigsten Begriffe aus der Theorie der konvexen Mengen in $\mathbf{C}$:

Definition 6

Eine abgeschlossene konvexe Menge heißt konvexer Bereich. Eine offene konvexe Menge heißt konvexes Gebiet; sie ist der offene Kern K^0 eines konvexen Bereichs K. Die Stützfunktion $s \mapsto H(s; M)$ einer konvexen Menge M ist durch

$$(3.6) \qquad H(s; M) := \sup_{z \in M} \operatorname{Re}(\bar{s} \cdot z) \quad \text{für alle } s \in \mathbf{C}$$

definiert.

So hat z.B. die Kreisscheibe K mit Mittelpunkt z und Radius ϱ, $\varrho > 0$, die Stützfunktion $H(s; K) = H(s; \{z\}) + \varrho|s| = \operatorname{Re}(\bar{s}z) + \varrho|s|$.

Bekanntlich ist $s \mapsto H(s) := H(s; M)$ für jede konvexe nichtleere Menge M eine konvexe Funktion; denn es gilt ([2], S. 23)

$$(3.7) \qquad H(0) = 0,$$

$$(3.8) \qquad H(t \cdot s) = H(s) \cdot t \quad \text{für alle } s \in \mathbf{C} \text{ und } t > 0,$$

$$(3.9) \qquad H(s + s') \leq H(s) + H(s') \quad \text{für alle } s, s' \in \mathbf{C}.$$

Ist M beschränkt und konvex, so ist $s \mapsto H(s; M)$ stetig.

Weiterhin gilt für zwei konvexe Bereiche M und M' in $\mathbf{C}$, wenn $M \subseteq M'$

$$(3.10) \qquad H(s; M) \leq H(s; M') \quad \text{für alle } s \in \mathbf{C}.$$

Mit Hilfe der Stützfunktion des Bereiches $\{z\}$, $z \in \mathbf{C}$, lautet die Bedingung (2.1) für ein $m \in B(\mathbf{C})$ wegen $H(s; \{z\}) = \operatorname{Re}(\bar{s}z)$

$$\int |e^{sz}|\, d|m|(s) = \int e^{H(\bar{s}; \{z\})}\, d|m|(s) < +\infty,$$

und es ist wegen (3.4) für jede konvexe Teilmenge F von $K(m)$

$$\| m \|_F \leqq \int e^{H(\bar{s};F)}\, d|m|(s). \tag{3.11}$$

Das Integral der rechten Seite existiert für kompakte Teilmengen F von $K^0(m)$; denn es gilt

Lemma 5

Ist G ein konvexes Gebiet in $\mathbf{C}$ und $m \in BL(G)$, so gilt für jeden beschränkten konvexen Bereich B in G

$$\int e^{H(\bar{s};B)}\, d|m|(s) < +\infty,$$

und $\|.\|_B$ ist eine Norm auf $BL(B)$.

Beweis:

B ist kompakt und G ist ein konvexes Gebiet, daher existiert ein kompakter konvexer Polygonbereich P, so daß $B \subseteq P \subset G$, ([2], S. 36). Mit (3.10) gilt dann $H(s; B) \leqq H(s; P)$ für alle $s \in \mathbf{C}$. Hat das Polygon P die n Eckpunkte $z_1, z_2, \ldots z_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, so gilt wegen der Monotonie von $x \mapsto e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\int e^{H(\bar{s};B)}\, d|m|(s) \leqq \int e^{H(\bar{s};P)}\, d|m|(s) \leqq \sum_{k=1}^{n} \int |e^{s z_k}|\, d|m|(s) < +\infty;$$

denn wegen $P \subset G$ sind die $z_k \in G$, $k = 1, 2, \ldots n$, w.z.b.w.

2. Da das Konvergenzgebiet $K^0(m)$ mit Satz 3 für jedes $m \in B(\mathbf{C})$ konvex ist, wird $K^0(m)$ eindeutig durch die Stützfunktion $s \mapsto H(s; K^0(m))$ bestimmt. Daher läßt sich ein konstruktives Verfahren angeben, mit dem für jedes $m \in B(\mathbf{C})$ das Gebiet $K^0(m)$ bestimmt werden kann.

Wir definieren zu diesem Zweck für jedes $m \in B(\mathbf{C})$ zwei Funktionen mit Wertebereichen in $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

Für $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\delta > 0$ und $r > 0$ setzen wir

(3.12)

$$|m|(\varphi, \delta, r) := |m|(\{s : |s| < r \ \ \underline{\text{und}} \ \ |\arg s - \varphi| \leqq \delta \bmod 2\pi\})$$

und

$$(3.13)\qquad K_m(\varphi) := \begin{cases} \varliminf\limits_{\delta\to 0}\ \varliminf\limits_{r\to\infty} -\frac{1}{r}\log\left(|m|(\varphi,\delta,+\infty) - |m|(\varphi,\delta,r)\right), \\ \qquad\qquad \text{wenn} \quad \lim\limits_{\delta\to 0} |m|(\varphi,\delta,+\infty) < +\infty; \\ \varliminf\limits_{\delta\to 0}\ \varliminf\limits_{r\to\infty} -\frac{1}{r}\log |m|(\varphi,\delta,r), \\ \qquad\qquad \text{wenn} \quad \lim\limits_{\delta\to 0} |m|(\varphi,\delta,+\infty) = +\infty. \end{cases}$$

($\varliminf$ kennzeichne dabei den Limes inferior; außerdem sei stets $\log +\infty = +\infty$ und $\log 0 = -\infty$.) Es gilt dann

Satz 4

Das Konvergenzgebiet $K^0(m)$ eines Maßes $m \in B(\boldsymbol{C})$ ist mit (3.13) der offene Kern D^0 von

$$D := \bigcap_{\varphi\in[0,2\pi)} \{z : \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\cdot z) \leqq K_m(\varphi)\}.$$

Beweis:

1. Ist $D^0 \neq \theta$ und $z \in D^0$, so ist (2.1) für dieses z erfüllt: Aus der Definition von D folgt unmittelbar

$$(3.14)\qquad H(\bar{s}; D) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re}(sz) \leqq |s|\cdot K_m(\arg s) \quad \text{für alle } s \in \boldsymbol{C}.$$

D^0 ist nicht leer, daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $s \in \boldsymbol{C}$

$$H(\bar{s}; \{z\}) + \varepsilon\cdot|s| \leqq H(\bar{s}; D).$$

Ist $D' := D \cap \{z' : |z'| < |z| + \varepsilon\}$, so gilt wegen (3.10) und (3.14)

$$(3.15)\qquad H(\bar{s}; \{z\}) + \varepsilon\cdot|s| \leqq H(\bar{s}; D') \leqq |s|\cdot K_m(\arg s),\quad s \in \boldsymbol{C},$$

und damit

$$(3.16)\qquad \int |e^{sz}|\, d|m|(s) \leqq \int e^{H(\bar{s}; D') - \varepsilon|s|}\, d|m|(s).$$

Mit $D^0 \neq \emptyset$ ist für jedes $\varphi \in [0, 2\pi)$ $K_m(\varphi) > -\infty$; außerdem ist für $\delta \mapsto |m|(\varphi, \delta, +\infty)$, $\delta > 0$, jedes $\varphi \in [0, 2\pi)$ monoton nicht fallend. Daher gibt es für jedes $\varphi \in [0, 2\pi)$ ein $\delta_0(\varphi) > 0$, so daß für alle δ, mit $0 < \delta \leqq \delta_0(\varphi)$ folgendes gilt:

Falls $K_m(\varphi) < +\infty$:

$$(3.17)\quad \begin{cases} K_m(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\lim}_{r \to \infty} - \frac{1}{r} \log\left(|m|(\varphi, \delta, +\infty) - |m|(\varphi, \delta, r)\right) \leqq K_m(\varphi) \\ \underline{\text{und}}\ |m|(\varphi, \delta, +\infty) < +\infty, \quad \text{wenn } \lim_{\delta \to 0} |m|(\varphi, \delta, +\infty) < +\infty, \end{cases}$$

bzw.

$$(3.18)\quad \begin{cases} K_m(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\lim}_{r \to \infty} - \frac{1}{r} \log\left(|m|(\varphi, \delta, r)\right) \leqq K_m(\varphi) \\ \underline{\text{und}}\ |m|(\varphi, \delta, +\infty) = +\infty, \quad \text{wenn } \lim_{\delta \to 0} |m|(\varphi, \delta, +\infty) = +\infty. \end{cases}$$

Falls $K_m(\varphi) = +\infty$:

$$(3.19)\quad \begin{cases} |z| + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\lim}_{r \to \infty} - \frac{1}{r} \log\left(|m|(\varphi, \delta, +\infty) - |m|(\varphi, \delta, r)\right) \\ \underline{\text{und}}\ |m|(\varphi, \delta, +\infty) < +\infty. \end{cases}$$

Die Funktion $s \mapsto H(\bar{s}; D')$ ist gleichmäßig stetig auf $\{s : |s| = 1\}$; denn D' ist beschränkt. Es gibt daher ein $\beta > 0$, so daß für alle $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ mit $|\varphi - \psi| < \beta \mod 2\pi$

$$|H(e^{-i\varphi}; D') - H(e^{-i\psi}; D')| < \varepsilon/4.$$

Für $\delta(\varphi) \in (0, \min(\beta, \delta_0(\varphi)))$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, bilden die offenen Intervalle $(\varphi - \delta(\varphi), \varphi + \delta(\varphi)) \mod 2\pi$ ein Überdeckungssystem des Kompaktums $[0, 2\pi]$. Mit dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz existieren somit Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N$ in $[0, 2\pi)$, so daß mit

$$S_k := \{s : |\arg s - \varphi_k| \leqq \delta(\varphi_k) \mod 2\pi\},\ k = 1, 2, \ldots N,$$

$$\boldsymbol{C} = \bigcup_{k=1}^{N} S_k$$

und für alle $\varphi \in (\varphi_k - \delta(\varphi_k),\ \varphi_k + \delta(\varphi_k))$ und $k = 1, 2, \ldots N$

$$H(e^{-i\varphi}; D') < H(e^{-i\varphi_k}; D') + \varepsilon/4.$$

Mit $N_1 := \{k : K_m(\varphi_k) < +\infty\}$ und $N_2 := \{1, 2, \ldots N\} \setminus N_1$ folgt damit aus (3.15) und (3.16)

$$\int |e^{sz}|\, d|m|(s) \leq \sum_{k \in N_1} \int_{S_k} e^{|s|(K_m(\varphi_k) - \frac{3}{4}\varepsilon)}\, d|m|(s) + \\ + \sum_{k \in N_2} \int_{S_k} e^{|s|(|z| + \frac{1}{4}\varepsilon)}\, d|m|(s).$$

Damit gilt

$$\int |e^{sz}|\, d|m|(s) \leq \sum_{k \in N_1} \int_{r=0}^{+\infty} e^{r \cdot (K_m(\varphi_k) - \frac{3}{4}\varepsilon)}\, d|m|(\varphi_k, \delta(\varphi_k), r) + \\ + \sum_{k \in N_2} \int_{r=0}^{+\infty} e^{r \cdot (|z| + \frac{1}{4}\varepsilon)}\, d|m|(\varphi_k, \delta(\varphi_k), r).$$

Da für jedes $k \in \{1, 2, \ldots N\}$ mit $\delta \leqq \delta(\varphi_k)$ eine der Bedingungen (3.17) bis (3.19) erfüllt ist, folgt mit den bekannten Formeln für die Abszisse der absoluten Konvergenz von eindimensionalen Laplace-Integralen ([10], S. 46) die Bedingung (2.1).

2. Ist $z \notin D$, so ist (2.1) nicht erfüllt; denn dann gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi} z) \geqq K_m(\varphi) + \varepsilon.$$

Da der Fall $K_m(\varphi) = -\infty$ eintreten kann, setzen wir

$$l(\varphi) := \begin{cases} K_m(\varphi) + \varepsilon, & \text{falls } K_m(\varphi) > -\infty, \\ -2|z| & , \text{ falls } K_m(\varphi) = -\infty. \end{cases}$$

Es gilt damit in jedem Falle $\mathrm{Re}(e^{i\varphi} z) \geqq l(\varphi)$. Wir wählen wieder ein $\delta(\varphi) > 0$, so daß die entsprechende der Bedingungen (3.17) und (3.18) erfüllt ist und zugleich für alle $\psi \in (\varphi - \delta(\varphi), \varphi + \delta(\varphi))$ gilt:

$$\mathrm{Re}(e^{i\psi} z) = H(e^{-i\psi}; \{z\}) > l(\varphi) - \varepsilon/2.$$

Damit ergibt sich mit $S := \{s : |\arg s - \varphi| \leqq \delta(\varphi) \bmod 2\pi\}$

$$\int |e^{sz}|\, d\,|m|\,(s) \geqq \int_S |e^{sz}|\, d\,|m|\,(s) \geqq \int_S e^{|s|(l(\varphi)-\varepsilon/2)}\, d\,|m|\,(s) \geqq$$
$$\geqq \int_{r=0}^{+\infty} e^{r\cdot(l(\varphi)-\varepsilon/2)}\, d\,|m|\,(\varphi, \delta(\varphi), r).$$

Dieses eindimensionale Laplace-Integral divergiert wegen (3.17) bzw. (3.18) und ([10], S. 46), w. z. b. w.

Korollar 2

Für jedes konvexe Gebiet G in $\boldsymbol{C}$ gibt es ein $m \in B(\boldsymbol{C})$ mit $K^0(m) = G$.

Beweis:

Für das Borel-Lebesguesche Flächenmaß λ gilt $K^0(\lambda) = \theta$ und für $m = 0$ ist $K^0(m) = \boldsymbol{C}$. Es sei daher $G \neq \theta$ und $G \neq \boldsymbol{C}$, d. h. $H(\bar{s}; G) > -\infty$ für alle $s \in \boldsymbol{C}$ und $\Phi := \{\varphi : H(e^{-i\varphi}; G) < < +\infty\} \neq \theta$. Ist μ ein positives Maß auf $\mathfrak{B}$ ([0, 2π)) mit Supp $\mu = \bar{\Phi}$ und $\mu([0, 2\pi)) = 1$, sowie $e(x) := 0$ für $x = +\infty$ und $e(x) := e^{-x}$ für $-\infty < x < +\infty$, so gilt $K^0(m) = G$ für das Maß m mit

$$m(B) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \chi_B(r\cdot e^{i\varphi}) \cdot e(r \cdot H(e^{-i\varphi}; G))\, d\mu(\varphi)\, dr, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

W. z. b. w.

3.3 Die Laplace-Transformierte

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Funktionen f, die durch Laplace-Maße $m \in B(\boldsymbol{C})$ mittels (1.1) dargestellt werden können:

Definition 7

Ist $m \in BL(M)$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, so heißt die Funktion

(3.20) $$z \mapsto \int e^{sz}\, dm(s), \quad z \in M,$$

die Laplace-Transformierte von m.

Satz 5

Enthält für ein $m \in B(\boldsymbol{C})$ der Konvergenzbereich $K(m)$ einen Punkt z_0 mit einer Umgebung $\{z : |z - z_0| < \delta\}$, $\delta > 0$, so ist die Laplace-Transformierte von m holomorph im Punkte z_0.

Beweis:

Für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ ist mit $S_n := \{s : n - 1 \leqq |s| < n\}$ offensichtlich

$$z \mapsto \int_{S_n} e^{sz}\, dm(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int \chi_{S_n}(s)\, s^k\, dm(s)$$

eine ganze Funktion in $\boldsymbol{C}$. Wegen Lemma 3, (3.11) und Lemma 5 konvergiert die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{S_n} e^{sz}\, dm(s) \tag{3.21}$$

in jedem Bereich $\{z : |z - z_0| \leqq \delta'\}$, $0 < \delta' < \delta$, gleichmäßig. Somit ist f nach dem Weierstraß'schen Reihensatz holomorph in z_0. W. z. b. w.

Für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und jedes $\delta' < \delta$ gibt es ein $A < +\infty$, so daß für alle $s \in \boldsymbol{C}$

$$|s|^n \cdot e^{\delta' |s|} \leqq A \cdot e^{\delta |s|}.$$

Daher folgt durch formale Differentiation der Reihe (3.21):

Korollar 3

Ist der offene Kern M^0 von M, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, nicht leer und ist $m \in BL(M)$, so gilt für die n-te Ableitung der Laplace-Transformierten f von m

$$f^{(n)}(z) = \int s^n e^{sz}\, dm(s), \quad z \in M^0. \tag{3.22}$$

Enthält $K(m)$ keine inneren Punkte, so ist die Laplace-Transformierte f von m i. allg. nicht überall differentiierbar ([11], S. 28).

3.4 Laplace-Maße mit beschränktem Träger

Ist der Träger eines Laplace-Maßes beschränkt, so kann die Laplace-Transformierte von m unmittelbar charakterisiert werden. Die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen können dann alle mit bekannten Sätzen beantwortet werden:

Definition 8

Ist S eine abgeschlossene Teilmenge von $\boldsymbol{C}$, so bezeichnet $BL(M, S)$ den (linearen) Teilraum der Maße m in $BL(M)$ mit $\operatorname{Supp} m = S$. $BLN(M, S)$ ist $BLN(M) \cap BL(M, S)$.

Liegt für ein $m \in B(\boldsymbol{C})$ Supp m in $\{s : |s| \leqq A\}$, $A < +\infty$, so ist $m \in B_0(\boldsymbol{C})$ und es gilt für alle $z \in \boldsymbol{C}$ und $S := \operatorname{Supp} m$

$$\|m\|_{\{z\}} = \int |e^{sz}|\, d|m|(s) \leqq e^{A|z|}\, |m|(S) \leqq e^{A|z|}\, \|m\|. \tag{3.23}$$

Daraus ergibt sich

Lemma 6

Ist der Träger S eines Maßes $m \in B(\boldsymbol{C})$ kompakt, so ist m beschränkt und $s \mapsto e^{sz}$ für alle $z \in \boldsymbol{C}$ m-integrierbar. Liegt S in der Kreisscheibe $\{s : |s| \leq A\}$, $A < +\infty$, so ist die Laplace-Transformierte f von m eine ganze Funktion vom Exponentialtypus A, d. h. es gibt ein $K < +\infty$, so daß für alle $z \in \boldsymbol{C}$

$$|f(z)| \leqq K \cdot e^{A|z|}.$$

Mit (3.23) ist das lineare Funktional (3.1) für jedes $z \in \boldsymbol{C}$ beschränkt über $(B_0(S), \|.\|)$, wenn S kompakt ist; und es gilt mit Satz 1

Satz 6

Ist $S \subset \boldsymbol{C}$ kompakt, so sind die Räume $(BL(\boldsymbol{C}, S), \tau_{\boldsymbol{C}})$ und $(B_0(S), \|.\|)$ homöomorph unter der identischen Abbildung; der Raum $(BL(\boldsymbol{C}, S), \tau_{\boldsymbol{C}})$ ist durch $\|.\|$ metrisierbar.

Mit einem Satz von G. Polya ([5], S. 98) läßt sich Lemma 6 in folgender Weise umkehren:

Satz 7

Ist die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \boldsymbol{C}$, vom Exponentialtypus A, $A < +\infty$, so ist sie Laplace-Transformierte des Maßes m mit Supp $m = S := \{s : |s| = A + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, und

$$m(B) = \frac{1}{2\pi i} \oint_S \chi_B(s) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \right) ds, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

3.5 Die Darstellung holomorpher Funktionen

Laplace-Maße mit nichtleerem Konvergenzgebiet können mit Satz 5 zur Darstellung holomorpher Funktionen einer komplexen Veränderlichen als Laplace-Integrale herangezogen werden. Von größtem Interesse ist die Frage, ob damit die Gesamtheit aller holomorphen Funktionen erfaßt wird. Wir zeigen, daß die Antwort auf diese Frage positiv ist:

Jede holomorphe Funktion einer komplexen Veränderlichen kann lokal als Laplace-Transformierte eines Maßes $m \in B(\boldsymbol{C})$ in der Form (3.20) dargestellt werden.

Eine im Punkte $a \in \boldsymbol{C}$ holomorphe Funktion f ist genau dann Laplace-Transformierte eines Maßes $m \in B(\boldsymbol{C})$, wenn die im Nullpunkt holomorphe Funktion $z \mapsto f(z + a)$ Laplace-Transformierte eines Maßes $m_a \in B(\boldsymbol{C})$ ist; denn mit $m_a = \bar{e}_a(m)$ und Lemma 1 ist

$$f(z + a) = \int e^{s(z+a)} \, dm(s) = \int e^{sz} \, dm_a(s).$$

Für die Darstellung der im Nullpunkt holomorphen Funktionen gilt

Satz 8

Ist f eine in $M := \{z : |z| < R\}$, $0 < R < +\infty$, holomorphe Funktion, so ist f die Laplace-Transformierte eines Maßes $m \in BL(M)$[1].

---

[1] Dieser Satz ist bereits in [1], S. 64, formuliert, jedoch gilt der dort skizzierte Beweis nur für gewisse ganze Funktionen.

Beweis:

Wir setzen für $k \in \boldsymbol{N}$ $s_k := (k+1)/R$ und $S_k := \{s : |s| = s_k\}$ und konstruieren damit die Folge $(m_n)_n$ aus $B(\boldsymbol{C})$ mit

$$m_n(B) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{2\pi i} \oint_{S_k} \chi_B(s) \frac{ds}{s^{k+1}}, \quad B \in \mathfrak{B},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ ist Supp m_n beschränkt, daher ist $m_n \in BL(\boldsymbol{C})$. Mit dem Residuensatz gilt für alle $z \in M$

$$(3.24) \qquad \lim_{n\to\infty} \int e^{sz}\, dm_n(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = f(z).$$

Wir zeigen nun, daß die Folge $(m_n)_n$ in M die Voraussetzungen von Korollar 1 erfüllt und damit in $(BL(M), \tau_M)$ einen Grenzwert m besitzt, für welchen mit (3.24) für alle $z \in M$

$$(3.24') \qquad f(z) = \int e^{sz}\, dm(s).$$

1. $(m_n)_n$ ist in $BL(M)$ eine $\|.\|$-Cauchy-Folge; es ist nämlich

$$\|m_n\| \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(0)|}{s_k^k}.$$

Mit $2R/e < r < R$ und den Cauchyschen Ungleichungen

$$|f^{(k)}(0)| \leqq M_r \cdot \frac{k!}{r^k}, \quad M_r < +\infty,\ k \in \boldsymbol{N},$$

gilt für $n > 1$

$$\|m_n - m_l\| \leqq M_r \cdot \sum_{k=l+1}^{n} \frac{k!}{(k+1)^k} \left(\frac{e}{2}\right)^k.$$

Die rechte Seite ist Abschnitt einer konvergenten Reihe.

2. Für jedes t, $0 < t < R$, ist mit $T := \{z : |z| \leqq t\}$ die Folge $(\|m_n\|_T)_n$ gleichmäßig beschränkt: Es ist nämlich für alle $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|m_n\|_T \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{s_k^k} \cdot e^{s_k t}.$$

Weiterhin gilt mit $v := R \cdot e^{(t-R)/2R}$ sowohl $v < R$ als auch für alle $k \in \boldsymbol{N}$

$$\frac{e^{s_k t}}{s_k^k} \leqq e \cdot \sqrt{\frac{2\pi e R}{R-t}} \frac{v^k}{k!}. \tag{3.25}$$

Denn für jedes $k \in \boldsymbol{N}$ ist mit der Ungleichung nach Stirling

$$k! \leqq (2k\pi)^{1/2} \cdot k^k \cdot e^{1-k},$$

mit $s_k = (k+1)/R$ und mit $t < R$

$$\frac{e^{s_k t}\, k!}{s_k^k\, v^k} = \frac{e^{t(k+1)/R}\, k!}{(k+1)^k \cdot e^{k(t-R)/2R}} \leqq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot e^2 \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-k\frac{R-t}{2R}}.$$

Das Maximum von $k \mapsto k^{1/2} \cdot e^{-k(R-t)/2R}$, $k > 0$, wird für $k = R/(R-t)$ angenommen, damit ist (3.25) bewiesen.

Damit gilt gleichmäßig für alle $n \in \boldsymbol{N}$ mit $v < R$

$$\|m_n\|_T \leq e\sqrt{\frac{2\pi e R}{R-t}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} v^k.$$

Mit $f_w := \max\limits_{|z| \leq w} |f(z)|$ für $w < R$ und den Cauchy-Ungleichungen ist

$$\|m_n\|_T \leq e\sqrt{\frac{2\pi e R}{R-t}}\, f_w \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v}{w}\right)^k.$$

Somit erhalten wir für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und $R \cdot e^{(t-R)/2R} < w < R$

$$\|m_n\|_T \leq \frac{e R \sqrt{2\pi e R}}{\sqrt{R-t}\,(w-v)} \cdot f_w.$$

Da f in $\{z : |t| \leq w\}$, $w < R$, holomorph ist, sind die Normen $\|m_n\|_T$ mit festem $T = \{z : |z| \leq t\}$, $0 < t < R$, gleichmäßig beschränkt.

Nach Korollar 1 existiert also in $(BL(M), \tau_M)$ der Grenzwert m mit

$$m(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{2\pi i} \oint_{S_k} \chi_B(s) \frac{ds}{s^{k+1}}, \quad B \in \mathfrak{B}, \tag{3.26}$$

und

$$(3.26') \qquad \| m \|_{\{z:|z|\leq t\}} \leq \frac{eR\sqrt{2\pi e R}}{\sqrt{R-t}\,(w-v)} \cdot \max_{|z|\leq w} |f(z)|,$$

wobei $0 < t < v = R \cdot e^{(t-R)/2R} < w < R$. Daher ist $m \in$ $\in BL(M)$, w. z. b. w.

Bemerkung:

Ohne weitere Umstände lassen sich auch darstellende Maße m angeben, die totalstetig bezüglich $\lambda|\mathfrak{B}$ sind, so daß (3.24′) erfüllt ist. Jedoch ist dann der von t, v, w abhängige Faktor für die Abschätzung der Form (3.26′) größer als der in (3.26′) angegebene. ($\lambda|\mathfrak{B}$ bezeichne dabei das Borel-Lebesguesche Flächenmaß in $\boldsymbol{C}$.)

Im Hinblick auf Frage (b) der Einleitung interessiert natürlich eine Verallgemeinerung von Satz 8 auf allgemeinere als Kreisgebiete. Wir geben nun zwei Erweiterungen, die die Wirksamkeit der Darstellung durch Laplace-Maße unterstreichen, deren Beweise jedoch (im Gegensatz zum Beweis von Satz 8) nicht konstruktiv sind:

Satz 9

Ist das Gebiet G der Durchschnitt endlich vieler beschränkter offener Kreisscheiben, so gibt es für jede in G holomorphe Funktion f ein $m \in BL(G)$, so daß

$$(3.27) \qquad f(z) = \int e^{sz}\, dm(s) \qquad \text{für jedes } z \in G.$$

Beweis:

G besitzt die Gestalt

$$G = \bigcap\nolimits_{z=1}^{n} G_j$$

$$(3.28) \qquad \text{mit } G_j := \{z : |z-a_j| < r_j\},\ a_j \in \boldsymbol{C},\ 0 < r_j < +\infty,$$
$$j = 1, \ldots n,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Wir beweisen (3.27) durch Induktion nach n:

1. „$n = 1$“: Dann ist $G = \{z : |z - a_1| < r_1\}$. Die Funktion $z \mapsto f(z + a_1)$ ist holomorph in $M := \{z : |z| < r_1\}$ und besitzt

wegen Satz 8 eine Darstellung der Form (3.27) mit einem $m \in BL(M)$. Mit Lemma 1 ist das Maß $m_1 := \check{e}_{-a_1}(m)$ aus $BL(G)$ und es gilt für $|z| < r_1$

$$f(z + a_1) = \int e^{sz} dm(s) = \int e^{s(z + a_1)} dm_1(s).$$

2. „$n \mapsto n + 1$": Dann ist $G = G_{n+1} \cap \bigcap_{j=1}^{n} G_j$. Eine in G holomorphe Funktion f läßt sich in G zerlegen in der Form $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 in G_{n+1} und f_2 in $\bigcap_{j=1}^{n} G_j$ holomorph ist; dies folgt aus der Lösung des sogenannten „ersten Cousinschen Problems" für eine komplexe Veränderliche ([5], S. 13). Nach Induktionsvoraussetzung und 1. existieren zwei Maße $m_1 \in BL(G_{n+1})$ und $m_2 \in BL(\bigcap_{j=1}^{n} G_j)$, so daß mit $m = m_1 + m_2$ die Gleichung (3.27) in G erfüllt ist. W. z. b. w.

Satz 10

Ist G ein beschränktes konvexes Gebiet und $G^* \supset \bar{G}$ offen, so besitzt jede in G holomorphe und in G^* meromorphe Funktion f in G eine Darstellung der Form (3.27) mit einem $m \in BL(G)$.

Beweis:

f besitzt nur endlich viele Pole $z_1, \ldots z_n$ in $G^* \setminus G$. Ist h_k der zu z_k gehörende Hauptteil von f, so besitzt f die Darstellung $f = g + h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, wobei g in G^* und damit in einem Gebiet $G' \supset G$ der Gestalt (3.28) holomorph ist. Mit Satz 9 besitzt g eine Darstellung (3.27) in G. Die Hauptteile h_k können mittels eindimensionaler Laplace-Integrale längs geeigneter Geraden g_k in $\mathbf{C}$ dargestellt werden, so daß (3.27) für f erfüllt ist. ([11], S. 35). W. z. b. w.

Mit Satz 5 und Satz 9 ist, wenn G von der Gestalt (3.28) ist, der lineare Raum der in G holomorphen Funktionen algebraisch isomorph zum Quotientenraum $BL(G)/BLN(G)$.

Weiterhin lautet das Prinzip der analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionen in der Darstellung durch BL-Maße:

Korollar 4

Ist das Gebiet G von der Gestalt (3.28) und f eine in G holomorphe Funktion, die in einem Gebiet G', $G' \subseteq G$, mit einem

$m' \in BL(G')$ eine Darstellung der Form (3.27) in G' besitzt, so existiert ein Nullmaß $n \in BLN(G')$, so daß mit $m := m' + n$ in G

$$f(z) = \int e^{sz}\, dm(s).$$

Beweis:

Ist $K^0(m') \supseteq G$, so ist die Behauptung trivial. Ansonsten folgt mit der Existenz von $m \in BL(G)$ auch die Existenz von $n = m - m'$ aus Satz 9. (Ist $K^0(m')$ echt in G enthalten, so liegt n nicht in $BLN(G)$). W. z. b. w.

Bemerkung:

Bekanntlich kann eine im Nullpunkt holomorphe Funktion f, falls sie durch eine Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt gegeben ist, mit dem Borelschen Summationsverfahren in ihren (konvexen) Borel-Stern analytisch fortgesetzt werden ([3], S. 302). Die bekannte Darstellung mit einem eindimensionalen Laplace-Integral kann in die Gestalt (3.27) transformiert werden, falls für den Integranden (d. i. die sogenannte zugeordnete Funktion von f) die Darstellung von Satz 7 verwendet wird. Das resultierende Laplace-Integral konvergiert jedoch nur in einem echten konvexen Teilbereich des Holomorphiegebietes von f, auch wenn dieses eine Kreisscheibe ist ([11], S. 36).

4. Die Eindeutigkeit der Darstellung durch Laplace-Maße

Im Hinblick auf Frage (c) der Einleitung werden wir in diesem Abschnitt solche Teilmengen M und S von $\mathbf{C}$ charakterisieren, für welche $BLN(M, S)$ nur das triviale Nullmaß $m = 0$ enthält; so daß die Zuordnung

$$m \mapsto \left(z \mapsto \int_S e^{sz}\, dm(s),\quad z \in M\right),\quad m \in BL(M, S),$$

1-1-deutig ist. Unsere Ergebnisse, die Sätze 13, 14 und 15 sind in diesem Sinne Eindeutigkeitssätze für die Darstellung holomorpher Funktionen durch Laplace-Maße.

Enthält M eine Umgebung der Null, so gilt für jedes $m \in BLN(M, S)$ neben

$$\int_S e^{sz}\, dm(s) = 0 \quad \text{für alle } z \in M \tag{4.1}$$

wegen Korollar 3 auch

$$\int_S s^n\, dm(s) = 0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.2}$$

Ist S kompakt, so ist mit Lemma 6 jede Lösung des Momentenproblems (4.2) auch Lösung von (4.1) mit $M = \mathbf{C}$. Die Lösungsräume von (4.1) und (4.2) sind für kompaktes S und $M = \mathbf{C}$ also gleich.

Bei unbeschränktem S dagegen ist nicht jede Lösung von (4.2) zugleich Lösung von (4.1); denn sonst würden sich die beiden folgenden bekannten Tatsachen widersprechen:

(A) Für $S = \{s : \mathrm{Im}(s) = 0\}$ reduziert sich (4.2) auf ein Hamburgersches Momentenproblem, das nach Stieltjes von Null verschiedene Lösungen $m \in B(S)$ besitzt mit $K^0(m) = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ ([10], S. 125).

(B) Für $S = \{s : \mathrm{Im}(s) = 0\}$ hat (4.1) mit $M = \{z : |\mathrm{Re}(z)| < \beta\}$, $\beta > 0$, wegen des Eindeutigkeitssatzes der bilateralen eindimensionalen Laplace-Transformation nur die Lösung $m = 0$ ([10], S. 243).

Es bieten sich zwei Wege an, das Problem (4.1) unter Verwendung des Momentenproblems (4.2) zu lösen: Man löst das Momentenproblem (4.2) mit der Nebenbedingung (2.1) für alle $z \in M$ – oder – man transformiert (4.1) durch eine Variablensubstitution in eine Form (4.2).

Wir wollen uns in Abschnitt 4.2 ausschließlich der zweiten Methode bedienen.

Enthält die Trägermenge S eine Kreisscheibe, so gibt es wegen Beispiel 1 in $BLN(\mathbf{C}, S)$ sicher von Null verschiedene Nullmaße. Eine notwendige Bedingung dafür, daß $BLN(M, S)$ nur das triviale Nullmaß $m = 0$ enthält, ist daher (unabhängig von M): Der offene Kern von S ist leer.

Wir suchen nach hinreichenden Bedingungen für $BLN(M,S) = \{0\}$ und betrachten zu diesem Zwecke Mengen $X \subseteq \mathbf{C}$ mit

(4.3) Der offene Kern X^0 von X ist leer,

(4.4) X ist kompakt,

und

(4.5) Das Komplement von X in $\mathbf{C}$ ist zusammenhängend,

bzw.

(4.6) Das Komplement von X in $\overline{\mathbf{C}}$ zerfällt in zwei Komponenten, wovon die eine den Punkt ∞ und die andere den Nullpunkt enthält.

Solche Mengen sind charakterisiert durch die folgenden beiden Sätze:

Satz 11 (Mergelyan, 1951)

Erfüllt eine Menge X, $X \subset \mathbf{C}$, die Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.5), so kann jede stetige Funktion $f: X \to \mathbf{C}$ auf X gleichmäßig durch Polynome $p: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ approximiert werden.

Beweis: [9], S. 18 und [9a], S. 74.

Satz 12

Erfüllt eine Menge X, $X \subset \mathbf{C}$, die Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.6), so kann jede stetige Funktion $f: X \to \mathbf{C}$ auf X gleichmäßig durch rationale Funktionen $r: \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ approximiert werden, die höchstens einen Pol und zwar im Nullpunkt besitzen.

Beweis: [9a], S. 78.

4.1 Laplace-Nullmaße mit beschränktem Träger

Ist die Trägermenge S, $S \subset \mathbf{C}$, beschränkt, so erfüllt S die Bedingung (4.4). Damit gilt als 1. Eindeutigkeitssatz für die Zuordnung (1.2):

Satz 13

Der Raum $BLN(M, S)$ enthält kein von Null verschiedenes Maß, wenn

(1) M eine Folge von Punkten enthält, die sich in $\boldsymbol{C}$ häuft, und

(2) die Menge S die Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.5) erfüllt.

Beweis:

Ist $m \in BLN(M, S)$, so ist wegen (4.4) und Lemma 6 die Laplace-Transformierte von m eine ganze Funktion und mit (1) und Korollar 3 folgt (4.2). Das Maß m ist wegen (4.4) beschränkt, daher gilt mit Satz 11 für jede auf S stetige Funktion $g : \int g(s)\, dm(s) = 0$. Für jedes $a \in \boldsymbol{C}$ und $r > 0$ konvergiert die Folge der auf $\boldsymbol{C}$ stetigen Funktionen

$$s \mapsto g_n(s) := \begin{cases} 1 & , 0 \leqq |s-a| < r \\ 1 - n \cdot (|s-a| - r), & r \leqq |s-a| < r + \frac{1}{n}, \quad s \in \boldsymbol{C},\ n \in \boldsymbol{N}, \\ 0 & , r + \frac{1}{n} \leqq |s-a| < +\infty \end{cases}$$

auf $\boldsymbol{C}$ punktweise gegen die charakteristische Funktion der Kreisscheibe $K_{a,r} := \{s : 0 \leqq |s-a| \leqq r\}$. Mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz ist aus diesem Grunde für jedes $a \in \boldsymbol{C}$ und jedes $r > 0$

$$m(K_{a,r}) = \lim_n \int g_n(s)\, dm(s) = 0.$$

Das Maß m ist σ-additiv und beschränkt und damit regulär, daher folgt $m(B) = 0$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$. W. z. b. w.

Wie die Bemerkung am Ende von Abschnitt 4.2 zeigt, ist die Bedingung (4.5) im Falle (4.4) genauso wie (4.3) notwendig.

4.2 Laplace-Nullmaße mit unbeschränktem Träger

Bei unbeschränktem Träger S, $S \subseteq \boldsymbol{C}$, läßt sich Satz 11 und Satz 12 nicht mehr direkt auf das Momentenproblem (4.2) anwenden; denn dann ist die Voraussetzung (4.4) in diesen Sätzen verletzt.

Wir betrachten daher statt (4.2) die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (4.1) für Laplacesche Nullmaße in $BL(M)$, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, und transformieren sie durch Einführung der neuen Integrationsvariablen

$$t := e_z(s) := e^{sz}, \quad s \in S,\ z \neq 0. \tag{4.7}$$

Der Umstand, daß die Abbildung $s \mapsto t$, $s \in \boldsymbol{C}$, die Periode $2\pi i/z$ besitzt, gibt zu folgender Überlegung Anlaß:

Offensichtlich bilden für $z \neq 0$ die $2\pi i/z$-periodischen Mengen $B \in \mathfrak{B}$ (das sind Mengen aus $\mathfrak{B}$, die mit einem z' auch $z' + k \cdot 2\pi i/z$ für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ enthalten) für sich allein einen σ-Mengenkörper $\mathfrak{B}_z \subset \mathfrak{B}$, und $\mathfrak{B}_z$ ist isomorph zu $\mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$:

Zerlegen wir nämlich jedes $B \in \mathfrak{B}_z$ in der Form

$$B = B^* \cup B_* \text{ mit } B^* \cap B_* = \emptyset \text{ und}$$
$$B^* \subset \{s : -\pi < \operatorname{Im}(sz) \leqq \pi\},$$

dann sind die Verschiebungen von B^* um Vielfache der Periode $2\pi i/z$ disjunkt und ihre Vereinigung ergibt gerade B. Für $z \neq 0$ wird der Streifen $\{s : -\pi < \operatorname{Im}(sz) \leqq \pi\}$ vermöge e_z bijektiv und gebietstreu auf $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Daher ist $e_z(B) = e_z(B^*)$ für jedes $B \in \mathfrak{B}_z$ borelsch ([4], S. 182) und die Abbildung $B \mapsto e_z(B^*)$ von $\mathfrak{B}_z$ auf $\mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ ist bijektiv. Zu einer Menge $D \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ gehört ja vermöge $e_z^{[-1]}$ die $2\pi i/z$-periodische borelsche Menge $e_z^{[-1]}(D)$.

Für jedes $m \in B_0(\boldsymbol{C})$ und jedes $z \neq 0$ ist durch

$$m_z(D) := m(e_z^{[-1]}(D)),\ D \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\}), \tag{4.8}$$

ein Maß $m_z \in B_0(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ erklärt und es gilt für jedes $D \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$

$$m_z(D) = m(D_z^*) + m(D_z), \tag{4.9}$$

wobei $D_z^* := (e_z^{[-1]}(D))^*$ und $D_z := (e_z^{[-1]}(D))_*$.

Lemma 7

Ist m ein beschränktes Borelsches Maß und verschwinden für eine Nullfolge $(z_\nu)_\nu$ mit $z_\nu \neq 0$ für alle ν die nach (4.8) zugeordneten Maße m_{z_ν} identisch für alle $\nu \in \boldsymbol{N}$, so ist auch $m = 0$.

Beweis:

Für $\nu \to \infty$ strebt $|z_\nu|$ nach 0, daher gibt es für jedes $R < +\infty$ ein $\nu_R \in \boldsymbol{N}$, so daß für alle $\nu \geqq \nu_R$ der Streifen $S_\nu := \{s : -\pi < \operatorname{Im}(s z_\nu) \leqq \pi\}$ die Kreisscheibe $\{s : |s| \leqq R\}$ enthält. Für jedes ν ist $z_\nu \neq 0$, daher kann für alle $\nu \geqq \nu_R$ jedes $B \in \mathfrak{B}(\{s : |s| \leqq R\})$ in der Form $B = (e_{z_\nu}^{[-1]}(D_\nu))^*$ mit einem $D_\nu \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ dargestellt werden.

Für alle $\nu \in \boldsymbol{N}$ ist $m_{z_\nu} = 0$, daher gilt mit (4.9) für jede Borel-Menge $B \in \mathfrak{B}(\{s : |s| \leqq R\})$ und $\nu \geqq \nu_R$

$$m(B) + m(B_{z_\nu}) = 0,$$

wobei $B_{z_\nu} := (e_{z_\nu}^{[-1]}(e_{z_\nu}(B))_*$. Das Maß m ist borelsch und beschränkt, daher ist m regulär und es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon < +\infty$, so daß

$$|m|(\{s : |s| > R_\varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Für alle z_ν mit $\nu \geqq \nu_{R_\varepsilon}$ (d. h. mit $|z_\nu| \leqq \pi/R_\varepsilon$) liegt B_{z_ν} ganz in $\{s : |s| > R_\varepsilon\}$; daher gilt für alle $\nu \geqq \nu_{R_\varepsilon}$ $|m|(B_{z_\nu}) < \varepsilon$. Für alle $\nu > \max(\nu_R, \nu_{R_\varepsilon})$ ist somit

$$|m(B)| = |m(B_{z_\nu})| \leqq |m|(B_{z_\nu}) < \varepsilon.$$

Für jedes beschränkte $B \in \mathfrak{B}$ ist daher $m(B) = 0$. Da m σ-additiv, ist $m = 0$; w. z. b. w.

Damit folgt der 2. Eindeutigkeitssatz für die Zuordnung (1.2)

Satz 14

Der Raum $BLN(M, S)$ enthält kein von Null verschiedenes Maß, wenn M, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, zwei verschiedene Punkte a und $a + z'$ enthält, so daß

(1) mit a und $a + z'$ der Strahl $\{r \cdot z' + a : r \geqq 0\}$ in M liegt,

und

(2) das Bild $e_{z'}(S)$ der Trägermenge S, $S \subset \boldsymbol{C}$, in einer Menge $T_{z'}$ enthalten ist, die den Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.5) genügt.

Beweis:

Es sei $m \in BLN(M, S)$. Für $\beta := 1/n$, $n \in \boldsymbol{N}$, setzen wir

$$T_\beta := \{t = e^{s\beta z'} : s \in S\}$$

als Teilmenge der komplexen t-Ebene. $T_1 = e_{z'}(S)$ liegt wegen (2) in der Menge $T_{z'}$ mit den Eigenschaften (4.3), (4.4) und (4.5) und T_β ist Teilmenge von

$$(T_1)^\beta := \{t : t^n \in T_1\}.$$

Durch die Abbildung $t \mapsto t^\beta := \{t' : t'^n = t\}$ wird jedem $t \in T_1$ eine höchstens n-elementige Menge der t'-Ebene zugeordnet. Die eindeutigen Zweige von $t \mapsto t^\beta$ sind für $t \neq 0$ holomorph, daher erfüllt mit $\overline{T_1}$ auch $\overline{(T_1)^\beta}$ die Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.5). Da T_β in $(T_1)^\beta$ enthalten ist, gilt auch für $\overline{T_\beta}$ (4.3), (4.4) und (4.5).

Mit $z = z'/n$, $n \in \boldsymbol{N}$, ist $a + z \in M$ und mit Lemma 1 ist

$$\int_S e^{s(z+a)}\, dm(s) = \int_S e^{sz}\, d\bar{e}_a(m)(s).$$

Für beliebiges $k \in \boldsymbol{N}$ ist $e^{sz\cdot k} = (e^{sz})^k$. Daher gilt mit $t := e_z(s)$ für $s \in S$ und dem nach (4.8) $\bar{e}_a(m)$ zugeordneten Maß m_z:

$$\int_S e^{szk}\, d\bar{e}_a(m)(s) = \int_{\overline{T_\beta}} t^k\, dm_z(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wegen (1) ist für alle $k \geqq 0$ $a + zk \in M$, daher gilt für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_{\overline{T_\beta}} t^k\, dm_z(t) = 0.$$

Da $\overline{T_\beta}$ die Bedingungen von Satz 11 erfüllt, folgt analog zum Beweis von Satz 13 für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ $m_{z'/n} = 0$. $M - a$ enthält den Nullpunkt, daher ist $\bar{e}_a(m)$ beschränkt; mit Lemma 7 folgt daher $\bar{e}_a(m) = 0$. Wegen Lemma 1 ist schließlich $m = 0$,

w. z. b. w.

Bemerkung:

Satz 14 umfaßt die bekannten Eindeutigkeitssätze für die eindimensionale Laplace-Transformation, die verallgemeinerten Dirichlet-Reihen und die Fourier-Reihen im Falle der absoluten Konvergenz.

Der 3. Eindeutigkeitssatz für die Zuordnung (1.2) lautet:

Satz 15

Der Raum $BLN(M, S)$ enthält kein von Null verschiedenes Maß, wenn M, $M \subseteq \boldsymbol{C}$, zwei verschiedene Punkte a und $a + z'$ enthält, so daß

(1) die Gerade $\{z = a + r \cdot z' : r \in \boldsymbol{R}\}$ in M liegt, und

(2) das Bild $e_{z'}(S)$ der Trägermenge S, $S \subset \boldsymbol{C}$, in einer Menge $T_{z'}$ enthalten ist, die den Bedingungen (4.3), (4.4) und (4.6) genügt.

Beweis:

Es sei wieder $m \in BLN(M, S)$. Wie im Beweis von Satz 14 gilt mit $t = e_{z'}(S)$ und $m_{z'}$ nach (4.8) wegen (1) für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\int\limits_S e^{s z' \cdot k}\, d\bar{e}_a(m)(s) = \int\limits_{\overline{T}_{z'}} t^k\, dm_{z'}(t) = 0.$$

Der lineare Raum der Funktionen, der durch die Funktionenfamilie $\{t \mapsto t^n,\ t \in \boldsymbol{C} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ erzeugt wird, ist wegen (2) und Satz 12 in der gleichmäßigen Norm dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $\overline{T}_{z'}$. Mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz folgt analog zum Beweis von Satz 13 $m_{z'} = 0$.

Wie im Beweis von Satz 14 gezeigt wurde, besitzt mit $e_{z'}(S)$ auch $e_z(S)$ mit $z = z' \cdot 1/n$, $n \in \boldsymbol{N}$, die Eigenschaft (2). (Die Bedingung (4.6) ist dabei genauso wie (4.5) zu behandeln.) Da $\bar{e}_a(m)$ beschränkt ist, folgt mit Lemma 7 analog zum Beweis von Satz 14 $m = 0$,

w. z. b. w.

Bemerkung:

Satz 15 umfaßt die Eindeutigkeitssätze für die Fourier- und die bilaterale eindimensionale Laplace-Transformation im Falle der absoluten Konvergenz. Gegenüber den bekannten Beweisen ist der hier zitierte Beweis unabhängig von den Umkehrformeln dieser Transformationen.

Liegen $t = 0$ und $t = \infty$ gemeinsam in einem der beiden Gebiete, in die $\overline{\boldsymbol{C}}$ durch T_z, zerlegt wird, so können von Null verschiedene Maße in $BLN(M, S)$ auftreten, wie bereits Beispiel 1 zeigt.

Liegt $t = 0$ auf dem Rand dieser beiden Gebiete oder zerlegt T_z, die geschlossene Ebene $\overline{\boldsymbol{C}}$ in mehr als zwei Gebiete, so existieren ebenfalls in $BLN(M, S)$ nichttriviale Maße ([11], S. 47).

Bemerkung zur Darstellung von Laplace-Nullmaßen:

Ist $S \subset \boldsymbol{C}$ der Rand einer kompakten Menge X mit Eigenschaft (4.5), so ist i. allg. zwar $BLN(\boldsymbol{C}, S) \neq \{0\}$; jedoch kann in diesem Fall $BLN(\boldsymbol{C}, S)$ als Teilmenge von $B_0(S)$ vollständig charakterisiert werden: $BLN(\boldsymbol{C}, S)$ ist dann nämlich in $B_0(S)$ das orthogonale Komplement der Dirichlet-Algebra aller stetigen Funktionen, die sich auf S gleichmäßig durch Polynome approximieren lassen. Daher bestimmt die in [9], S. 20, angegebene Darstellung gerade die Maße $m \in BLN(\boldsymbol{C}, S)$.

Ist $S = \{s : |s| = 1\}$, so sind alle $m \in BLN(\boldsymbol{C}, S)$ totalstetig bezüglich des Bogenlängenmaßes auf S. Dies besagt bereits der Satz von F. u. M. Riesz ([6], S. 209).

Literaturnachweis

[1] Aumann, G., Bemerkungen über normale Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, I, II; Bay. Akad. Wiss. Math. Kl. Sitzungsberichte (1964).

[2] Bonnesen, T. und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Erg. d. Math. Bd. 3, Berlin (1934).

[3] Dienes, P., The Taylor Series, Oxford (1931).

[4] Dunford, N. and J. Schwartz, Linear Operators I, New York (1958).

[5] Hörmander, L., An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Princeton (1966).

[6] Nevanlinna, R., Eindeutige analytische Funktionen, Berlin (1953)

[7] Robertson, A. und W. Robertson, Topologische Vektorräume, BI Taschenbücher Bd. 164, Mannheim (1967).

[8] Völker, D. und G. Doetsch, Die zweidimensionale Laplace-Transformation, Basel (1950).

[9] Wermer, J., Seminar über Funktionen-Algebren, Springer-Lecture-Notes, 1, Berlin (1964)

[9a] Wermer, J., Banach Algebras and Analytic Functions, Advances in Math., 1, New York and London (1961).

[10] Widder, D., The Laplace Transform, Princeton (1946).

[11] Vachenauer, P., Laplace-Maße in der komplexen Zahlenebene, Diss. TH München (1968).