BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über besondere Singularitäten in den Differentialgleichungen des Dreikörperproblems*

Von Hans Seybold in Freising

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 7. Juli 1967

Übersicht

Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis. Die Zählung der Formeln beginnt in jedem Abschnitt neu. Bei Hinweisen auf Formeln im selben Abschnitt ist die Nummer des Abschnitts weggelassen.

---

* Von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München am 11. Januar 1967 angenommene Dissertation. Tag der Promotion: 9. Mai 1967.

I. Einführung

Wir betrachten im Raum die Bewegung von 3 Massenpunkten P_1, P_2, P_3 mit den Massen m_1, m_2, m_3, die sich gegenseitig entsprechend dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Wenn wir die Punkte auf ein festes räumliches kartesisches Koordinatensystem beziehen und ihre Ortsvektoren in diesem System $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ nennen, ferner mit $(\ldots)^{\cdot}_t$ die Ableitung nach der Zeit t bezeichnen und ein Maßsystem verwenden, in dem die Gravitationskonstante den Wert 1 hat, dann lauten die Differentialgleichungen für diese Bewegung, also die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\ddot{\vec{x}}_1 &= \frac{m_2(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3} + \frac{m_3(\vec{x}_3-\vec{x}_1)}{|\vec{x}_3-\vec{x}_1|^3}, \\
\ddot{\vec{x}}_2 &= \frac{m_3(\vec{x}_3-\vec{x}_2)}{|\vec{x}_3-\vec{x}_2|^3} + \frac{m_1(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}, \\
\ddot{\vec{x}}_3 &= \frac{m_1(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_3|^3} + \frac{m_2(\vec{x}_2-\vec{x}_3)}{|\vec{x}_2-\vec{x}_3|^3}.
\end{aligned}
$$

Wir geben für einen bestimmten reellen Zeitpunkt $t = t_0$ irgendwelche endlichen reellen Anfangswerte $\vec{x}_1(t_0)$, $\vec{x}_2(t_0)$, $\vec{x}_3(t_0)$ der Ortsvektoren vor, für die keiner der Abstände der Punkte P_1, P_2, P_3 verschwindet, und dazu beliebige endliche reelle Anfangswerte $\dot{\vec{x}}_1(t_0)$, $\dot{\vec{x}}_2(t_0)$, $\dot{\vec{x}}_3(t_0)$ der Geschwindigkeiten. Die durch diese Anfangswerte bestimmten Lösungen von (1) sind dann in einer gewissen Umgebung von $t = t_0$ reguläre Funktionen von t. Durch analytische Fortsetzung können wir den ursprünglichen Definitionsbereich erweitern und erhalten so für die Koordinaten der Massenpunkte in einem gewissen Bereich analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen t. Ihre im Endlichen gelegenen Singularitäten ergeben sich durch das Verschwinden mindestens eines der Abstände der Massenpunkte P_1, P_2, P_3.

Da die allgemeine Lösung von (1) nicht angegeben werden kann – vergl. [12] § 5 –, haben als erste T. Levi-Cività [7], G. Bisconcini [4] und K. F. Sundman [13] singuläre Stellen und die dafür gültigen Reihenentwicklungen dieser Lösung untersucht. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Untersuchungen, die durch T. Uno [15], D. Belorizky [1], [2], [3] und andere fortgeführt wurden, zu einem gewissen Abschluß zu bringen.

Nach einem kurzen Überblick über die bekannten Arten von Stößen in Abschnitt II bestimmen wir in III asymptotische Lösungen einer Normalform eines speziellen Differentialgleichungssystems, auf die sich die Bewegungsgleichungen (1) transformieren lassen. Dabei wird eine neue Ableitung von C. L. Siegel [11] für ein Ergebnis von J. Horn [6] etwas verallgemeinert.

In IV betrachten wir den reellen Zweierstoß zusammen mit seinem reellen und seinem komplexen Ausartungsfall, dem reellen Dreierstoß und dem „gemischten Stoß" (vergl. II). Wir erhalten mit den Ergebnissen von III unter gewissen Voraussetzungen auch bei Zulassung komplexer Koordinaten und Zeiten dieselben Resultate, die K. F. Sundman [13], [14] und C. L. Siegel [11] bei Beschränkung auf reelle Veränderliche für den Zweier- und den Dreierstoß fanden. Im Fall des gemischten Stoßes wird eine Behauptung von D. Belorizky [3] bestätigt, deren Beweis noch fehlte.

In V untersuchen wir einen Sonderfall des reellen Dreierstoßes, der im Komplexen auftritt, wenn man bestimmte in IV vorausgesetzte Bedingungen durch andere ersetzt. Dabei zeigt sich, daß die Differentialgleichungen (1) auch Reihenentwicklungen nach $\ln t$ und nur irrationalen Potenzen von t als Lösungen besitzen.

Abschnitt VI bringt schließlich ein Beispiel von J. Lense zum „Dreierstoß 2. Art" (vergl. II), bei dem reelle Anfangsbedingungen zu diesem komplexen Stoß führen. Mit diesem Beispiel werden Ergebnisse von P. Sémirot [10] und H. Selder [9] bestätigt.

II. Stöße erster und zweiter Art

Im Komplexen folgt aus $|\vec{x} - \vec{y}| = 0$ nicht notwendig $\vec{x} = \vec{y}$ wie im Reellen. Daher kann der Abstand zweier Punkte Null sein, ohne daß die beiden Punkte zusammenfallen.

Wir wollen mit H. Selder [9] das Zusammentreffen von Massenpunkten in einem Raumpunkt als „*Stoß erster Art*" bezeichnen, das Verschwinden des Abstandes zweier Punkte, die sich nicht am gleichen Ort befinden, als „*Stoß zweiter Art*". Stöße zweiter Art sind also nur im Komplexen möglich. Stöße erster und zweiter Art führen beim Dreikörperproblem zu Singularitäten der Lösungen, weil dabei mindestens zwei der rechten Seiten von (I. 1) unstetig werden.

Eine Transformation der Gestalt $t - t_0 \Rightarrow t$ ändert die Gleichungen (I. 1) nicht. Wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Zeitpunkt für das Auftreten einer bestimmten zu untersuchenden Singularität immer $t = 0$ voraussetzen.

Im Reellen gibt es beim Dreikörperproblem nur die beiden Fälle des Zweier- und des Dreierstoßes erster Art. Sie wurden unter Beschränkung auf reelle Zeit und reelle Koordinaten von K. F. Sundman und C. L. Siegel vollständig behandelt: [11], [12], [13], [14].

Im Komplexen erhält man bei geeigneter Numerierung der drei Massenpunkte noch die folgenden weiteren Möglichkeiten:

Einfacher Zweierstoß zweiter Art: $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ verschwindet trotz $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, während $|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|$ und $|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|$ von Null verschieden sind. Die Punkte P_1, P_2 liegen also auf einer isotropen Geraden, während P_3 außerhalb dieser und der beiden anderen durch P_1 und P_2 gehenden isotropen Geraden der Ebene P_1, P_2, P_3 liegt.

Doppelter Zweierstoß zweiter Art: Die Abstände $|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|$ und $|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|$ verschwinden trotz $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_3 \neq \vec{x}_2$, während $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ von Null verschieden bleibt. Die Punkte P_1, P_2 liegen dabei je auf einer der beiden durch P_3 laufenden isotropen Geraden der Ebene P_1, P_2, P_3.

Durch Gleichsetzen von $\vec{x}_1(0)$ und $\vec{x}_2(0)$ läßt sich der einfache Zweierstoß zweiter Art in den reellen Zweierstoß erster Art überführen. Dagegen ist ein doppelter Zweierstoß nur im Komplexen möglich, d. h. ein doppelter Zweierstoß ist immer von zweiter Art.

Die beiden Fälle des einfachen und des doppelten Zweierstoßes zweiter Art wurden von T. Uno untersucht [15]. Er erhielt Reihenentwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte nach Potenzen von $t^{1/3}$ bzw. $t^{1/6}$.

Dreierstoß zweiter Art: $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$, $|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|$, $|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|$ verschwinden gleichzeitig trotz $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \neq \vec{x}_3 \neq \vec{x}_1$. P_1, P_2, P_3 liegen also an 3 verschiedenen Stellen einer isotropen Geraden.

Für diesen Fall fanden D. Belorizky [1], [2] und H. Selder [9] Potenzreihenentwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte nach $t^{1/3}$ und $t^{1/3} \cdot \ln t$, unter gewissen Bedingungen nach $t^{1/3}$ allein, vergl. auch [10].

Gemischter Stoß: Die drei Abstände $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$, $|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|$, $|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|$ verschwinden gleichzeitig, aber jetzt ist $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 \neq \vec{x}_3$. Wir haben zwischen P_1, P_2 einen Stoß erster Art und gleichzeitig zwischen P_1, P_3 und P_2, P_3 je einen Stoß zweiter Art. P_1, P_2, P_3 liegen auf einer isotropen Geraden, P_1, P_2 fallen zusammen.

Obwohl der Dreierstoß zweiter Art in den gemischten Stoß übergeht, wenn man $\vec{x}_1(0) = \vec{x}_2(0)$ setzt, lassen sich die Dreierstoßlösungen von Belorizky-Selder nicht zu Lösungen des gemischten Stoßes spezialisieren.

Im Abschnitt IV werden wir den gemischten Stoß ausführlich behandeln. Dabei werden die Differentialgleichungen (I. 1) auf eine Normalform transformiert, die uns einen Überblick über die Gestalt sämtlicher in Frage kommender Lösungen ermöglicht. Diese Normalform wollen wir daher zunächst untersuchen.

III. Asymptotische Lösungen eines Differentialgleichungssystems

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{ds} = \lambda_i (x_i + e_i x_{i-1}) + P_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Die P_i seien in einer gewissen Umgebung von $x_1 = \ldots = x_n = 0$ konvergente Potenzreihen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ohne konstante und lineare Glieder. Die λ_i und $\lambda_i e_i$ seien komplexe Konstanten in der Anordnung der Jordanschen Normalform einer Matrix, d. h. für $\lambda_i = \lambda_{i+k}$ $(1 \leqq i + k \leqq n)$ hat man stets auch $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+k}$, für $i = 1$ und für alle $i = 2, \ldots, n$ mit $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$ ist $e_i = 0$, für $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$ kann

$e_i = 1$ oder $= 0$ sein. Außerdem seien die Variablen x_i so numeriert, daß für die reellen Teile ϱ_i der λ_i gilt

$$(2) \qquad 0 > \varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \ldots \geqq \varrho_p; \quad \varrho_i \geqq 0 \text{ für } i = p+1, \ldots, n.$$

Wir suchen Lösungen des Systems (1) mit der Eigenschaft

$$(3) \qquad x_i \to 0 \text{ für } Re\, s \to \infty.$$

Diese Aufgabe haben J. Horn [6][1], P. Bohl [5] und mit der Einschränkung $\varrho_i \neq 0$ C. L. Siegel [11] behandelt. Im folgenden werden wir im wesentlichen auf dem von Siegel angegebenen Weg, aber unter Zulassung von $\varrho_i = 0$ für einige oder alle i mit $p < i \leqq n$ die Lösungen von (1) mit der Eigenschaft (3) bestimmen. Die Konvergenz der in Frage kommenden Reihen für genügend große $Re\, s$ (vergl. Fußnote 1) hat J. Horn nachgewiesen. Wir können uns daher auf die formalen Reihenentwicklungen beschränken.

Wegen

$$|P_i| \ll |x_i| \text{ für } 0 < |x_i| = \varepsilon \ll 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

betrachten wir zunächst die Lösungen des homogenen Systems. Die ersten p von ihnen streben gegen Null für $Re\, s \to \infty$. Die übrigen sind entweder konstant oder wachsen mit $Re\, s$ über alle Schranken, sind also wegen (3) unbrauchbar, wenn sie nicht identisch verschwinden. Wir versuchen deshalb, (1) durch Potenzreihen in den ersten p Lösungen des homogenen Systems zu erfüllen.

Dazu führen wir neue Veränderliche ein (vergl. [11]) durch

$$(4) \qquad x_i = y_i + X_i(x_1, \ldots, x_p) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$(5) \qquad X_i = \sum_{g_1 + \cdots + g_p > 1} a_{i, g_1, \ldots, g_p}\, x_1^{g_1} \ldots x_p^{g_p} \; (g_i \text{ nichtnegativ ganz})$$

mit später zu bestimmenden Potenzreihen X_i ohne konstante und lineare Glieder in den ersten p Variablen $x_1, \ldots, x_p$ allein und setzen wegen (3)

[1] J. Horn untersucht Systeme der Gestalt (22). Diese werden durch (21) und eine lineare Transformation auf die Gestalt (1) gebracht.

(6) $$y_i = 0 \text{ für } i > p$$

d. h. $$x_i = X_i(x_1, \ldots, x_p) \text{ für } i > p.$$

Weiter setzen wir

(7) $$x_i = y_i + Y_i(y_1, \ldots, y_p) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

(8) $$Y_i = \sum_{g_1 + \cdots + g_p > 1} b_{i, g_1, \ldots, g_p} y_1^{g_1} \ldots y_p^{g_p} \quad (g_i \text{ nichtnegativ ganz})$$

mit Potenzreihen Y_i ohne konstante und lineare Glieder. Wir erhalten aus (4), (5), (6), (7), (8)

(9) $$y_i + \sum_{g_1 + \ldots + g_p > 1} b_{i, g_1, \ldots, g_p} y_1^{g_1} \ldots y_p^{g_p} =$$
$$= y_i + \sum_{g_1 + \ldots + g_p > 1} a_{i, g_1, \ldots, g_p} (y_1 + Y_1)^{g_1} \ldots (y_p + Y_p)^{g_p}.$$

Durch Koeffizientenvergleich kann man damit die $b_{i, g_1, \ldots, g_p}$ eindeutig aus den Koeffizienten der X_i berechnen, da die Y_i mit Gliedern mindestens zweiten Grades beginnen.

Differentiation von (4) liefert

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{dy_i}{ds} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Mit (1), (4) und (7) wird daraus

$$\lambda_i(x_i + e_i x_{i-1}) + P_i = \lambda_i(y_i + e_i y_{i-1}) + \lambda_i(X_i + e_i X_{i-1}) + P_i =$$
$$= \frac{dy_i}{ds} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial X_j} [\lambda_j(y_j + e_j y_{j-1}) + \lambda_j(Y_j + e_j Y_{j-1}) + P_j]$$

oder

(10) $$\frac{dy_i}{ds} = \lambda_i(y_i + e_i y_{i-1}) + R_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit

(11) $$R_i = \lambda_i(X_i + e_i X_{i-1}) + P_i -$$
$$- \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} [\lambda_j(y_j + e_j y_{j-1}) + \lambda_j(Y_j + e_j Y_{j-1}) + P_j].$$

Die R_i sind Potenzreihen ohne konstante und lineare Glieder in $y_1, \ldots, y_p$, wenn man die $x_1, \ldots, x_n$ nach (6), (7), (8) durch die neuen Veränderlichen ersetzt:

$$
\begin{aligned}
& X_i(x_1, \ldots, x_p) = X_i((y_1 + Y_1), \ldots, (y_p + Y_p)), \\
(12) \quad & \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}((y_1 + Y_1), \ldots, (y_p + Y_p)), \\
& P_i(x_1, \ldots, x_n) = \\
& \quad = P_i((y_1 + Y_1), \ldots, (y_p + Y_p), X_{p+1}[(y_1 + Y_1), \ldots, \\
& \qquad\qquad (y_p + Y_p)], \ldots).
\end{aligned}
$$

Nun wollen wir die $a_{i,g_1,\ldots,g_p}$ in (5) so bestimmen, daß möglichst viele Glieder der Potenzreihenentwicklungen der R_i verschwinden. Für den Koeffizienten $r_{i,g_1,\ldots,g_p}$ des Potenzproduktes $y_1^{g_1} \ldots y_p^{g_p}$ von R_i erhalten wir wegen (12) aus (11)

$$
\begin{aligned}
(13) \quad r_{i,g_1,\ldots,g_p} &= \lambda_i (a_{i,g_1,\ldots,g_p} + e_i\, a_{i-1,g_1,\ldots,g_p}) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j\, a_{i,g_1,\ldots,g_p} - \\
&\quad - \sum_{j=2}^{p} e_j \lambda_j (g_j + 1)\, a_{i,g_1,g_2,\ldots,g_{j-1}-1,g_j+1,\ldots,g_p} +^{1} \\
&\quad + q_{i,g_1,\ldots,g_p} = \\
&= \left(\lambda_i - \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j\right) a_{i,g_1,\ldots,g_p} - \\
&\quad - \sum_{j=2}^{p} e_j \lambda_j (g_j + 1)\, a_{i,g_1,g_2,\ldots,g_{j-1}-1,g_j+1,\ldots,g_p} +^{1} \\
&\quad + \lambda_i e_i\, a_{i-1,g_1,\ldots,g_p} + q_{i,g_1,\ldots,g_p} \qquad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Dabei sind in $q_{i,g_1,\ldots,g_p}$ die Koeffizienten aus P_i und solchen Potenzprodukten zusammengefaßt, die sich durch Produktbildung aus Gliedern mit einem Grad $< g = g_1 + \cdots + g_p$ ergeben. Ordnen wir die $a_{\ldots}$ und $r_{\ldots}$ lexikographisch nach

[1] An der Stelle $j-1$ steht $g_{j-1} - 1$, an der Stelle j steht $g_j + 1$, die übrigen Indizes sind die gleichen wie bei $r_{i,g_1,\ldots,g_p}$.

$g, g_1, \ldots, g_p, i$ $(i = 1, \ldots, n;\ g_1, \ldots, g_p \geqq 0;\ g > 1)$, so erscheinen $a_{i, g_1, \ldots, g_p}$ und $r_{i, g_1, \ldots, g_p}$ nach $a_{i-1, g_1, \ldots, g_p}$ und nach allen $a_{i, g_1, \ldots, g_{j-1}-1, g_j+1, \ldots, g_p}$ $(j = 2, \ldots, p)$, ebenso nach allen $a_{\ldots}$, die in $q_{i, g_1, \ldots g_p}$ enthalten sind.

Entsprechend unserem Plan können wir

$$r_{i, g_1, \ldots, g_p} = 0, \tag{14}$$

setzen, wenn

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j \neq 0 \tag{15}$$

erfüllt ist, und erhalten damit eine Gleichung, aus der $a_{i, g_1, \ldots, g_p}$ eindeutig aus „früheren" $a_{\ldots\ldots}$ und aus $q_{i, g_1, \ldots, g_p}$ berechnet werden kann. Gilt dagegen

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j = 0, \tag{16}$$

so tritt $a_{i, g_1, \ldots, g_p}$ in (13) nicht auf und $r_{i, g_1, \ldots, g_p}$ ist festgelegt.

Für die „späteren" Gleichungen (13) setzen wir in diesem Fall

$$a_{i, g_1, \ldots, g_p} = 0. \tag{17}$$

Wir haben also:

Für $g = 2;\ g_1 = \ldots = g_{p-1} = 0,\ g_p = 2$:

$$i = 1: r_{1,0,\ldots,0,2} = (\lambda_1 - 2\lambda_p)\, a_{1,0,\ldots,0,2} + q_{1,0,\ldots,0,2}$$
$$i = 2: r_{2,0,\ldots,0,2} = (\lambda_2 - 2\lambda_p)\, a_{2,0,\ldots,0,2} + \lambda_2 e_2 a_{1,0,\ldots,0,2} + q_{2,0,\ldots,0,2}$$

. . . .

. . . .

$g_1 = \ldots = g_{p-2} = 0,\ g_{p-1} = g_p = 1$:

$$i = 1: r_{1,0,\ldots,0,1,1} = (\lambda_1 - \lambda_{p-1} - \lambda_p)\, a_{1,0,\ldots,0,1,1} - e_p \lambda_p 2 a_{1,0,\ldots,0,2} + q_{1,0,\ldots,0,1,1}$$
$$i = 2: r_{2,0,\ldots,0,1,1} = (\lambda_2 - \lambda_{p-1} - \lambda_p)\, a_{2,0,\ldots,0,1,1} - e_p \lambda_p 2 a_{2,0,\ldots,0,2} + \lambda_2 e_2 a_{1,0,\ldots,0,1,1} + q_{2,0,\ldots,0,1,1}$$

. . . .

. . . .

In jeder Gleichung tritt genau eine neue Unbekannte auf. Die $a_{\dots}$, die $r_{\dots}$ und dann aus (9) die $b_{\dots}$ sind also der Reihe nach eindeutig berechenbar.

Wegen (2) gilt (15) für alle $i > p$. Also ist $R_{p+1} \equiv \dots \equiv R_n \equiv 0$, und die Gleichungen (10) sind verträglich mit (6), d. h. $y_{p+1} = \dots = y_n = 0$, da auch $e_{p+1} = 0$.

Weiter zeigt (10), daß (3) wegen (2) nur mit (6) erfüllt werden kann. (6) ist also notwendige Bedingung für die gesuchten Lösungen von (1).

Für alle genügend großen $g = g_1 + \cdots + g_p$ ist (15) ebenfalls erfüllt. Wir erhalten also nur endlich viele Lösungssysteme $g_1, \dots, g_p$ von (16). Für diese gilt wegen $g > 1$ noch

$$g_i = g_{i+1} = \dots = g_p = 0,$$

da nach (2) schon jedes einzelne λ_j für $j \geqq i$ einen Realteil ϱ_j mit $|\varrho_j| \geqq |\varrho_i|$ besitzt. Damit sind auch für $i = 1, \dots p$ die R_i höchstens Polynome (und keine unendlichen Potenzreihen) in den ersten $i - 1$ Variablen $y_1, \dots, y_{i-1}$ allein.

Also haben wir

$$\begin{aligned} &R_i \equiv 0 && \text{für } i = 1 \text{ und } i = p + 1, \dots, n, \\ &R_i = R_i(y_1, \dots, y_{i-1}) && \text{für } i = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Somit bleibt folgendes System zu lösen:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{ds} &= \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_i}{ds} &= \lambda_i (y_i + e_i y_{i-1}) + R_i(y_1, \dots, y_{i-1}) \\ &= \lambda_i y_i + \bar{R}_i(y_1, \dots, y_{i-1}) \qquad (i = 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich der Reihe nach integrieren. Die Integrationskonstanten seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Da jedes R_i aus solchen Potenzprodukten $y_1^{g_1} \dots y_p^{g_p}$ besteht, für deren Exponenten (16) erfüllt, d. h. $\lambda_i = \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j$ ist, und $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ für $e_i \neq 0$, so enthält $\bar{R}_i$ den Faktor $e^{\lambda_i s}$. Wir bekommen daher aus (18) zunächst

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 s},$$

also

$$\frac{dy_2}{ds} = \lambda_2 y_2 + \bar{R}_2(\alpha_1)\, e^{\lambda_2 s},$$

d. h.

$$y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 s} + \bar{R}_2(\alpha_1)\, s e^{\lambda_2 s} = (\alpha_2 + \bar{R}_2(\alpha_1)\, s)\, e^{\lambda_2 s}.$$

Das ergibt weiter

$$\frac{dy_3}{ds} = \lambda_3 y_3 + \bar{R}_3(\alpha_1, \alpha_2 + \bar{R}_2(\alpha_1)\, s)\, e^{\lambda_3 s}$$

oder, wenn wir $\bar{R}_3$ explizit als Polynom in s anschreiben,

$$\frac{dy_3}{ds} = \lambda_3 y_3 + (\bar{r}_{3,0} + \bar{r}_{3,1}\, s + \bar{r}_{3,2}\, s^2 + \cdots + \bar{r}_{3,r_3}\, s^{r_3})\, e^{\lambda_3 s}.$$

Damit haben wir

$$y_3 = \alpha_3 e^{\lambda_3 s} + (s_{3,1}\, s + s_{3,2}\, s^2 + \cdots + s_{3,r_3+1}\, s^{r_3+1})\, e^{\lambda_3 s}$$

mit Koeffizienten $s_{3,1}, \ldots, s_{3,r_3+1}$, die sich eindeutig aus den $\bar{r}_{3,0}, \ldots, \bar{r}_{3,r_3}$ ergeben und wie diese von α_1, α_2 abhängen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir auch $y_4, \ldots, y_p$. Die allgemeine Lösung von (18) ist damit

$$y_i = (\alpha_i + S_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, s))\, e^{\lambda_i s} \quad (i = 1, \ldots, p) \tag{19}$$

mit eindeutig bestimmten Polynomen S_i in den Integrationskonstanten und der unabhängigen Veränderlichen s.

(19) ergibt mit (7) und (6) die gesuchten Lösungen von (1) mit der Eigenschaft (3).

(1) ist die durch lineare Transformation erreichbare Normalform eines Systems der Gestalt

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + P_i^*(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

mit konstanten a_{ik} und in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihen P_i^* ohne konstante und lineare Glieder. Die Lösungen von (20) mit der Eigenschaft (3) sind also für genügend große $Re\ s$ als konvergente Potenzreihen in s, $e^{\lambda_1 s}, \ldots, e^{\lambda_p s}$ mit p Integrationskonstanten darstellbar, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die Eigenwerte der Matrix (a_{ik}) mit negativem Realteil sind. Dabei treten s und seine Potenzen nur in Produkten auf zusammen mit mindestens einem Faktor $e^{\lambda_i s}$ $(1 \leqq i \leqq p)$.

Durch die Substitution

$$T = e^{-s} \quad \text{d. h.} \quad \frac{dT}{ds} = -T \tag{21}$$

mit

$$Re\, s \to \infty \quad \text{für} \quad T \to 0$$

erhält das System

(22)

$$T \frac{dx_i}{dT} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} x_k + b_i T + Q_i(x_1, \ldots, x_m, T) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

mit konstanten b_{ik}, b_i und in einer Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihen Q_i ohne konstante und lineare Glieder die Gestalt (20), wenn man $m + 1 := n$, $-b_i := a_{in}$, $T := x_n$ setzt und (21) dazunimmt. Man hat:

$$T \frac{dx_i}{dT} = T \frac{dx_i}{ds} \frac{ds}{dT} = -\frac{dx_i}{ds}.$$

Die „zugeordnete" Matrix (a_{ik}) für (20) ergibt sich dabei zu

$$\begin{pmatrix} -b_{11} & \cdots\cdots & -b_{1m} & -b_1 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ -b_{m1} & \cdots\cdots & -b_{mm} & -b_m \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus sieht man: Die Lösungen x_i von (22) mit der Eigenschaft

$$x_i \to 0 \quad \text{für} \quad T \to 0 \tag{23}$$

lassen sich für hinreichend kleine $|T|$ in konvergente Potenzreihen in $T^{\lambda_1}, \ldots, T^{\lambda_p}$ und $\ln T$ mit p Integrationskonstanten entwickeln, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die Eigenwerte der Matrix (b_{ik}) mit positivem Realteil sind. Dabei tritt $\ln T$ nur in Produkten auf, zusammen mit mindestens einem Faktor T^{λ_i} $(1 \leqq i \leqq p)$.

Nun erhält man aus den Eigenwerten der Matrix (b_{ik}) gerade die Lösungen des zu (22) gehörenden homogenen Systems

$$(22') \qquad T\frac{dx_i}{dT} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}x_k \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Die Lösungen von (22) mit der Eigenschaft (23) sind also in einer gewissen Umgebung von $T = 0$ als konvergente Potenzreihen in $\ln T$ und in den für $T \to 0$ verschwindenden Lösungen des zugeordneten homogenen Systems (22′) darstellbar. Dabei tritt der Logarithmus nie allein auf, d. h. jedes Glied der Reihe enthält einen Faktor $T^{\varkappa}$ mit $\varkappa > 0$.

Dasselbe gilt für das System 2. Ordnung

$$(24) \qquad T^2\frac{d^2x_i}{dT^2} + c_i T\frac{dx_i}{dT} = \sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_k + c_{i0}T + F_i(x_1, \ldots, x_l, T) \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

mit konstanten c_i, c_{ik} und in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihen F_i ohne konstante und lineare Glieder, da es sich mit

$$(25) \qquad T\frac{dx_i}{dT} = x_{l+i} \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

auf die Form (22) umschreiben läßt.

IV. Der reelle Zweierstoß und seine Grenzfälle

Ziel dieses Abschnittes ist die Aufstellung irregulärer Potenzreihen für die Komponenten der Ortsvektoren der Massenpunkte beim Dreikörperproblem für die Umgebung des Zeitpunktes, in dem zwei Massenpunkte zusammentreffen und der dritte von ihnen den Abstand Null hat.

Wir wollen das Problem zunächst allgemeiner fassen:

Zur Zeit $t = 0$ mögen die Massenpunkte P_1, P_2 in einem Raumpunkt P zusammenstoßen. Wenn wir komplexe Koordinaten zulassen, sind dann drei Fälle möglich:

(a) Der Abstand des Punktes P_3 von P ist auch für $t = 0$ von Null verschieden: reiner Zweierstoß erster Art.

(b) Der Abstand des Punktes P_3 von P ist Null für $t = 0$, ohne daß P_3 und P zusammenfallen: gemischter Stoß.

(c) Die Punkte P und P_3 fallen für $t = 0$ auch zusammen: Dreierstoß erster Art.

Die Fälle (a), (c) sind für reelle Zeiten und Koordinaten vollständig behandelt, [4], [8], [11], [12], [13], [14]: Für (a) ergeben sich Entwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte nach Potenzen von $t^{1/3}$. Die Lösungen haben also für $t = 0$ einen algebraischen Verzweigungspunkt 2. Ordnung. Für (c) erhielt C. L. Siegel Entwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte nach $t^{1/3}$, t^{μ}, t^{ν} mit irrationalen μ, ν und unter gewissen Bedingungen Logarithmen, d. h. einen logarithmischen Verzweigungspunkt.

Für den Fall (b) hat D. Belorizky [3] als Lösungen Reihen nach Potenzen von $t^{1/3}$ und $t^{1/3} \cdot \ln t$ behauptet, aber weder die formale Entwicklung dieser Reihen noch ihre Konvergenz gezeigt. Diese Lücke soll im folgenden geschlossen werden.

Um Unterschiede und Parallelen aufzuzeigen, wollen wir, soweit das möglich ist, zusammen mit Fall (b) auch die Fälle (a) und (c) behandeln.

Wir betrachten die Bewegung der Punkte P_1, P_2 in bezug auf den Punkt P_3. Die Bewegungsgleichungen für die Relativkoordinaten erhalten wir aus den Gleichungen (I. 1), wenn wir die dritte dieser Gleichungen von der ersten und von der zweiten subtrahieren und dann $\vec{x}_1 - \vec{x}_3 \Rightarrow \vec{x}_1$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_3 \Rightarrow \vec{x}_2$ setzen. Die neuen Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ beziehen sich also auf ein bewegliches Koordinatensystem mit raumfesten Achsenrichtungen und dem Ursprung P_3.

(I. 1) ergibt:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\ddot{\vec{x}}_1 &= \frac{m_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} - \frac{(m_1 + m_3)\,\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3} - \frac{m_2\,\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^3} \\
\ddot{\vec{x}}_2 &= \frac{m_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - \frac{(m_2 + m_3)\,\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^3} - \frac{m_1\,\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3}\,.
\end{aligned}
$$

Die 2. Gleichung (1) entsteht aus der ersten durch Vertauschung der Zeiger 1 und 2, der Zeiger 3 bleibt fest. Wir brauchen daher i. a. weiterhin nur mehr eine Gleichung aufzuschreiben.

Wie sich zeigen wird, führt folgender Ansatz zu einer Lösung (vergl. [3]):

$$\vec{x}_k = \vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_k + \vec{y}_k), \tag{2}$$

$$\vec{i} = \text{const}, \ \alpha > 0, \quad \vec{a}_k = \text{const} \neq 0,$$

$$\vec{y}_k\,(0) = 0, \ t\dot{\vec{y}}_k\Big|_{t=0} = 0, \quad t^2\ddot{\vec{y}}_k\Big|_{t=0} = 0, \qquad (k = 1, 2). \tag{3}$$

Dann findet der Stoß für $t = 0$ statt, und mit $\vec{i}^2 \neq 0$; $\vec{i}^2 = 0$, $\vec{i} \neq 0$; $\vec{i} = 0$ erfassen wir die Fälle (a), (b), (c).

Aus (1) erhalten wir mit (2)

$$\begin{aligned} &\alpha(\alpha - 1)\, t^{\alpha-2} (\vec{a}_1 + \vec{y}_1) + 2\alpha\, t^{\alpha-1} \dot{\vec{y}}_1 + t^\alpha \ddot{\vec{y}}_1 = \\ &= \frac{m_2\, t^\alpha (\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{t^{3\alpha} |\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1|^3} - \\ &- \frac{(m_1 + m_3)\,(\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_1 + \vec{y}_1))}{|\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_1 + \vec{y}_1)|^3} - \\ &- \frac{m_2\,(\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_2 + \vec{y}_2))}{|\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_2 + \vec{y}_2)|^3} \end{aligned}$$

und daraus durch Multiplikation mit $t^{2\alpha}$, wenn wir die Nenner der letzten Brüche weiter ausrechnen:

$$\begin{aligned} &t^{3\alpha-2} \left(\alpha(\alpha - 1)\,(\vec{a}_1 + \vec{y}_1) + 2\alpha t \dot{\vec{y}}_1 + t^2 \ddot{\vec{y}}_1\right) = \\ &= \frac{m_2\,(\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1|^3} - \\ &- \frac{(m_1 + m_3)\, t^{2\alpha} (\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_1 + \vec{y}_1))}{|\vec{i}^2 + 2 t^\alpha \vec{i}(\vec{a}_1 + \vec{y}_1) + t^{2\alpha} (\vec{a}_1 + \vec{y}_1)^2|^{3/2}} - \\ &- \frac{m_2\, t^{2\alpha} (\vec{i} + t^\alpha (\vec{a}_2 + \vec{y}_2))}{|\vec{i}^2 + 2 t^\alpha \vec{i}(\vec{a}_2 + \vec{y}_2) + t^{2\alpha} (\vec{a}_2 + \vec{y}_2)^2|^{3/2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Im Fall (a) enthalten die beiden letzten Brüche den Faktor $t^{2\alpha}$, im Fall (b) den Faktor $t^{\alpha/2}$, weil man bei $\vec{i}^2 = 0$ durch $t^{3/2\,\alpha}$ kürzen kann. Im Fall (c) sind die beiden letzten Brüche wie der erste gebaut und enthalten die Zeit nicht mehr explizit.

Wir nehmen an

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1| \; |\vec{a}_1| \; |\vec{a}_2| \neq 0 \tag{5}$$

und im Fall (b) auch

$$\vec{i}\,\vec{a}_1 \neq 0, \quad \vec{i}\,\vec{a}_2 \neq 0. \tag{5'}$$

Die Gleichung (4) kann dann wegen (3) für $t \to 0$ nur mit

$$\alpha = \frac{2}{3} \tag{6}$$

bestehen, da ihre rechte Seite für $t = 0$ von Null verschieden ist.

Für $t = 0$ liefert sie dann in den Fällen (a), (b)

$$\begin{aligned} -\frac{2}{9}\vec{a}_1 &= \frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3}, \\ -\frac{2}{9}\vec{a}_2 &= \frac{m_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Multiplikation mit m_1 und m_2 und Addition der Gleichungen (7) liefern

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0, \tag{8}$$

also

$$m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = -(m_1 + m_2)\,\vec{a}_1. \tag{9}$$

Mit (7) haben wir damit

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3 = \frac{9}{2}(m_1 + m_2) \tag{10}$$

und nach (9)

$$|\vec{a}_1|^3 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^3 |\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3,$$

also

$$|\vec{a}_1|^3 = \frac{9}{2}\,\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}, \quad |\vec{a}_2|^3 = \frac{9}{2}\,\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{11}$$

Im Fall (c) liefert (4) für $t \to 0$:

$$-\frac{2}{9}\vec{a}_1 = \frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} - \frac{(m_1 + m_3)\,\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|^3} - \frac{m_2\,\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^3}. \tag{12}$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann zeigt die Gleichung (12) für die 2. Komponente von $\vec{a}_1$:

$$0 = \frac{m_2 c}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} - \frac{m_2 c}{|\vec{a}_2|^3}$$

oder

$$c\left(\frac{1}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{a}_2|^3}\right) = 0.$$

Entweder ist also $c = 0$, und das bedeutet: die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ sind parallel,

oder $|\vec{a}_2 - \vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ und dann auch $|\vec{a}_2| = |\vec{a}_1|$ – da keiner der Punkte P_1, P_2, P_3 vor den anderen ausgezeichnet ist – und das bedeutet: die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ können zu einem gleichseitigen Dreieck zusammengelegt werden. Wir haben damit den von Sundman und Siegel sogenannten geradlinigen und gleichseitigen Fall des Dreierstoßes erhalten.

Nachdem wir hier einen grundsätzlichen Unterschied zwischen den Fällen (a), (b) und dem Fall (c) gefunden haben, ist eine gemeinsame Untersuchung der drei Fälle nicht mehr möglich. Wegen der weiteren Behandlung von (c) verweisen wir auf [11].

Für (a) und (b) kehren wir mit dem Ergebnis (6) zu (4) zurück und setzen

$$(13) \qquad T = t^{1/3} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dT}(\;) = (\;)',$$

also
$$t\dot{\vec{y}} = t\vec{y}\,'\,\dot{T} = \frac{1}{3}\,T\vec{y}\,'$$

$$t^2\ddot{\vec{y}} = t^2(\vec{y}\,''\,\dot{T}^2 + \vec{y}\,'\,\ddot{T}) = \frac{1}{9}\,T^2\vec{y}\,'' - \frac{2}{9}\,T\vec{y}\,'$$

und erhalten

$$(14) \qquad \frac{1}{9}\left(T^2 \vec{y}_1'' + 2T\vec{y}_1' - 2\vec{y}_1 - 2\vec{a}_1\right) =$$

$$= \frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^2 + 2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{y}_2 - \vec{y}_1) + (\vec{y}_2 - \vec{y}_1)^2|^{3/2}} -$$

$$- \frac{(m_1 + m_3)\, T^4 (\vec{i} + T^2(\vec{a}_1 + \vec{y}_1))}{|\vec{i}^2 + 2T^2\vec{i}(\vec{a}_1 + \vec{y}_1) + T^4(\vec{a}_1 + \vec{y}_1)^2|^{3/2}} -$$

$$- \frac{m_2 T^4 (\vec{i} + T^2(\vec{a}_2 + \vec{y}_2))}{|\vec{i}^2 + 2T^2\vec{i}(\vec{a}_2 + \vec{y}_2) + T^4(\vec{a}_2 + \vec{y}_2)^2|^{3/2}}.$$

Wir entwickeln die rechte Seite in Reihen, schreiben aber nur die Terme niedrigsten Grades auf. Für den ersten Bruch erhalten wir

$$\frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} \cdot \left(1 - 3\,\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} + \frac{m_2(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^3} - 3\,\frac{m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)}{|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^5}(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) + \ldots.$$

Dafür können wir nach (7), (9), (10) schreiben:

$$-\frac{2}{9}\vec{a}_1 + \frac{2}{9}\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{y}_2 - \vec{y}_1) - \frac{2}{3}\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{\vec{a}_1(\;\vec{}\qquad\vec{}\;)}{|\vec{a}_1|^2}\,\vec{a}_1 + \ldots.$$

Wenn das Koordinatensystem so gewählt ist, daß die 2. und die 3. Komponente des Vektors $\vec{a}_1$ Null sind, d. h.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und die ersten Komponenten von $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ mit y_{11}, y_{21} bezeichnet werden, wird daraus

(15)

$$\frac{1}{9}\left(-2\vec{a}_1 + 2\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{y}_2 - \vec{y}_1) - 6\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} y_{21} - y_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots\right).$$

Im Fall (a) erhalten wir für die beiden anderen Brüche:

$$(16)\qquad -\frac{m_1+m_3}{|\vec{i}|^3}\vec{i}\,T^4-\frac{m_2}{|\vec{i}|^3}\vec{i}\,T^4+\ldots=$$
$$=-\frac{m_1+m_2+m_3}{|\vec{i}|^3}\vec{i}\,T^4+\ldots,$$

im Fall (b):

$$(17)\qquad -\left(\frac{m_1+m_3}{|2\vec{i}\,\vec{a}_1|^{3/2}}+\frac{m_2}{|2\vec{i}\,\vec{a}_2|^{3/2}}\right)\cdot\vec{i}\,T+\ldots.$$

Wenn man die abgeleiteten Glieder zusammenfaßt und die beiden letzten Brüche nicht anschreibt, dann hat (14) nach (15) die Gestalt

(18)
$$(T^2\vec{y}_1')'=2\vec{y}_1+2\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{y}_2-\vec{y}_1)-6\frac{m_2}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}y_{21}-y_{11}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\ldots$$
$$=2\frac{m_1\vec{y}_1+m_2\vec{y}_2}{m_1+m_2}-6\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\begin{pmatrix}y_{21}-y_{11}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\ldots.$$

Anstelle von $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ führen wir unter Aufgabe der Symmetrie zwischen den Zeigern 1, 2 neue Veränderliche $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ ein

$$(19)\qquad \begin{aligned}\vec{z}_1&=\frac{m_1\vec{y}_1+m_2\vec{y}_2}{m_1+m_2}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\\ \vec{z}_2&=\vec{y}_2-\vec{y}_1=\begin{pmatrix}z_4\\ z_5\\ z_6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und bekommen im Fall (a) aus (18) und (16)

$$(20)\qquad \begin{aligned}&(T^2\vec{z}_1')'-2\vec{z}_1=-9\frac{m_1+m_2+m_3}{|\vec{i}|^3}\vec{i}\,T^4+\ldots,\\ &(T^2\vec{z}_2')'-6\cdot\begin{pmatrix}z_4\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\text{Terme 2., 3. und 4. Grades in } \vec{z}_2 \text{ allein}+\ldots,\end{aligned}$$

im Fall (b) aus (18) und (17)

(21)

$$(T^2 z_1')' - 2\vec{z}_1 = -9\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{|2\vec{i}\vec{a}_1|^{3/2}} + \frac{m_2}{|2\vec{i}\vec{a}_2|^{3/2}}\right)\vec{i}T + \ldots,$$

$$(T^2\vec{z}_2')' - 6\cdot\begin{pmatrix} z_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9m_3\left(\frac{1}{|2\vec{i}\vec{a}_1|^{3/2}} - \frac{1}{|2\vec{i}\vec{a}_2|^{3/2}}\right)\vec{i}T + \ldots.$$

In den Gleichungen für $\vec{z}_1$ ist der erste Bruch der rechten Seite von (14) herausgefallen.

Nach (3) gilt $z_k(0) = 0$ $(k = 1, \ldots, 6)$. Wir können somit auf (20) und (21) die Ergebnisse von III anwenden. Dazu brauchen wir zunächst die Lösungen des homogenen Systems

(22)
$$(T^2 z_k')' - c_k z_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, 6)$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = 2; \quad c_4 = 6; \quad c_5 = c_6 = 0.$$

Mit dem Ansatz $z \sim T^\lambda$ erhalten wir aus (22)

$$\lambda(\lambda+1) = c, \quad \text{d. h. } \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c}.$$

Damit haben wir mit der Numerierung entsprechend (III.2)

$$\begin{array}{llll} \text{für } c = 2: & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, & \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = -2, \\ \text{für } c = 6: & \lambda_4 = 2, & \lambda_8 = -3, \\ \text{für } c = 0: & \lambda_9 = \lambda_{10} = 0, & \lambda_{11} = \lambda_{12} = -1. \end{array}$$

Die gesuchten Lösungen von (20) und (21) sind also nach III Reihen nach Potenzen von T und $T \ln T$ mit 4 Integrationskonstanten. Jedes Glied enthält mindestens einen Faktor T.

Da die beiden Systeme (20) und (21) sehr einfach gebaut sind, können wir ihre Lösungen unmittelbar, d. h. ohne Transformation auf die Normalform (III.1), noch genauer bestimmen.

Betrachten wir zunächst den Fall (a)! Wir setzen die Lösungen von (22) in die rechten Seiten von (20) ein und berechnen in einem ersten Schritt partikuläre Integrale unter Berücksichtigung nur der niedrigsten nun vorhandenen Potenzen von T. Diese Integrale werden wieder in die rechten Seiten eingesetzt. Die jetzt vorhandenen und im ersten Schritt nicht berücksichtigten niedrigsten Terme bestimmen die partikulären Integrale des zweiten Schrittes. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir schrittweise die Glieder der Reihenentwicklungen für $z_1, \ldots, z_6$. Da die rechten Seiten von (20), auch wenn $\vec{z}_1 = T(\ldots)$ und $\vec{z}_2 = T^2(\ldots)$ entsprechend den zugehörigen Eigenwerten 1 und 2 eingesetzt werden, keine linearen und quadratischen Glieder enthalten, erzeugen die Eigenwerte 1 und 2 keinen Logarithmus. $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ sind reguläre Funktionen der Veränderlichen $T = t^{1/3}$, wie schon Sundman gezeigt hat.

Im Fall (b) stehen auf den rechten Seiten von (21) lineare Glieder mit T. $\vec{z}_1$ bekommt daher bei dem für (a) angegebenen Verfahren durch den Eigenwert $+1$ einen Term $T \ln T$. Da der erste Bruch in (14) eine Funktion von $\vec{z}_2$ allein ist und die beiden anderen Brüche den Faktor T enthalten, sind die quadratischen Glieder der rechten Seite von (21) in z_1 höchstens linear. Sie ergeben also mit $T \ln T$ von $\vec{z}_1$ höchstens ein Produkt $T^2 \ln T$ und nicht $T^2 (\ln T)^2$. Der Eigenwert $\lambda_4 = 2$ liefert deshalb kein $T^2 (\ln T)^3$. In den Reihen für $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ gilt daher für die Exponenten μ, ν von $T^\mu \, (\ln T)^\nu$ immer $\mu \geqq \nu$.

Wir können also setzen

$$(23) \qquad z_k = \sum_{\mu \geqq \nu \geqq 0}^{\infty} z_{k\mu\nu} \, T^\mu \, (\ln T)^\nu \qquad (k = 1, \ldots, 6).$$

Das ergibt

$$T^2 z_k' = \sum z_{k\mu\nu} \, T^{\mu+1} \left(\mu (\ln T)^\nu + \nu (\ln T)^{\nu-1}\right)$$

$$(T^2 z_k')' = \sum z_{k\mu\nu} \, T^\mu \left((\mu+1)\, \mu (\ln T)^\nu + (2\mu+1)\, \nu (\ln T)^{\nu-1} + {} \right.$$
$$\left. + \nu (\nu - 1) (\ln T)^{\nu-2}\right).$$

In (21) bekommen wir aus den Koeffizienten von $T^m \, (\ln T)^n$ dann

$$(24) \qquad z_{k,m,n} \left((m+1)\, m - c_k\right) + z_{k,m,n+1} (2m+1)(n+1) + {}$$
$$+ z_{k,m,n+2} (n+2)(n+1) = Z_{k,m,n}$$
$$(k = 1, \ldots, 6;\; m > 0,\; m \geqq n \geqq 0).$$

Dabei ist nach (21) – hier treten noch keine Logarithmen auf –

$$Z_{k11} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, 6,$$

$$(24.0) \qquad \begin{pmatrix} Z_{110} \\ Z_{210} \\ Z_{310} \end{pmatrix} = -9\,\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{|2\vec{i}\vec{a}_1|^{3/2}} + \frac{m_2}{|2\vec{i}\vec{a}_2|^{3/2}} \right) \vec{i},$$

$$\begin{pmatrix} Z_{410} \\ Z_{510} \\ Z_{610} \end{pmatrix} = 9\, m_3 \left(\frac{1}{|2\vec{i}\vec{a}_1|^{3/2}} - \frac{1}{|2\vec{i}\vec{a}_1|^{3/2}} \right) \vec{i}.$$

Die weiteren Z_{kmn} erhalten wir nach (21) aus $z_{k\mu\nu}$ mit $\mu < m$.

Die ersten Gleichungen (24) lauten

$$\begin{array}{lll}
(24.1) & (2 - c_k)\, z_{k11} & = 0 \\
(24.2) & (2 - c_k)\, z_{k10} + 3 z_{k11} & = Z_{k10} \\
(24.3) & (6 - c_k)\, z_{k22} & = Z_{k22}\ (Z_{422} = 0) \\
(24.4) & (6 - c_k) z_{k21} + 10\, z_{k22} & = Z_{k21} \\
(24.5) & (6 - c_k)\, z_{k20} + 5\, z_{k21} + 2\, z_{k22} & = Z_{k20} \\
(24.6) & (12 - c_k)\, z_{k33} & = Z_{k33}
\end{array}$$

. . . .

. . . .

Wir sehen daraus:

(24.1): $z_{411} = z_{511} = z_{611} = 0$, da $2 - c_k \neq 0$ für $k = 4, 5, 6$.

(24.2) bestimmt $z_{111}, z_{211}, z_{311}$ und $z_{410}, z_{510}, z_{610}$. $z_{110}, z_{210}, z_{310}$ sind frei wählbar, da $2 - c_k = 0$ für $k = 1, 2, 3$.

(24.3) legt $z_{122}, z_{222}, z_{322}$ und z_{522}, z_{622} eindeutig fest.

(24.4) ergibt $z_{121}, z_{221}, z_{321}, z_{521}, z_{621}$ und z_{422}.

(24.5) liefert $z_{120}, z_{220}, z_{320}, z_{520}, z_{620}$ und z_{421}, während z_{420} wegen $6 - c_4 = 0$ frei wählbar bleibt.

Die folgenden Gleichungen (24 ...) ergeben die weiteren $\vec{z}_{k\ldots}$ eindeutig, und zwar erscheint in jeder Gleichung genau eine neue Unbekannte.

Damit haben wir Reihenentwicklungen für $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ gefunden, die (21) erfüllen. Sie hängen von den 4 Integrationskonstanten

$z_{110}, z_{210}, z_{310}, z_{420}$ ab. Die Konvergenz solcher Reihen in einer gewissen Umgebung von $T = 0$ hat – wie schon in III bemerkt – J. Horn [6] gezeigt.

Aus (19) haben wir

$$\vec{y}_1 = \vec{z}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{z}_2, \quad \vec{y}_2 = \vec{z}_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{z}_2.$$

Also sind auch $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ als Reihen nach $T^\mu (\ln T)^\nu$ mit $\mu \geqq \nu \geqq 0$ darstellbar, und wir erhalten mit (2) für die gesuchten Lösungen von (1)

$$(25) \qquad \begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{i} + t^{2/3} \vec{a}_1 + t \vec{y}_{110} + \frac{1}{3} t \ln t \, \vec{y}_{111} + \ldots, \\ \vec{x}_2 &= \vec{i} + t^{2/3} \vec{a}_2 + t \vec{y}_{210} + \frac{1}{3} t \ln t \, \vec{y}_{211} + \ldots . \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{i}$ ein frei wählbarer isotroper Vektor, $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind antiparallele Vektoren frei wählbarer Richtung vom Betrag $m_2 a^*$ und $m_1 a^*$ mit $a^* = \left(\frac{9}{2} (m_1 + m_2)^{-2}\right)^{1/3}$. Die weiteren Koeffizienten $\vec{y}_{k\mu\nu}$ sind nach Festlegung von $\vec{i}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ bis auf 4 Integrationskonstanten eindeutig bestimmt. Die Reihen konvergieren für $|t| < \eta$ mit genügend kleinem $\eta > 0$.

Die Koordinatenvektoren der Massenpunkte in bezug auf ihren Schwerpunkt S lassen sich linear durch $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ ausdrücken. Für sie gelten daher ebenfalls Reihenentwicklungen von der Gestalt (25).

Die allgemeine Lösung von (I.1) in einer Umgebung des gemischten Stoßes erhalten wir dann daraus, wenn wir dem Schwerpunkt S noch eine Translation mit konstanter Geschwindigkeit erteilen. Sie enthält also, da auch $t_0 = 0$ willkürlich angenommen wurde, im ganzen 15 frei wählbare Parameter.

Als weiteres Ergebnis haben wir mit (25)

$$|\vec{x}_k| = |2 \vec{i} \vec{a}_k t^{2/3} + \ldots|^{1/2} = t^{1/3} |2 \vec{i} \vec{a}_k + \ldots|^{1/2},$$

folglich

$$|\vec{x}_k| = O(t^{1/3}) \qquad (k = 1, 2)$$

und nach (8)

$$\left.\frac{|\vec{x}_1|}{|\vec{x}_2|}\right|_{t=0} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2},$$

ferner

$$|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = O(t^{2/3}).$$

Der Abstand der Punkte P_1, P_2, die in einem Raumpunkt zusammenstoßen, verschwindet also von höherer Ordnung als die Abstände der Punkte P_1, P_3 bzw. P_2, P_3, die nicht zusammentreffen.

Schließlich wollen wir noch nachweisen, daß ein gemischter Stoß nicht im Widerspruch steht zu einem von Null verschiedenen reellen Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ des Systems der 3 Massen m_1, m_2, m_3 in bezug auf ihren Schwerpunkt S:

Es gilt (siehe z. B. [9] § 10)

(26)
$$\vec{J} = \frac{m_3(m_1\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2) + m_1 m_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\dot{\vec{x}}_2 - \dot{\vec{x}}_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Nach (25) und (19) ist

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = t^{2/3}(\vec{a}_2 - \vec{a}_1 + \vec{z}_2),$$

also

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\dot{\vec{x}}_2 - \dot{\vec{x}}_1)\Big|_{t=0} = 0. \tag{27}$$

Weiter folgt aus (25) mit (8) und (19)

(28)
$$m_1\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 = (\vec{i} + \ldots) \times (m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2) =$$
$$= (\vec{i} + \ldots) \times (m_1 + m_2)\left(\vec{z}_{110} + \frac{1}{3}(1 + \ln t)\,\vec{z}_{111} + \ldots\right).$$

Nach (24.2) gilt wegen (24.0)

$$\vec{z}_{111} = \mu\vec{i}, \quad \mu \text{ skalar.} \tag{29}$$

(27), (28), (29) ergeben in (26)

$$\vec{J}(t = 0) = \vec{J}(t) = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}\,\vec{i} \times \vec{z}_{110}. \tag{30}$$

$\vec{z}_{110}$ kann nach (24.2) frei gewählt werden.

Für

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_{110} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird

$$\vec{J} = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also reell und von Null verschieden, wie behauptet.

V. Ein Stoß dritter Art

Wir gehen aus vom Dreierstoß erster Art. Der Ansatz (IV.2) für diesen Stoß

$$(1) \qquad \vec{x}_k = t^\alpha (\vec{a}_k + \vec{y}_k)$$

mit

$$(2) \qquad \alpha > 0, \ \vec{a}_k = \text{const} \neq 0, \ \vec{y}_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

ergab unter der Voraussetzung (IV.5)

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1| \ |\vec{a}_1| \ |\vec{a}_2| \neq 0$$

für den Exponenten α den Wert $\frac{2}{3}$ (vergl. (IV.6)) und weiter die Ergebnisse, die C. L. Siegel bei der reellen Behandlung dieses Falles erhalten hat.

Wir haben also beim Dreierstoß erster Art

$$(3) \qquad \vec{x}_k = O(t^{2/3}) \qquad (k = 1, 2)$$

und, wenn wir die Abstände der Massenpunkte P_k, P_l mit r_{kl} bezeichnen,

$$(4) \qquad r_{kl} = O(t^{2/3}) \qquad (k \neq l = 1, 2, 3).$$

Unabhängig von (IV.5) und damit (3) folgt (4) unmittelbar aus dem Ansatz (1) für die Bewegungsgleichungen. Diese lauten mit (1) und den Bezeichnungen von (4) – wie in IV schreiben wir wieder nur eine Gleichung auf, die zweite entsteht daraus durch Vertauschung der Zeiger 1 und 2 –

$$(5)\qquad t^{\alpha-2}\,\alpha(\alpha-1)\,(\vec{a}_1+\vec{y}_1)+2\,\alpha t^{\alpha-1}\,\dot{\vec{y}}_1+t^{\alpha}\,\ddot{\vec{y}}_1=$$
$$=r_{12}^{-3}m_2t^{\alpha}(\vec{a}_2-\vec{a}_1+\vec{y}_2-\vec{y}_1)-r_{13}^{-3}(m_1+m_3)t^{\alpha}(\vec{a}_1+\vec{y}_1)-$$
$$-r_{23}^{-3}\,m_2\,t^{\alpha}(\vec{a}_2+\vec{y}_2).$$

Der Faktor t^{α} fällt aus der Gleichung heraus und wegen (2) erhalten wir für die („gleichberechtigten") r_{kl} die Beziehung (4).

Wir lassen nun (IV.5) fallen und untersuchen den Dreierstoß unter der Annahme

$$(6)\qquad \vec{a}_2-\vec{a}_1\neq 0,\qquad |\vec{a}_2-\vec{a}_1|=0,$$

d. h.
$$\lim_{t\to 0} r_{12}\,t^{-\alpha}=0:$$

Der Abstand der Punkte P_1, P_2 verschwindet „schneller" als die Punkte zusammentreffen.

Damit liegt hier ein Sonderfall eines Stoßes erster Art vor, der nur im Komplexen möglich ist. Zur Unterscheidung von den bisher behandelten Fällen sei er als „*Stoß dritter Art*" bezeichnet.

Im folgenden wollen wir die dafür gültigen Reihenentwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte untersuchen. Da bei der allgemeinen Behandlung Schwierigkeiten auftreten, werden wir im weiteren Verlauf der Überlegungen die Gestalt der Lösung nur für einen speziellen Fall bestimmen. Dieses Beispiel wird uns einen grundlegenden Unterschied unserer Ergebnisse zu den schon früher bekannten Resultaten zeigen.

Wir setzen in (1)

$$(7)\qquad \vec{y}_k=t^{\beta}\,(\vec{b}_k+\vec{z}_k)$$

mit

$$(8)\qquad \beta>0,\;\; \vec{b}_k=\text{const}\neq 0,\;\; \vec{z}_k\,(0)=0\qquad (k=1,2)$$

und erhalten

$$r_{12}^2=|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2=$$
$$=t^{2\alpha+\beta}\,|2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\,(\vec{b}_2-\vec{b}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_1)+t^{\beta}(\vec{b}_2-\vec{b}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_1)^2|$$

und entsprechende Ausdrücke für r_{13} und r_{23}.

Unter den Voraussetzungen

$$(9) \qquad (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) \neq 0, \quad \vec{a}_1 \vec{b}_1 \neq 0, \quad \vec{a}_2 \vec{b}_2 \neq 0$$

liefert das zufolge (4) und (5)

$$(10) \qquad 2\alpha + \beta = \frac{4}{3}.$$

Nun ist

$$\dot{\vec{x}}_k = t^{\alpha-1}\left(\alpha(\vec{a}_k + \vec{y}_k) + t\dot{\vec{y}}_k\right),$$

$$\dot{\vec{y}}_k = t^{\beta-1}\left(\beta(\vec{b}_k + \vec{z}_k) + t\dot{\vec{z}}_k\right),$$

also nach (10)

$$\vec{x}_k \times \dot{\vec{x}}_k = t^{2\alpha+\beta-1}(\beta\vec{a}_k \times \vec{b}_k + \ldots) = t^{1/3}(\beta\vec{a}_k \times \vec{b}_k + \ldots) \quad (k = 1, 2)$$

und

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\dot{\vec{x}}_2 - \dot{\vec{x}}_1) = t^{1/3}\left(\beta(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times (\vec{b}_2 - \vec{b}_1) + \ldots\right).$$

Der Gesamtdrehimpuls bei dem hier betrachteten Dreierstoß ist damit nach (IV.26)

$$(11) \qquad \vec{J}(t) = \vec{J}(t = 0) = 0.$$

Daraus folgt: Die Punkte P_1, P_2 bewegen sich in einer in unserem Koordinatensystem festen Ebene durch den „Koordinatenursprung“ P_3 (vgl. dazu z. B. [12] § 6).

Weiterhin wollen wir nur mehr den „*symmetrischen Dreierstoß dritter Art*“ untersuchen, d. h. es sei:

$$\vec{a}_k = a_k \vec{i}, \quad a_k = \text{const} \neq 0 \qquad (k = 1, 2),$$

$$a_1 \neq a_2, \quad \vec{i} \neq 0, \quad \vec{i}^2 = 0.$$

Wegen (11) können wir „ebene Vektoren“ verwenden und schreiben

$$(12) \qquad \vec{y}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_k = \frac{a_k}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad (k = 1, 2).$$

Damit wird – wenn wir die Zeiger 1 oder 2 überall weglassen –

$$|\vec{x}|^2 = t^{2\alpha}|\vec{a}+\vec{y}|^2 = t^{2\alpha}|2\vec{a}\vec{y}+\vec{y}^2| =$$
$$= t^{2\alpha}|a(x+iy)+(x+iy)(x-iy)|.$$

In Anlehnung an (7) setzen wir nun

$$(13)\qquad \begin{aligned} &x-iy=u, && u(0)=0,\\ &x+iy=\bar{v}=t^{\beta}(b+v), && v(0)=0,\\ &\beta>0, && b_1, b_2, b_2-b_1=\text{const}\neq 0 \end{aligned}$$

und erhalten mit (10)

$$(14)\qquad |\vec{x}|^2 = t^{4/3}|ab+av+bu+uv|.$$

Wir multiplizieren (5) skalar mit $\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ und bekommen mit (12), (13), (14)

$$(15)\qquad \alpha(\alpha-1)(a_1+u_1)+2\alpha t\dot{u}_1+t^2\ddot{u}_1 =$$
$$= \frac{m_2(a_2-a_1+u_2-u_1)}{|(a_2-a_1)(b_2-b_1)+\ldots|^{3/2}} - \frac{(m_1+m_3)(a_1+u_1)}{|a_1b_1+\ldots\ldots|^{3/2}} - \frac{m_2(a_2+u_2)}{|a_2b_2+\ldots|^{3/2}}.$$

Die entsprechende Gleichung für $\bar{v}_1$ entsteht durch skalare Multiplikation von (5) mit $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$. Wegen $\vec{i}^2=0$ enthält sie auf der linken Seite und in den Zählern der rechten Seite keine konstanten Summanden.

Nach (13) ist

$$\begin{aligned} \bar{v} &= t^{\beta}(b+v)\\ t\dot{\bar{v}} &= \beta t^{\beta}(b+v)+t^{\beta+1}\dot{v}\\ t^2\ddot{\bar{v}} &= \beta(\beta-1)t^{\beta}(b+v)+2\beta t^{\beta+1}\dot{v}+t^{\beta+2}\ddot{v}, \end{aligned}$$

also

$$(16)\qquad \alpha(\alpha-1)\bar{v}+2\alpha t\dot{\bar{v}}+t^2\ddot{\bar{v}} =$$
$$= t^{\beta}\big([\alpha(\alpha-1)+2\alpha\beta+\beta(\beta-1)](b+v)+$$
$$+(2\alpha+2\beta)t\dot{v}+t^2\ddot{v}\big).$$

Wir ersetzen α in (15) und (16) nach (10) durch $\frac{2}{3} - \frac{\beta}{2}$ und erhalten als Gleichung für u_1

$$(17.1) \quad \left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta}{6} - \frac{2}{9}\right)(a_1 + u_1) + \left(\frac{4}{3} - \beta\right) t\dot{u}_1 + t^2 \ddot{u}_1 =$$

$$= \frac{m_2(a_2 - a_1 + u_2 - u_1)}{|(a_2-a_1)(b_2-b_1) + (a_2-a_1)(v_2-v_1) + (b_2-b_1)(u_2-u_1) + (u_2-u_1)(v_2-v_1)|^{3/2}} -$$

$$- \frac{(m_1 + m_3)(a_1 + u_1)}{|a_1 b_1 + a_1 v_1 + b_1 u_1 + u_1 v_1|^{3/2}} - \frac{m_2(a_2 + u_2)}{|a_2 b_2 + a_2 v_2 + b_2 u_2 + u_2 v_2|^{3/2}}$$

und als Gleichung (17.2) für v_1 die aus (17.1) durch die Substitution $\beta \Leftrightarrow -\beta$, $u \Leftrightarrow v$, $a \Leftrightarrow b$ entstehende Gleichung.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$(18) \qquad c = \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta}{6} - \frac{2}{9}, \qquad d = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{6} - \frac{2}{9},$$
$$c' = \frac{4}{3} - \beta \quad , \qquad d' = \frac{4}{3} + \beta.$$

Dann ergibt (17) nach (13) für $t = 0$

$$c a_1 = \frac{m_2(a_2 - a_1)}{|(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)|^{3/2}} - \frac{(m_1 + m_3) a_1}{|a_1 b_1|^{3/2}} - \frac{m_2 a_2}{|a_2 b_2|^{3/2}}$$

und die daraus durch die Substitutionen $1 \Leftrightarrow 2$ und $a \Leftrightarrow b$, $c \Leftrightarrow d$ hervorgehenden weiteren 3 Gleichungen.

Jetzt setzen wir

$$(19) \qquad a_1 = a, \quad a_2 = \gamma a, \quad b_1 = b, \quad b_2 = \delta b$$

und bekommen mit den Abkürzungen

$$(20) \qquad A = \frac{1}{|(\gamma - 1)(\delta - 1)|^{3/2}}, \qquad B = \frac{1}{|\gamma \delta|^{3/2}}$$

$$(21) \qquad \begin{aligned} c\,|ab|^{3/2} &= m_2(\gamma - 1) A - m_1 - m_3 - m_2 \gamma B \\ c\,|ab|^{3/2} &= m_1\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) A - (m_2 + m_3) B - m_1 \frac{1}{\gamma} \\ d\,|ab|^{3/2} &= m_2(\delta - 1) A - m_1 - m_3 - m_2 \delta B \\ d\,|ab|^{3/2} &= m_1\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) A - (m_2 + m_3) B - m_1 \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

als notwendige Bedingungen für die Existenz von für $t \to 0$ verschwindenden Lösungen von (17).

Für gegebene Massen m_1, m_2, m_3 sind γ, δ, $|ab|$, β aus (21) und (18) zu berechnen. Da die allgemeine Auflösung nach diesen Unbekannten sehr schwierig zu sein scheint – wenn sie überhaupt möglich ist – betrachten wir umgekehrt m_1, m_2, m_3 als Funktionen der Parameter γ, δ.

(21) liefert für $(c-d)\,|ab|^{3/2}$:

$$m_2(\gamma-\delta)\,(A-B) = m_1\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(A-1),$$

also

$$m_1(1-A) = m_2\gamma\delta\,(A-B). \tag{22}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (21) folgt bei Verwendung von (22) durch Gleichsetzen der rechten Seiten

$$m_2(\gamma-1)\,(A-B) + m_2\gamma\delta\,\frac{A-B}{1-A}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)(1-A) = m_3(1-B),$$

also

$$m_2(\gamma-1)\,(A-B)\,(1-\delta) = m_3(1-B).$$

Zusammen mit (22) haben wir damit

$$m_1\,\frac{1-A}{\gamma\delta} = m_2\,(A-B) = m_3\,\frac{B-1}{(\gamma-1)\,(\delta-1)}. \tag{23}$$

Aus (18) erhalten wir mit dem Verhältnis $e := \dfrac{c+d}{c-d}$

$$\beta^2 + \frac{2}{3}\,e\,\beta - \frac{8}{9} = 0,$$

also

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\sqrt{e^2+8}-e\right). \tag{24}$$

Folglich ist für $e > 0$

$$0 < \beta < \frac{4}{3} \text{ und daher auch } \alpha = \frac{2}{3} - \frac{\beta}{2} > 0.$$

Nach (21) und (23) gilt

$$(c+d)\frac{|ab|^{3/2}}{m_2} = (\gamma+\delta)(A-B)-2A-2(A-B)\left(\frac{\gamma\delta}{1-A}+\frac{(\gamma-1)(\delta-1)}{B-1}\right) =$$

$$= (A-B)\left(\gamma+\delta-\frac{2\gamma\delta}{1-A}+\frac{2(\gamma-1)(\delta-1)}{1-B}\right)-2A$$

und

$$(c-d)\frac{|ab|^{3/2}}{m_2} = (\gamma-\delta)(A-B),$$

also

(25)

$$e = \left(\gamma+\delta-\frac{2\gamma\delta}{1-A}+\frac{2(\gamma-1)(\delta-1)}{1-B}-\frac{2}{1-B:A}\right):(\gamma-\delta).$$

Durch Wahl von γ und δ sind somit durch (23) Verhältnisse der Massen m_1, m_2, m_3 bestimmt, die Lösungen von (17) mit dem durch (25), (24) festgelegten Exponenten β ergeben können.

Im folgenden werden wir ein Wertesystem m_1, m_2, m_3, a_1, a_2, b_1, b_2, β, α aufstellen, das mit (18), (19), (20) die Gleichungen (21) erfüllt und für das für $t \to 0$ verschwindende Lösungen u_1, u_2, v_1, v_2 von (17) und damit nach (13), (12), (1) Dreierstoßlösungen 3. Art

$$\vec{x}_k = \vec{a}_k t^\alpha + \ldots \qquad (k = 1, 2)$$

der Bewegungsgleichungen (IV.1) existieren.

Im Unterschied zu allen bisher bekannten „Stoßlösungen" der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems hängt hier nach (21), (18), (10) schon der erste in den Reihenentwicklungen der Koordinaten der Massenpunkte nach Potenzen von t auftretende Exponent von den Massen m_1, m_2, m_3 ab. Dieser Exponent ist daher im allgemeinen irrational.

Damit ist die Behauptung von R. Vernić in [16], die Lösungen der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems seien alle „algebromorph" (vergl. dazu [9] S. 14!) erneut widerlegt, und zwar trifft diese Behauptung auch dann nicht zu, wenn man nur die ersten nichtkonstanten Reihenglieder betrachtet. Auf Grund der bisherigen Untersuchungen schien das der Fall zu sein, vergl. [1], [2], [3], [9], [10], [11] und (IV.25).

Ferner haben wir mit unserer Dreierstoßlösung 3. Art ein Gegenbeispiel gegen die Behauptung von D. Belorizky gefunden, der nach Aufzählung der in unserem Abschnitt II genannten Stöße in [3] S. 559 unten schreibt: „. . . andere Stöße existieren beim Dreikörperproblem nicht."

Wir wollen nun das erwähnte System $m_1, m_2 \ldots$ bestimmen und zeigen, daß es die gewünschten Lösungen liefert.

Wir wählen in (20), (21), (23)

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \delta = -3, \qquad m_2 = 1 \tag{26}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{42}(16\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 18\sqrt{2} - 9) \simeq 0{,}44268, \\ m_3 &= \frac{1}{38}(24\sqrt{6} - 12\sqrt{3} - 27\sqrt{2} + 32) \simeq 0{,}83735. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (25) erhalten wir

$$e = \frac{2}{7}\left(-\frac{5}{2} + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{7} + \frac{108 + 24\sqrt{6}}{19} + \frac{54 + 48\sqrt{3}}{37}\right) \simeq 4{,}17871 \text{ (irrational!)}$$

und damit aus (24) und (10) irrationale Werte für β und α

$$\beta \simeq 0{,}28908, \qquad \alpha \simeq 0{,}52213, \tag{28}$$

weiter aus (18)

$$\begin{aligned} c &\simeq -0{,}24951, & d &\simeq -0{,}15315, \\ c' &\simeq 1{,}04425, & d' &\simeq 1{,}62241 \end{aligned} \tag{29}$$

und aus (21)

$$|ab|^{3/2} \simeq 6{,}92945, \qquad |ab| \simeq 3{,}63468.$$

Wegen $\gamma = \frac{1}{2}$ wählen wir $a_1 = 2$ und haben

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 & a_2 &= 1 \\ b_1 &\simeq 1{,}81734 & b_2 &\simeq -5{,}45202. \end{aligned} \tag{30}$$

Damit sind alle Konstanten in (17) bestimmt.

Wir entwickeln die rechte Seite von (17.1) in eine Potenzreihe. Die drei dort auftretenden Brüche haben die Gestalt

$$\frac{m(a+u)}{|ab+av+bu+uv|^{3/2}} = \frac{m}{|ab|^{3/2}}(a+u)\left|1+\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{uv}{ab}\right|^{-3/2} =$$

$$= \frac{m}{|ab|^{3/2}}(a+u)\left(1-\frac{3u}{2a}-\frac{3v}{2b}\pm\dots\right) =$$

$$(31) \qquad = \frac{m}{2|ab|^{3/2}}\left(2a-u-3\frac{a}{b}v\pm\dots\right).$$

Nach (21) fallen die konstanten Summanden aus den Differentialgleichungen (17) heraus. Die linearen Glieder ergeben sich mit (26), (27), (29), (30), (31), wenn wir die nicht abgeleiteten Veränderlichen auf den linken Seiten mit berücksichtigen, zu

$$C\cdot(u_1, u_2, v_1, v_2)^T$$

mit

$$(32) \quad C \simeq \begin{pmatrix} 0{,}36738 & 0{,}01377 & 0{,}31546 & -0{,}03214 \\ 0{,}02065 & 0{,}33297 & 0{,}10080 & -0{,}03505 \\ 0{,}80812 & -1{,}19875 & 0{,}27102 & 0{,}01377 \\ -0{,}15921 & -0{,}93405 & 0{,}02065 & 0{,}23661 \end{pmatrix}.$$

Das damit aus (17) gewonnene System hat die Gestalt (III.24) mit $c_{i0} = 0$. Mit der (III.25) entsprechenden Transformation

$$(33) \qquad \begin{array}{llll} u_1 = w_1, & u_2 = w_2, & v_1 = w_3, & v_2 = w_4, \\ t\dot{u}_1 = w_5, & t\dot{u}_2 = w_6, & t\dot{v}_1 = w_7, & t\dot{v}_2 = w_8 \end{array}$$

ergibt sich nach (17), (18), (33) z. B.

$$t\dot{w}_5 = t^2\ddot{u}_1 + t\dot{u}_1 = (c'-1)\,w_5 + \dots.$$

Aus (17) erhalten wir also schließlich das System der Form (III.22)

$$(34) \qquad T\frac{dw_i}{dt} = \sum_{k=1}^{8} b_{ik}\,w_k + Q_i \qquad (i = 1, \dots, 8)$$

mit in einer Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihen Q_i in den Veränderlichen w_1, w_2, w_3, w_4 und

$$(b_{ik}) = \begin{pmatrix} O & E \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (i, k = 1, \dots, 8).$$

Dabei bedeuten O und E die vierreihige Null- bzw. Einheitsmatrix, C ist durch (32) festgelegt und D ist die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $c' - 1$, $c' - 1$, $d' - 1$, $d' - 1$.

Die Eigenwerte der Matrix (b_{ik}) sind

(35)

$$\lambda_1 \simeq 0{,}9361 \quad \lambda_2 \simeq 0{,}7406 \quad \lambda_3 \simeq 0{,}4173 \quad \lambda_4 \simeq 0{,}00001$$

$$\lambda_5 \simeq -1{,}054 \quad \lambda_6 \simeq -0{,}6829 \quad \lambda_{7,8} \simeq -0{,}2230 \pm 0{,}2001\, i.$$ [1]

Da wir bei unseren numerischen Berechnungen alle Zahlen nur siebenstellig verwendet haben, wollen wir nicht behaupten, daß λ_4 in (35) nicht auch Null oder negativ sein könnte.

Nach den Überlegungen von III besitzt somit (34) für $t \to 0$ verschwindende Lösungen, die sich in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ als dort konvergente Potenzreihen mit ganzzahligen Exponenten in den Veränderlichen t^{λ_1}, t^{λ_2}, t^{λ_3} und eventuell $\ln t$ – das aber höchstens in Produkten zusammen mit einer positiven Potenz von t – und 3 frei wählbaren Parametern darstellen lassen. Dasselbe gilt dann auch für u_1, u_2, v_1, v_2. Schließlich erhalten wir mit (13), (12), (1) die gewünschten Lösungen für unser Beispiel zum symmetrischen Dreierstoß dritter Art

$$\vec{x}_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} t^{\alpha}(a_k + u_k) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} t^{\alpha+\beta}(b_k + v_k) \qquad (k = 1, 2)$$

mit irrationalen α, β aus (28) und den durch (30) festgelegten a_k, b_k.

VI. Ein Beispiel zum Dreierstoß zweiter Art

T. Uno gibt in [15] ein Beispiel zum einfachen Zweierstoß zweiter Art an, das sich nach einer Mitteilung von J. Lense zu einem Beispiel für den Dreierstoß zweiter Art umbauen läßt. Er betrachtet den Stoß zweiter Art beim Zweikörperproblem.

[1] Die Werte wurden auf der Rechenanlage des Instituts für Plasmaphysik in Garching mit einem Bibliotheksprogramm berechnet.

Mit

$$m_1 m_2 \neq 0, \quad m_3 = 0$$

ist das ein Sonderfall des einfachen Zweierstoßes zweiter Art beim Dreikörperproblem. Durch Entwicklung der Lösungen des Zweikörperproblems findet Uno für die Umgebung des Stoßes ($t = 0$) Reihen nach positiven ganzzahligen Potenzen von $t^{1/3}$ für die Koordinaten und den Abstand der stoßenden Massenpunkte (vergl. auch [17]).

Setzt man

$$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 \neq 0,$$

so bewegen sich P_1 und P_2 auf voneinander unabhängigen „Zweikörperproblembahnen", d. h. Kegelschnitten um P_3. Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen läßt sich erreichen, daß (mit den Bezeichnungen von IV und V) immer

$$\vec{x}_1(t) = -\vec{x}_2(t) \tag{1}$$

erfüllt ist. Der Zweierstoß von Uno führt damit zu einem Dreierstoß zweiter Art. Also gibt es auch dafür Reihenentwicklungen nach $t^{1/3}$. Mit (1) ist die z. B. in [9], § 7 (10) angegebene Bedingung für die Existenz von Lösungen mit nur algebraischen Singularitäten erfüllt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Sémirot [10] und Selder [9].

VII. Ergebnis und Ausblick

Als Ziel der vorliegenden Arbeit wurde in I genannt, die Untersuchung der Singularitäten der Lösungen der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems zu einem gewissen Abschluß zu bringen. Dieses Ziel ist mit den Ergebnissen aus IV erreicht: Für alle Stöße erster und zweiter Art sind nun konvergente Potenzreihen für die Koordinaten der Massenpunkte als Funktionen der Zeit aufgestellt, die die Bewegungsgleichungen erfüllen.

Um diese Reihenentwicklungen zu gewinnen, wurden gewisse Voraussetzungen gemacht, die die Gestalt der Lösungen wesentlich beeinflussen – z. B. der Ansatz (IV.2) und entsprechende Ansätze bei Uno [15], Belorizky [1], [2], [3], Selder [9]. Uns sind zwar keine Stoßlösungen erster und zweiter Art bekannt, die diese Voraussetzungen nicht erfüllen, der Beweis, daß keine anderen als die jetzt bekannten Reihenentwicklungen existieren, fehlt aber ebenso.

Mit der Untersuchung des symmetrischen Dreierstoßes dritter Art haben wir die Fallunterscheidung für Stöße beim Dreikörperproblem von den ersten nichtkonstanten Gliedern der Reihenentwicklungen auf die zweiten Glieder ausgedehnt: Die Abstände der drei Massenpunkte verschwinden hier für $t \to 0$ wie beim reellen Dreierstoß. Während aber dort für die Seitenlängen r_{ik} des Dreiecks P_1, P_2, P_3 endliche und von Null verschiedene Grenzwerte

$$\lim_{t \to 0} \frac{r_{ik}}{t^{2/3}} \qquad (i \neq k = 1, 2, 3)$$

existieren, haben wir, um zu unserem Fall zu kommen, angenommen, daß die entsprechenden Grenzwerte verschwinden:

$$\lim_{t \to 0} \frac{r_{ik}}{t^{\alpha}} = 0,$$

wobei

$$\lim_{t \to 0} \frac{\vec{r}_{ik}}{t^{\alpha}} \neq 0$$

vorausgesetzt war.

α ist durch (V.10) und (V.24) festgelegt.

Wir haben alle drei dieser Grenzwerte Null gesetzt, weil das die weiteren Rechnungen zu vereinfachen versprach, und damit den von uns so genannten symmetrischen Dreierstoß dritter Art erhalten. Die anderen Dreierstöße dritter Art sowie die Zweierstöße dritter Art wären noch zu behandeln.

Außerdem könnte man die Voraussetzungen (V.9) beim symmetrischen Dreierstoß dritter Art fallen lassen und damit die Fallunterscheidung für Stöße auf die höheren Glieder der Reihenentwicklungen erstrecken.

Vor uns liegt also noch ein weites Feld von Möglichkeiten für Untersuchungen über das Dreikörperproblem.

Literaturverzeichnis

[1] D. Belorizky: Chocs triples imaginaires dans le problème plan des trois corps. *Comptes Rendus*, Bd. 208, S. 558–560, Paris 1939

[2] D. Belorizky: Les chocs dans le problème des trois corps et dans l'espace. *Comptes Rendus*, Bd. 208, S. 966–969, Paris 1939

[3] D. Belorizky: Chocs d'une nouvelle espèce dans le problème des trois corps. *Comptes Rendus*, Bd. 213, S. 558–560, Paris 1941

[4] G. Bisconcini: Sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica*, Bd. 30 (1906), S. 49–92

[5] P. Bohl: Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisables en mécanique. *Bulletin de la société mathématique de France*, Bd. 38, 1910, S. 5–138

[6] J. Horn: Über die Reihenentwicklungen der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. *Journal für Mathematik*, Bd. 116 (1896), S. 265–306, Bd. 117 (1897), S. 104–128, S. 254–266

[7] T. Levi-Cività: Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi. *Annali di matematica*, Serie IIIa, Bd. 9 (1904), S. 1–32

[8] T. Levi-Cività: Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta mathematica*, Bd. 42 (1920), S. 99–144

[9] H. Selder: Über singuläre Stellen in den Differentialgleichungen des Dreikörperproblems. *Sitzungsber. der Bayer. Ak. d. Wissensch.* 1964, S. 13–48

[10] P. Sémirot: Chocs imaginaires dans le problème des trois corps. *Comptes Rendus*, Bd. 212, S. 974–977, Paris 1941

[11] C. L. Siegel: Der Dreierstoß. *Annals of Mathematics*, Bd. 42 (1941), S. 127–168

[12] C. L. Siegel: Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer-Verlag 1956

[13] K. F. Sundman: Recherches sur le problème des trois corps. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, Bd. 34 (1907), Nr. 6

[14] K. F. Sundman: Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta mathematica*, Bd. 36 (1913), S. 105–179

[15] T. Uno: Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps. *Annali di matematica*, Serie IV, Bd. 14 (1936), S. 111–137

[16] R. Vernić: Diskussion der Sundmanschen Lösungen des Dreikörperproblems. Zagreb 1954

[17] K. Zuser: Die Riemannsche Fläche des Zweikörperproblems. *Sitzungsber. der Bayer. Ak. d. Wissensch.* 1960, S. 61–90.