

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960



MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Finite und nicht-finite Flächeneigenschaften

*Herrn Josef Lense zum 70. Geburtstag am 28. 10. 1960*

Von **Robert Sauer** in München

Mit drei Figuren

Vorgelegt am 11. November 1960

## Übersicht

1. Verknickung eines Dreiecksstreifens . . . . .	205
2. Invarianz . . . . .	208
3. Deformationen . . . . .	210

Manche differentialgeometrische Eigenschaften der Flächen lassen sich an elementargeometrischen Modellen veranschaulichen. Man ordnet dabei differentialgeometrischen Begriffen (wie z. B. Krümmung, Windung, Krümmungsmaß) elementargeometrische Begriffe in der Weise zu, daß zwischen diesen elementargeometrischen Begriffen dieselben Beziehungen bestehen wie zwischen den entsprechenden differentialgeometrischen Begriffen. Solche Flächeneigenschaften wollen wir im folgenden als finite Eigenschaften und die hierbei benützten Modelle als finite Modelle bezeichnen. Andere Flächeneigenschaften lassen sich nicht in dieser einfachen Weise an einem elementargeometrischen Modell veranschaulichen, sondern ergeben sich erst durch einen Grenzübergang von einer Folge von Modellen zu einer Fläche. Eigenschaften dieser Art sollen nicht-finite Eigenschaften bezüglich des betreffenden Modells heißen.

## 1. Verknickung eines Dreiecksstreifens

Ein Beispiel für eine nicht-finite Eigenschaft liefert die Verknickung eines nach Art der Fig. 1 aus Dreiecken zusammengesetzten Streifens. Ein solcher Dreiecksstreifen ist stetig verknick-

bar, wobei je zwei benachbarte Dreiecke um ihre gemeinsame Seite gegeneinander verdreht werden. Der eine Rand des Streifens (in Fig. 1 etwa das Polygon  $AP\dots B$ ) sowie die Lage eines der Dreiecke (in Fig. 1 etwa das schraffierte Dreieck  $APQ$ ) lassen sich innerhalb gewisser Grenzen beliebig vorschreiben; die

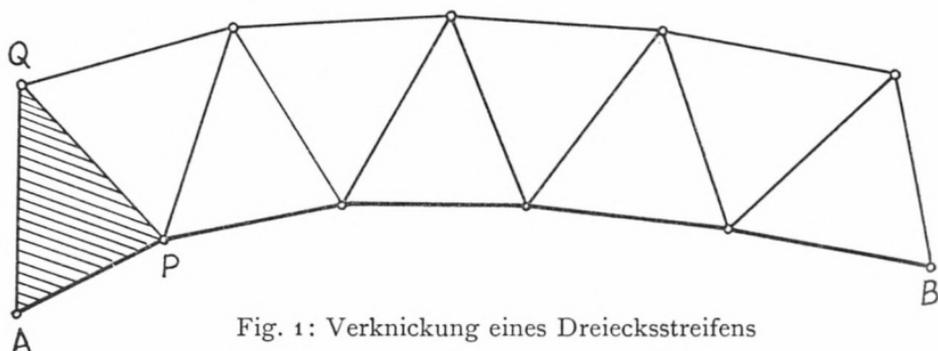


Fig. 1: Verknickung eines Dreieckstreifens

Lage der restlichen Dreiecke ist dann im wesentlichen (d. h. wenn man durch zusätzliche Vorschriften Mehrdeutigkeiten ausschließt) festgelegt.

Wir betrachten nun den Dreieckstreifen als elementargeometrisches Modell eines Flächenstreifens, der von den Tangentenebenen einer Fläche längs einer Flächenkurve  $c$  erzeugt wird. Ebenso wie die Dreieckstreifen stetige Verknickungen zulassen, kann man die Flächenstreifen stetigen Verbiegungen unterwerfen. Während aber die Verknickungsgestalt eines Dreieckstreifens durch das Randpolygon  $AP\dots B$  und das Dreieck  $APQ$  festgelegt wird, ist die Verbiegungsgestalt eines Flächenstreifens bereits durch die Randkurve  $c$  allein festgelegt; denn die Lage der Tangentenebene in  $A$  ist bei Festlegung der Kurve  $c$  aus deren geodätischer Krümmung in  $A$  bereits mitbestimmt und kann daher nicht mehr zusätzlich vorgeschrieben werden.

Das Modell liefert also hinsichtlich seiner Verknickungen andere Beziehungen als der Flächenstreifen hinsichtlich seiner Verbiegungen. Wir haben es hier mit einer nicht-finiten Flächeneigenschaft zu tun, das Modell ist kein finites Modell für die Streifenverbiegung. Diese ergibt sich aus dem Modell erst durch einen Grenzprozeß:

Die Parameter  $u, v$  seien auf der den Streifen enthaltenden Fläche so gewählt, daß die Kurve  $c$  durch  $v = 0$  und  $0 \leq u \leq 1$  gegeben ist. Wir greifen dann auf der Kurve  $c$  die Punkte  $u = k\varepsilon$  mit  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  und auf der Nachbarkurve  $v = \varepsilon$  die Punkte  $u = l\varepsilon$  mit  $l = 0, 1, \dots, n - 1$  heraus. Diese zwei Punktreihen von  $n + 1$  bzw.  $n$  Punkten bestimmen dann einen Dreiecksstreifen nach Art der Fig. 1. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Folge dieser Dreiecksstreifen gegen den Flächenstreifen, wobei die Dreiecksebenen die Tangentenebenen des Streifens als Grenzlagen haben und die Keilwinkel aufeinanderfolgender Dreiecksebenen demgemäß gegen Null streben.

Um auf einfache Weise einen Einblick in das Konvergenzverhalten bei Verknickungen bzw. Verbiegungen zu gewinnen, beschränken wir uns auf drehsymmetrische Streifen, also auf Dreiecksstreifen mit 2 Scharen kongruenter und gleichschenkliger Dreiecke, die unter konstantem Keilwinkel aufeinander folgen, bzw. auf Flächenstreifen von Drehflächen längs eines Parallelkreises. Durch die hinzugenommene Forderung der Drehsymmetrie wird die Beweglichkeit der Dreiecksstreifen bei den Verknickungen eingeschränkt; die Verknickungen der Dreiecksstreifen hängen jetzt ebenso wie die Verbiegungen der drehsymmetrischen Streifen nur noch von einem Parameter ab und beim Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  gehen die Verknickungen der Dreiecksstreifen in die Verbiegungen des Flächenstreifens über.

Wenn man nun aber die drehsymmetrischen Streifen unter Festhaltung des Polygons  $AP \dots B$  jeweils so verknickt, daß die Dreiecksebene  $APQ$  um einen kleinen Winkel  $\eta$  verdreht wird, dann werden, wie man sich leicht überzeugt, auch die übrigen dem Polygon  $AP \dots B$  anliegenden Dreiecke in hinsichtlich  $\eta$  linearer Näherung um dieselben Winkel  $\pm \eta$  verdreht und die Keilwinkel der Ebenen benachbarter Dreiecke sind ebenfalls von der Größenordnung  $\eta$ . Beim Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  streben die Keilwinkel zwischen den Dreiecksebenen also nur dann gegen Null, wenn man den Verdrehungswinkel  $\eta$  des schraffierten Dreiecks selbst gegen Null konvergieren läßt, d. h. wenn man die nicht drehsymmetrischen Verknickungsformen der Dreiecksstreifen an der Grenze in eine drehsymmetrische Verknickungsform übergehen läßt.

## 2. Invarianz des sphärischen Bildes bei Verknickungen bzw. Verbiegungen

Ein Beispiel für eine finite Eigenschaft liefert die sphärische Abbildung eines Dreiecksgitters (Fig. 2): Jeder innere Gitterpunkt ist je 6, jeder Randpunkt je 3 oder 2 Dreiecken gemeinsam. Die Dreiecke lassen sich zu Sechsecken, die von je 6 Dreiecken gebildet werden, zusammenfassen. Nach Festlegung einer Orien-

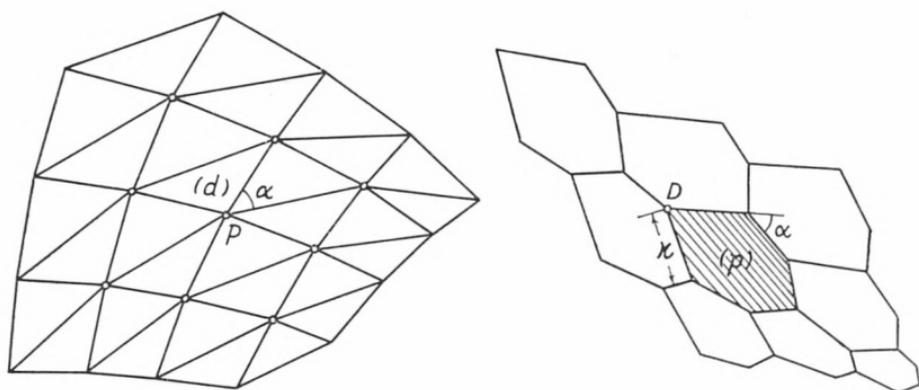


Fig. 2: Dreiecksgitter und sphärisches Bild

tierung der vom Dreiecksgitter erzeugten polyedrischen Fläche ist jedem Dreieck eine Normale zugeordnet und es läßt sich dann auf der Einheitskugel durch Radien, die zu den Normalen der Dreiecksebenen parallel sind, ein sphärisches Bild definieren. Jedem Gitterdreieck ( $d$ ) entspricht im sphärischen Bild ein Punkt  $D$  und jedem Gittersechseck um einen inneren Gitterpunkt  $P$  ein sphärisches Sechseck ( $p$ ). Die Dreieckswinkel  $\alpha$  des Dreiecksgitters sind gleich den Außenwinkeln der sphärischen Sechsecke, die Keilwinkel  $\kappa$  der Sechsecke des Dreiecksgitters (= Winkel benachbarter Dreiecksebenen) sind gleich den Seitenlängen der sphärischen Sechsecke.

Wir nehmen an, daß das Dreiecksgitter auf der Seite der Flächennormalen konvex ist. Dann sind die sphärischen Sechsecke wie in Fig. 2 nicht überschlagen. Andernfalls würden im

sphärischen Bild überschlagene Sechsecke auftreten und für die Definition des Flächeninhalts dieser Sechsecke müßten geeignete Vorzeichen-Festsetzungen getroffen werden.

Das Dreiecksgitter soll nun in irgendeiner Weise verknickt werden. Dabei bleiben die einzelnen Dreiecke starr, die Dreieckswinkel  $\alpha$  also ungeändert, während die Keilwinkel  $\varkappa$  sich ändern. Das sphärische Bild wird demnach bei einer Verknickung des Dreiecksgitters so deformiert, daß zwar die Außenwinkel  $\alpha$  der sphärischen Sechsecke, nicht aber die Seitenlängen  $\varkappa$  erhalten bleiben. Da die Flächeninhalte der sphärischen Sechsecke nur von den Außenwinkeln  $\alpha$  abhängen, gilt folgender Satz:

Bei jeder Verknickung eines Dreiecksgitters bleibt der Flächeninhalt  $\Phi$  des sphärischen Bildes, also auch der Quotient  $\Phi/F$  der Flächeninhalte  $\Phi$  und  $F$  des sphärischen Bildes und des Dreiecksgitters ungeändert.

Dieser Satz ist das finite Analogon des differentialgeometrischen Satzes von der Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes in folgender Formulierung:

Bei jeder Verbiegung eines Flächenstücks ( $df =$  Flächenelement,  $K =$  Gaußsches Krümmungsmaß) bleibt der Flächeninhalt des sphärischen Bildes  $\int K df$  ungeändert.

Die Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes erweist sich hiermit als finite Flächeneigenschaft. Der Grundgedanke der hier angestellten Überlegungen geht auf S. Finsterwalder (Jber. DMV 6 [1897], 1–97) zurück, wurde jedoch von ihm nur auf ein einzelnes Sechseck angewandt. In einer früheren Untersuchung des Verfassers dieser Note (Sitzungsber. der Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abt. 1928, 97–104) wurde die Biegungsinvarianz des Gaußschen Krümmungsmaßes ebenfalls durch die Verknickung von Dreiecksgittern veranschaulicht, jedoch durch etwas kompliziertere Überlegungen, bei denen sich ein finites Analogon des Integralsatzes von Gauß und Bonnet ergab.

### 3. Deformationen ebeneckiger Vierecksgitter bzw. Deformationen von Asymptotenliniennetzen unter Erhaltung der Winkel

Um noch ein weiteres Beispiel für finite Eigenschaften zu geben, betrachten wir Deformationen ebeneckiger Vierecksgitter (Fig. 3), bei denen die Ecken (d. h. die Viererkreuze um die inneren Gitterpunkte) eben und die Viereckswinkel ungeändert bleiben:

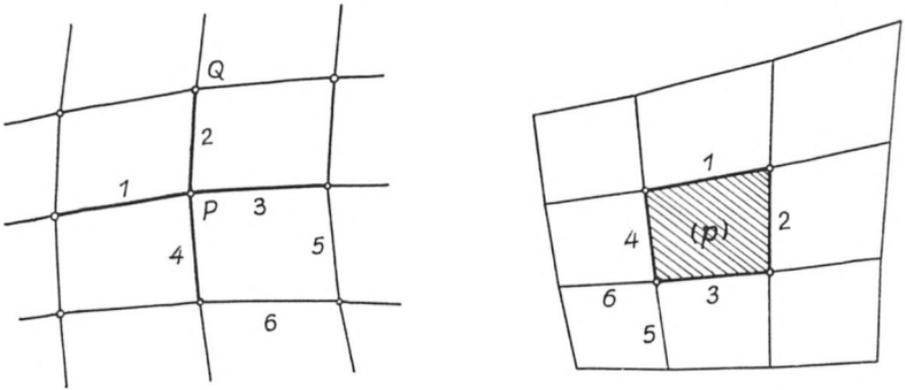


Fig. 3: Parallel-reziproke ebeneckige und ebenflächige Vierecksgitter

Zu jedem ebeneckigen Vierecksgitter lassen sich parallel-reziproke ebenflächige Vierecksgitter angeben, d. h. Vierecksgitter mit ebenen Vierecksmaschen. Die Gitter heißen parallel-reziprok, weil sie durch parallele Seiten aufeinander bezogen sind, und zwar so, daß die Seiten eines Vierecks in einem der beiden Gitter den Seiten eines Viererkreuzes im jeweils anderen Gitter entsprechen (vgl. Fig. 3).

Bekanntlich kann in einem Paar parallel-reziproker Gitter jedes der beiden als Drehriß für eine infinitesimale Verknickung des anderen Gitters aufgefaßt werden. Wenn nun in dem hier betrachteten Fall das ebenflächige Vierecksgitter nicht nur infinitesimal, sondern endlich und kontinuierlich verknickbar ist, so entsprechen diesen Verknickungen Deformationen der parallel-reziproken ebeneckigen Gitter der folgenden Art: Das Gitter bleibt ebeneckig und die Winkel zwischen den Gitterseiten bleiben er-

halten, die Längen der Vierecksseiten und die Keilwinkel zwischen den Ebenen benachbarter Viererkreuze ändern sich jedoch im allgemeinen.

Die Verknickungen ebenflächiger Vierecksgitter sind finite Modelle für Verbiegungen von Flächen: Den ebenflächigen Vierecksgittern entsprechen konjugierte Kurvennetze, und die den Verknickungen der ebenflächigen Vierecksgitter entsprechenden Flächenverbiegungen sind dadurch ausgezeichnet, daß das betreffende Kurvennetz konjugiert bleibt. Die parallel-reziproken ebeneckigen Gitter sind finite Modelle für Asymptotenliniennetze auf Flächen negativen Krümmungsmaßes. Den vorher betrachteten Deformationen der ebeneckigen Gitter entsprechen solche Deformationen der Asymptotenliniennetze, bei denen die Netzkurven Asymptotenlinien bleiben und außerdem die Winkel, unter denen sich die Asymptotenlinien schneiden, sich nicht ändern; die Längen der Netzkurven dagegen ändern sich i. a. bei der Deformation. Die parallel-reziproke Beziehung der ebenflächigen und ebeneckigen Vierecksgitter wird in der Differentialgeometrie zur parallel-reziproken Beziehung zwischen einem konjugierten Kurvennetz und einem Asymptotenliniennetz auf zwei durch parallele Tangentialebenen aufeinander bezogenen Flächen.

Man kennt zwei Klassen verknickbarer ebenflächiger Vierecksgitter,<sup>1</sup> nämlich (*a*) die scheidewinkelgleichen ebenflächigen Vierecksgitter und (*b*) die aus Trapezen aufgebauten profilaffinen und profilkongruenten Gitter. Diese Gitter sind finite Modelle (*a*) für die konjugierten geodätischen Kurvennetze der Voßschen Flächen und (*b*) für die profilaffinen und profilkongruenten Flächen, welche die Dreh- und Gesimsflächen als Spezialfälle enthalten.

Die der Klasse (*a*) zugeordneten ebeneckigen Gitter wurden bereits in einer früheren Arbeit<sup>1</sup> eingehend untersucht. Sie bestehen aus (i. a. nicht-ebenen) Parallelogrammen und sind das finite Analogon der Asymptotenliniennetze auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes. Ihre Deformationen unter Erhaltung der Ebeneckigkeit und der Parallelogrammwinkel sind das finite

---

<sup>1</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden R. Sauer, Elemente der Math. IX, 6 (1954) und X, 1 und X, 2 (1955).

Analogon der Lieschen Transformation der Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes.

Die der Klasse (b) zugeordneten ebeneckigen Gitter, bei denen jeweils die Viererkreuze zu den Seiten eines Trapezes parallel sind, haben die Eigenschaft, daß die eine Schar der Gitterpolygone aus durchlaufenden Geraden  $g$  besteht. Die Geraden  $g$  sind zu einer Ebene  $\varepsilon$  parallel und schneiden eine zur Ebene  $\varepsilon$  senkrechte Gerade rechtwinkelig. Die andere Schar der Gitterpolygone projiziert sich im Grundriß in der Ebene  $\varepsilon$  als eine Schar ähnlicher und ähnlich gelegener Polygone, deren Ecken auf den Grundrissen der Geraden  $g$  liegen. Diese Beziehungen folgen leicht aus der Tatsache, daß im parallel-reziproken Trapeznetz die von den parallelen Trapezseiten erzeugten „Bahnpolygone“ in parallelen Ebenen und die von den Trapezschenkeln erzeugten „Profilpolygone“ in dazu senkrechten Ebenen liegen.

Die soeben beschriebenen ebeneckigen Gitter mit einer Schar durchlaufender Geraden sind ein finites Modell für die Wendelflächen mit variabler Steigung  $z = f(\arctan y/x)$ . Die eine Schar der Asymptotenlinien dieser Flächen sind die geraden Erzeugenden  $z = \text{const}$ , die andere Schar besteht aus verallgemeinerten Schraubenlinien, die sich in der Grundrißebene  $z = 0$  als ähnliche und in bezug auf den Nullpunkt ähnlich gelegene Kurven projizieren. Den Deformationen des finiten Modells entsprechen Deformationen dieser Wendelflächen, bei denen die Wendelflächen wieder in Wendelflächen und ihre Asymptotenlinien wieder in Asymptotenlinien übergehen und außerdem die Schnittwinkel der Asymptotenlinien ungeändert bleiben. Diese den Lieschen Transformationen der Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes analogen Transformationen der Wendelflächen mit variabler Steigung scheinen bisher nicht bemerkt worden zu sein.