BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über die Erzeugung schneller Teilchen durch elektromagnetische Wellen

Von Winfried Otto Schumann in München

Vorgelegt am 6. Juli 1962

Die Ausgangsfrage war die Bewegung geladener Teilchen in periodisch schwingenden elektrischen und magnetischen Feldern, die räumlich senkrecht zueinander stehen und zeitlich um $90^0$ in der Phase gegeneinander verschoben sind. Solche Teilchenbewegungen entstehen z. B. in Spulen, die starke Wechselströme führen, in denen durch das axial pulsierende Magnetfeld zirkular wirkende elektrische Felder erzeugt werden. Sie können aber auch durch elektrische Wellen im freien Raum hervorgerufen werden, in dem durch einen Energieverbrauch magnetische Feldkomponenten erzeugt werden, die dem elektrischen Feld um $90^0$ in der Phase nacheilen.

Nimmt man z. B. an, daß in der $y$-Richtung eines Koordinatensystems ein elektrisches Feld von der Größe $E_y = E_a \cos(\omega t + \varphi)$ wirkt, und in der $z$-Richtung ein Magnetfeld vom Verlauf $B_z = B_a \sin(\omega t + \varphi)$, beide Felder zunächst unabhängig von $x$ angenommen, so ergibt sich aus der Diff.gl. der Bewegung

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}],$$

daß geladene Teilchen beschleunigt werden, neben periodischen Bewegungen, die sie ausführen, und die nicht weiter interessieren. Es ergeben sich linear mit der Zeit anwachsende Geschwindigkeiten, nämlich

$$v_x = \frac{e}{m} E_a \varphi_2 I_1(A) t \quad \text{und} \quad v_y = \frac{e}{m} E_a \varphi_1 I_1(A) t$$

$$\text{mit } A = \frac{\Omega_a}{\omega} \quad \text{und} \quad \Omega_a = \frac{e}{m} B_a,$$

wo $\varphi_1$ und $\varphi_2$ als Funktionen von $\xi = (\omega t + \varphi)$ gegeben sind durch

$$\varphi_1 = \sin(A\cos\xi) = 2\{I_1(A)\cos\xi - I_3(A)\cos 3\xi + I_5(A)\cos 5\xi -$$

$$\varphi_2 = \cos(A\cos\xi) = I_0(A) + 2\{-I_2(A)\cos 2\xi + I_4(A)\cos 4\xi - \ldots$$

Die $I_n$ sind Besselsche Funktionen erster Art $n$ter Ordnung. Diese zunächst überraschende Tatsache erklärt sich physikalisch dadurch, daß $v_y$ wegen des $\cos(\omega t + \varphi)$ Gliedes in $\varphi_1$ eine Komponente in Phase mit dem elektrischen Feld $E_y$ hat, wodurch dieses Energie auf das Teilchen überträgt. Das Magnetfeld verbiegt die Teilchenbahnen so, daß diese eine Schwingungskomponente in Phase mit dem elektrischen Feld haben.

Die gesamte kinetische Energie der Teilchen ist

$$\frac{m v_x^2}{2} + \frac{m v_y^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2 E_a^2 I_1^2(A) t^2$$

und ihre Elektronenvoltspannung

$$U = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_a^2 I_1^2(A) \cdot t^2;$$

wie man sieht, hängt der ganze Vorgang sehr stark von $A = \frac{\Omega_a}{\omega}$ ab. Ist $I_1(A) = 0$, z. B. bei $A = 3{,}83$ usf., so tritt keine Beschleunigung auf.

Der größte Wert von $I_1(A)$ ist 0,582 bei $A = 1{,}84$, $\Omega_a = 1{,}84\,\omega$. Da $\varphi_2$ ein zeitlich konstantes Glied hat, neben sonstigen zeitlich pulsierenden, kann man auch $v_x = \frac{e}{m} E_a I_0(A) I_1(A) t$ schreiben, wenn man von Oszillationen in $v_x$ absieht. Und da $\varphi_1$ ein Glied $2 I_1 \cos\xi$ hat, während die übrigen Glieder höhere Frequenzen ungerader Ordnung darstellen, kann man

$$v_y = 2\frac{e}{m} E_a I_1^2(A) \cdot t \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

schreiben, wenn nur die Schwingung von $v_y$ in Phase mit dem elektrischen Feld interessiert.

Solange $I_0(A)$ und $I_1(A)$ das gleiche Vorzeichen haben, wird in $x$-Richtung beschleunigt, bei verschiedenen Vorzeichen dagegen in der negativen $x$ Richtung. Positiv und negativ geladene Teilchen werden unabhängig vom Vorzeichen ihrer Ladung immer in der gleichen Richtung beschleunigt. Dagegen ist $v_y$ vom

Vorzeichen von $I_1(A)$ unabhängig. Aber positiv und negativ geladene Teilchen schwingen bei $v_y$ in entgegengesetzter Richtung.

Die größten $v_x$ treten auf, wenn $\Omega_a \approx \omega$ ist. Sowohl für $\frac{\Omega_a}{\omega} \ll 1$ als auch für $\frac{\Omega_a}{\omega} \gg 1$ wird $\frac{d v_x}{d t}$ sehr gering. Bei den schwachen Magnetfeldern, wie sie z. B. bei elektrischen Wellen im leeren Raum auftreten, ist $\omega \approx \Omega_a$ eine sehr geringe Frequenz. Praktisch wichtig ist der Fall $\frac{\Omega_a}{\omega} < 1$, mit

$$I_1(A) \approx \frac{1}{2} \frac{\Omega_a}{\omega} \qquad I_0(A) \approx 1.$$

Dann wird

$$v_x \approx \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_a \frac{\Omega_a}{\omega} t \text{ und } v_y \approx \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_a \left(\frac{\Omega_a}{\omega}\right)^2 t \cos(\omega t + \varphi)$$

und es wird mit abnehmendem $\frac{\Omega_a}{\omega}$ sehr rasch $v_y \ll v_x$.

Die von den Teilchen zurückgelegten Wege sind

$$S_x = \int_0^t v_x \, dt = \frac{e}{m} E_a I_0(A) I_1(A) \frac{t^2}{2}$$

$$S_y = \int_0^t v_y \, dt = 2 \frac{e}{m} E_a \frac{I_1^2(A)}{\omega^2} \{\omega t \sin(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi) - \cos\varphi\},$$

woraus man sieht, daß bei größerem $t$, d. h. größerem $v_x$ praktisch nur eine Bewegung in der $x$ Richtung stattfindet, da $\frac{S_y}{S_x}$ immer kleiner wird.

Um näherungsweise ein Bild für das Verhalten bei größeren Geschwindigkeiten zu erhalten, kann man mit Vernachlässigung von $v_y$ bei $\frac{\Omega_a}{\omega} < 1$

$$m \frac{d v_x}{d t} = m \cdot \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$$

setzen, und den Ausdruck der rechten Seite als Kraft in der $x$ Richtung auffassen, die das Teilchen beschleunigt. Führt man dann die longitudinale relativistische Masse $m = m_0 \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$ ein, so ergibt sich $v_x^2 = \frac{a^2 t^2}{1 + a^2 t^2/c^2}$, mit $a = \frac{1}{2} \frac{e}{m_0} E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$.

Aus dem relativistischen Ausdruck für die kinetische Energie $T = Ue = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$ ergibt sich $t^2 = \frac{Ue}{m_0 a^2} \left( 2 + \frac{eU}{m_0 c^2} \right)$ und der zurückgelegte Weg als

$$S = \int_0^t v\, dt = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

Für ein Proton mit $10^9$ $V$ folgt hieraus $t = 11{,}6/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ sek und ein zurückgelegter Weg vom $s \approx 2.10^6/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ km, wobei zum Vergleich der Abstand Sonne – Erde $\sim 1{,}5.10^8$ km angegeben sei. Für ein sehr energiereiches Proton von $10^{17}$ $V$ wird die Laufzeit $\frac{2}{3} \cdot 10^9/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ sek $= 21/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ Jahre. Der zurückgelegte Weg ist $s = 2.10^{14}/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ km $= 20/E_a \frac{\Omega_a}{\omega}$ Lichtjahre, da 1 LJ $= 10^{13}$ km. Für astronomische Verhältnisse sind $t$ und $s$ nicht groß.

Denkt man an die Erzeugung solcher energiereicher Teilchen durch elektromagnetische Wellen, so existiert zunächst die Tatsache, daß bei solchen Wellen im leeren Raum $E$ und $H$ in Phase sind, so daß also gar keine Beschleunigung entstehen kann. Die Welle müßte zunächst eine nacheilende Komponente des Magnetfeldes haben, z. B. durch den Durchgang durch eine kosmische Plasmawolke. Sobald jedoch solch eine, wenn auch geringe, nacheilende $H$-Komponente da ist, tritt eine Art Selbsterregung ein. Da nämlich

$$v_y = 2 \frac{e}{m} E_a I_1^2(A) t \cos(\omega t + \varphi) = v_{y_a} \cos(\omega t + \varphi)$$

ist, tritt in Richtung des elektrischen Feldes ein Strom $S_y = e\, v_y$ und damit ein Leitwert $\varkappa = \frac{S_y}{E_y} = 2e \left( \frac{e}{m} \right) I_1^2(A) \cdot t = \frac{v_{y_a} e}{E_a}$ auf, der mit der Zeit anwächst und nach der ersten Maxwellschen Gl. auch ein wachsendes nacheilendes magnetisches Feld erzeugt. Gleichzeitig tritt natürlich auch eine Dämpfung der Welle auf. Ob diese Dämpfung „klein" oder „groß" ist, hängt von $\frac{\varkappa}{\omega \varepsilon}$ ab, das für ein Proton gleich $3{,}2 \frac{I_1^2(A), t}{\omega}$ ist. Das erzeugte nacheilende Magnetfeld ist $B_a^2 = \frac{E_a^2}{2c^2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]$, was für $\frac{\varkappa}{\omega\varepsilon} \ll 1$, $B_a$ prop $t$, für $\frac{\varkappa}{\omega\varepsilon} \gg 1$, $B_a$ prop $\sqrt{t}$ ergibt.

Da nach S. 80 $\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) = m\left(\frac{e}{m}\right)^2 E_a^2 I_1^2(A) \cdot t$ ist, folgt $\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\varkappa E_a^2$ und $m\frac{dv}{dt} = e\,I_1(A)\cdot E_a$.
Diese Leistung muß von einer ankommenden Welle auf das Teilchen übertragen werden. Es ist also auch denkbar, daß ein ursprünglich ungedämpfter Wellenzug, bei dem elektrische und magnetische Felder in Phase sind, das schwingende Teilchen überholt, dort das durch $\varkappa = \frac{e\,v_{y_a}}{E_a}$ bestimmte nacheilende Magnetfeld erzeugt, und damit die Leistung $\frac{1}{2}\varkappa E_a^2 = \frac{1}{2}e\,v_{v_y} E_a$ auf das Teilchen überträgt und es weiter beschleunigt. Es wäre das ein Vorgang, der etwa analog einem Strahlungsdruck der Welle auf das Teilchen entspräche.

Um abzuschätzen, was die Dämpfung und die mit der Entfernung von der Strahlungsquelle wie $\frac{1}{r}$ abnehmende Amplitude der Wellen bedeuten, wenn ein Teilchen sich in solch einer Welle befindet, und man dessen Rückwirkung vernachlässigt, setzt man mit der Annahme $\frac{\Omega_a}{\omega} < 1$, $m\frac{dv_r}{dt} = m\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} E_r B_r \frac{1}{\omega}$ und

$$E_r = E_R \frac{R}{r} e^{-\alpha(r-R)} \qquad B_r = B_R \frac{R}{r} e^{-\alpha(r-R)}$$

damit für $r = R$, $E_r = E_R$ und $B_r = B_R$, und betrachtet den Wert von $m\frac{dv_r}{dt}$ als eine in der Richtung $r$ antreibende Kraft, die von $r$ abhängig ist, so ergibt sich mit der Annahme $\alpha r > 1$, was für astronomische Dimensionen auch für kleine $\alpha$ angenommen werden darf, nach einigen Umrechnungen

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e}{m} \frac{E_R}{\omega},$$

was sowohl für schwache, $\frac{\varkappa}{\varepsilon\omega} < 1$, als auch für starke, $\frac{\varkappa}{\varepsilon\omega} > 1$, Dämpfungen gilt.

Die Voltgeschwindigkeit wird

$$U_r = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{E_R^2}{\omega^2},$$

was für ein Proton gleich $U_{P_r} = \frac{1}{4} \cdot 10^8 \frac{E_R^2}{\omega^2}$ ist. Wie schon wiederholt betont, geben nur kleine $\omega$ merkbare Geschwindigkeiten. So folgt z. B. für $U_{P_r} = 10^8\ V$, $E_R = 2\omega$, was z. B. für $\omega = 1$, $E_R = 2 \frac{V}{m}$ ergibt, eine Feldstärke, die bei den stärksten Sonneneruptionen dort als möglich erscheint. Größere Energien bedürfen natürlich sehr viel höherer Ausgangsfeldstärken, die wohl nur bei außergewöhnlichen Umständen, wie z. B. beim Auftreten einer Supernova vorkommen dürften, die etwa alle 30 bis 50 Jahre in unserer Galaxi auftreten.

Um die Größe von $\Omega_a = \frac{e}{m} B_a$ zu charakterisieren, gilt, daß bei einer Vakuumwelle das Feld $B$ in Phase mit $E$ gleich $\frac{E}{c}$ ist. Wenn die nacheilende Komponente $B_a = \eta \cdot \frac{E_a}{c}$ gesetzt wird, so ist $\Omega_a = \frac{e}{m} \eta \frac{E_a}{c} = \eta \cdot 0{,}3\ E_a$ für ein Proton, wenn $E_a$ in $\frac{V}{m}$ gemessen wird, was für kleine $\eta$ und $E_a$ sehr kleine $\Omega_a$ ergibt. $\omega$ sollte in dessen Größenordnung liegen. Führt man von vornherein die Gleichung einer Wanderwelle in die Diff.gl. ein, so ergeben sich sehr komplizierte partielle nichtlineare Gleichungen, deren Lösungen nicht einfach sein dürfte.

Es scheint also nicht unmöglich zu sein, daß der geschilderte Vorgang für die Erzeugung schneller Teilchen der kosmischen Strahlung verantwortlich ist. Allerdings nur beim Auftreten sehr geringer Frequenzen, wie sie bei der großen räumlichen Ausdehnung der Himmelskörper nicht unwahrscheinlich sind. Es wäre sehr wünschenswert, eine Radioastronomie der geringsten Frequenzen zu entwickeln, die viel neues und wertvolles Licht auf die Vorkommnisse im Weltall werfen könnte.

Geomagnetische Beobachtungen machten das Auftreten solcher niederfrequenter Wellen nicht unwahrscheinlich.