BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einige allgemeine Sätze bei Juelschen Ordnungsproblemen

Von **Otto Haupt** und **Hermann Künneth** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 8. Januar 1960

Übersicht

1. Fragestellung

1.1. Als ein Juelsches Problem (bei geometrischen Ordnungen) möge bezeichnet werden jedes Problem, bei welchem der Ordnungswert, abgekürzt OW, des jeweils betrachteten Grundgebildes G erklärt wird vermittelst der Mächtigkeit des Systems der Komponenten des Durchschnittes von G mit je einer, als Ordnungscharakteristik, abgekürzt OCh, bezeichneten Menge K aus einem vorgegebenen System $\mathfrak{k}$.

Die meisten in der Theorie der geometrischen Ordnungen behandelten Probleme sind Juelsche. – Einfachste *Beispiele*: G ist ein Bogen in der euklidischen Ebene E_2 und $\mathfrak{k}$ ein System von Geraden oder von Kreisen in E_2; es ist G ein Kontinuum im euklidischen E_n und $\mathfrak{k}$ ein System von Hyperebenen oder von $(n-1)$-dimensionalen Sphären in E_n, $n \geq 3$.

1.2. In den in Nr. 1.1. erwähnten Beispielen sowie in ziemlich weitgehenden Verallgemeinerungen von ihnen gelten nun gewisse Sätze (vgl. z. B. [1], [2], [3]), die bei weitergehenden Untersuchungen oft und mit Vorteil benutzt werden; es handelt sich hierbei insbesondere um die Verteilung der Ordnungscharakteristiken mit Schnitt- und Stützkomponenten (vgl. Nr. 2.4.), ferner um einen Struktursatz für Kontinua von endlichem Ordnungswert (vgl. Nr. 3.2. und 3.2.1.) sowie um den sogenannten Reduktionssatz (vgl. Nr. 4.3.). Die Beweise für diese Sätze können überdies in den verschiedenen Beispielen ganz analog geführt werden. All dies zeigt an, daß jenen Beispielen und Sätzen ein gemeinsamer Kern zugrunde liegt. Und zwar erweist sich dieser Kern als von topologischer Natur. Das ergibt sich aus dem nachstehend mitgeteilten Axiomensystem. Dieses handelt nämlich nur von topologischen Eigenschaften der Ordnungscharakteristiken und des Grundgebildes. Ihm ordnen sich die oben erwähnten Beispiele und ihre Verallgemeinerungen unter und mit Hilfe von je gewissen Teilen des Axiomensystems läßt sich die Gültigkeit der in Rede stehenden, im Text mit ihrem Wortlaut angeführten Sätze beweisen. Über die bisher bekannten Formulierungen hinaus ergibt sich noch, daß die fraglichen Sätze (mit Ausnahme des verschärften Struktursatzes [Nr. 3.2.1.]) sogar für den Fall endlichen *Komponenten*ordnungswertes (und nicht nur Punktordnungswerts) Geltung besitzen. (Vgl. hierzu [4].)

Das Hervortreten topologischer Sachverhalte ist übrigens keineswegs auf die hier in Rede stehenden Juelschen Probleme beschränkt, sondern auch bei vielen anderen Fragen aus der Theorie der geometrischen Ordnungen zu beobachten, entsprechend der Mittelstellung dieses Fragenkreises zwischen allgemeiner Topologie und der Geometrie (einschließlich der Differentialgeometrie) in speziellen Räumen.

Anmerkung. Der verschärfte Struktursatz (Nr. 3.2.1.) zeigt noch: Im Falle schlichter Überdeckung des Grundraumes durch die Ordnungscharakteristiken und eines Kontinuums von endlichem Punktordnungswert als Grundgebilde ist letzteres stets eine Kurve. Sätze wie der Struktursatz von Nöbeling [5], bei welchem der Grundraum etwa der E_n ist und die Ordnungscharakteristiken eine den E_n überdeckende Parallelschar von k-dimensionalen Ebenen $(1 \leq k \leq n-1)$ bilden, liegen daher außerhalb der durch unsere Axiome abgegrenzten Aufgabenstellung.

1.3. Zur Motivierung der angekündigten Axiome sei hier noch folgendes bemerkt: Bei den in Nr. 1.1. genannten Beispielen läßt sich das Grundgebilde G auffassen als Kompaktum in einem Kompaktum R (d. h. in einem (in sich) kompakten metrischen Raum) und das System $\mathfrak{k}$ als Kompaktum im Raume $\mathfrak{a}$ der Kompakta von R. Außerdem wird – grob gesprochen – R durch jede Ordnungscharakteristik $K \in \mathfrak{k}$ zerlegt in zwei fremde Mengen, die sich mit K stetig ändern. Unsere Axiome formulieren im wesentlichen diese eben genannten Eigenschaften des Problems, wenn auch in einer genaueren Fassung. – Die Beweise sollen in einem, in Vorbereitung befindlichen Buch publiziert werden.

2. Verteilung der Ordnungscharakteristiken mit Schnitt- und Stützkomponenten

2.1. Axiome betr. die Ordnungscharakteristiken.

Es sei R ein Kompaktum und $\mathfrak{a}$ das in üblicher Weise erklärte Kompaktum der Kompakta von R. Die durch die Metrik in R bzw. $\mathfrak{a}$ definierte Topologie sei als S_r- bzw. als S_a-Topologie bezeichnet. Das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken (OCh) sei nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{a}$; und *von je zwei* K', $K'' \in \mathfrak{k}$ *sei keines Teilmenge des anderen.*

Außerdem soll noch gelten:

2.1.1. Es wird R durch jedes $K \in \mathfrak{k}$ je in zwei nicht leere, fremde offene Mengen $R(K; +)$ und $R(K; -)$ zerlegt, in die beiden sog. Seiten von K (in R). Diese beiden Seiten sind stetige Funktionen von K, d. h. bei jeweils geeigneter Wahl von $+$ bzw. $-$ in $R(K; +)$ bzw. $R(K; -)$ soll gelten:

(1) Zu beliebig kleiner Umgebung U_a von K in $\mathfrak{k}$ gibt es eine Umgebung U_r von K in R derart, daß

$$(R - U_r) \frown R(K; +) = (R - U_r) \frown R(K'; +) \quad \text{für jedes } K' \in U_a;$$

(2) Bei beliebigem U_a mit $K \in U_a$ und beliebigem $x \in K$ existiert zu jedem $y \in R(K; \pm)$ ein $K' \in U_a$ derart, daß

$$x \in R(K'; \mp) \text{ und } y \in R(K'; \pm).$$

2.1.2. Es sei $\mathfrak{k}$ in sich kompakt (bezüglich der S_a-Topologie).

Anmerkung: In Nr. 2.4. und Nr. 4.3. genügt lokale Kompaktheit.

2.2. Axiome betr. das Grundgebilde.

Das Grundgebilde G sei ein Kontinuum C in R (d. h. ein mehrpunktiges, zusammenhängendes Kompaktum in R). Für jedes $K \in \mathfrak{k}$ sei $C - C \frown K \neq 0$; und jedes $x \in C$ sei in (mindestens) einem $K \in \mathfrak{k}$ enthalten. Außerdem sei C bezüglich $\mathfrak{k}$ von *endlichem* Komponentenordnungswert, abgekürzt (endlicher) KOW oder KOW $(C; \mathfrak{k})$; d. h. es ist $C \frown K$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$ Vereinigung endlich vieler, paarweise fremder Kontinua C', der Komponenten von $C \frown K$, etwa $C'_1, \ldots, C'_t$, wobei $t =$ KOW $(C; K)$ von K abhängt.

2.3. Definition. Es sei C' eine Komponente von $D = C \frown K$. Ferner sei N eine „Normalumgebung" von C' in R, d. h. eine Umgebung von C', deren abgeschlossene Hülle $\bar{N}$ fremd ist zu $D - C'$. Schließlich sei Q diejenige Komponente von $C \frown N$, in welcher C' enthalten ist. – Es heißt nun C' Schnitt- bzw. Stütz*komponente* von C mit K, je nachdem für hinreichend kleines N sowohl

$$\bar{Q} \frown (\bar{N} - N) \frown R(K; +) \neq 0 \text{ als } \bar{Q} \frown (\bar{N} - N) \frown R(K; -) \neq 0$$

zutrifft bzw. nicht zutrifft.

2.4. Folgerungen. Bei den in Nr. 2.1. und 2.2. aufgeführten Axiomen gilt der

Satz I. *Stetigkeit der Schnittkomponenten*; d. h.: Besitzt C mit K eine Schnittkomponente C', so auch mit jeder, zu K (in $\mathfrak{k}$) hinreichend benachbarten Ordnungscharakteristik K''; und zwar derart, daß eine Schnittkomponente C'' von C mit K'' in beliebiger Umgebung von C' (in R) liegt.

II. *Stetige Überführung von Stützkomponenten in Schnittkomponenten*; d. h.: Ist C' Stützkomponente von C mit K, so gibt es in beliebiger Nähe von K (in $\mathfrak{k}$) eine in $\mathfrak{k}$ offene (nicht leere) Menge $\mathfrak{o}$ derart, daß C mit jedem $K'' \in \mathfrak{o}$ eine zu C' beliebig (in R) benachbarte Schnittkomponente bestimmt.

III. *Diejenigen Ordnungscharakteristiken, welche Stützkomponenten mit C liefern, liegen nirgends dicht in* $\mathfrak{k}$. Das soll heißen: In beliebiger Nähe von K (in $\mathfrak{k}$) gibt es eine (nicht leere, in $\mathfrak{k}$) offene Menge $\mathfrak{o}$ und eine (durch $\mathfrak{o}$ bestimmte) natürliche Zahl n_0 derart, daß $C \cap K'$ für jedes $K' \in \bar{\mathfrak{o}}$ genau n_0 Komponenten besitzt und daß diese sämtlich Schnittkomponenten sind.

Anmerkung. Wie aus dem vorstehenden Satze ersichtlich ist, gilt er auch dann, wenn C von endlichem Komponentenordnungswert ist, nur in einer offenen, in $\mathfrak{k}$ dichten Menge. Man sagt in einem solchen Falle auch, es besitzt C einen schwachen endlichen Komponentenordnungswert (bezüglich $\mathfrak{k}$).

3. Struktursatz für Kontinua bei Systemen von Ordnungscharakteristiken, welche den Grundraum schlicht überdecken

Unter den durch die Axiome in Nr. 2.1. und 2.2. definierten Juelschen Problemen sind diejenigen besonders leicht zugänglich, bei welchen unter anderem der Grundraum R von den Ordnungscharakteristiken schlicht überdeckt wird. Als Beispiel nennen wir den Fall, daß das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken aus allen zu einer festen Hyperebene parallelen Hyperebenen des E_n besteht.

3.1. Weitere Axiome betreffend die Ordnungscharakteristiken.

Die vorstehend erwähnten Juelschen Probleme mit schlichter Überdeckung des Grundraumes durch die OCh werden abgegrenzt durch die folgenden zu Nr. 2.1. hinzutretenden Axiome:

I. Zu jedem $x \in R$ gibt es genau ein $K \in \mathfrak{k}$ mit $x \in K$.

II. Ist $K', K'' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \neq K''$, so gilt entweder $K'' \subset R(K'; +)$ oder $K'' \subset R(K'; -)$.

III. Es sei $K', K'' \in \mathfrak{k}$ und U' eine Umgebung von K' in R derart, daß $R(K'; \pm) \cap (R - U') \neq 0$ ist. Aus $K'' \subset R(K'; \pm) \cap U'$ folgt dann $R(K''; \pm) \subset R(K'; \pm)$.

Zusatz. Ist R zusammenhängend, so folgt Axiom III. aus Axiom I. und II. (unter Berücksichtigung der Axiome in Nr. 2.1.). Ist jedes $K \in \mathfrak{k}$ zusammenhängend, so folgt Axiom II. aus Axiom I.

3.2. Aus den Axiomen in Nr. 2.1., 2.2. und 3.1. folgt nun der

Struktursatz. *Jedes Kontinuum C von endlichem Komponentenordnungswert bezüglich $\mathfrak{k}$ läßt sich darstellen als Vereinigung von abzählbar vielen, paarweise fremden Teilkontinuen T_n von C und einer in R nirgends dichten Menge J. Dabei ist jedes T_n vom Komponentenordnungswert Eins und es ist $J = C - (\bigcup_n T_n)$ Vereinigung von (nicht leeren) Mengen $C \cap K^*$, wobei die K^* eine in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte Menge bilden.*

3.2.1. Sind für *jedes* $K \in \mathfrak{k}$ die Komponenten von $C \cap K$ sämtlich einpunktig, so sagt man, C sei bezüglich $\mathfrak{k}$ von endlichem Punkt*ordnungswert* (wenn C überdies von endlichem KOW ist). Es gilt nun die folgende Verschärfung des Struktursatzes in Nr. 3.2.

Verschärfter Struktursatz. *Ist (unter den Axiomen in Nr. 2.1., 2.2., 3.1.) C von endlichem Punktordnungswert, so ist C abgeschlossene Hülle von $\bigcup_n T_n$ und J ist nirgends dicht in C. Weiter sind die T_n einfache Bogen und C selbst ist reguläre Kurve im Sinne der topologischen Kurventheorie sowie erbliche Bogensumme.*

4. Reduktionssatz

Der in Nr. 2.4. angegebene Satz gibt keine Auskunft über eine etwaige Beziehung zwischen der Anzahl n_0 der (Schnitt-) Komponenten von $C \cap K'$ für $K' \in \mathfrak{o}$ und der Anzahl n der (Schnitt- und Stütz-)Komponenten von $C \cap K$. Bei vielen ordnungsgeometrischen Betrachtungen ist es aber wichtig zu wissen, ob bzw. daß $n \leq n_0$ ist (Reduktionssatz). Ist dies nämlich beispielsweise für einen Bogen B in E_2 von endlichem Komponenten- bzw. Punktordnungswert bezüglich der Geraden der Fall, so kann man schließen: Gibt es eine Gerade H, so daß $B \cap H$ mindestens n Komponenten bzw. Punkte besitzt, unter denen beliebig viele Stützkomponenten sein können, so gibt es Geraden mit mindestens n-Schnittkomponenten bzw. Schnittpunkten. – In Nr. 4.1. werden Axiome bezüglich der Ordnungscharakteristiken angegeben, unter deren Gültigkeit für sog. ordnungsreduzible Kontinua ein Reduktionssatz gilt. Die eben genannten Axiome bilden dabei eine Ergänzung zu denen in Nr. 2.1., während die Axiome in Nr. 3.1. völlig außer Betracht bleiben. (Vgl. Nr. 4.3., Anmerkung.)

4.1. Zusätzliche Axiome bezüglich der Ordnungscharakteristiken.

Wir fordern von $\mathfrak{k}$ (zusätzlich zu Nr. 2.1.):

Es gibt ein System $\mathfrak{e}$ von nicht leeren, abgeschlossenen Teilmengen $E \subset R$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es sei $E_\mu \in \mathfrak{e}$, $\mu = 1, 2, \ldots$, und $D_\mu = E_1 \cap \ldots \cap E_\mu \neq 0$ *echte* Obermenge von $D_{\mu+1}$; dann gibt es eine natürliche Zahl m, für welche D_m *ein*punktig ist.

(2) Ist $x \in K$, so gibt es ein $E \in \mathfrak{e}$ mit $E \subset K$ und $x \in K - E$.

(3) Ist $E \subset K$ mit $E \in \mathfrak{e}$, so ist $K - E$ Vereinigung zweier nicht leerer, fremder, offener Mengen $K(E; \pm)$ der beiden *Seiten* von E in K. Hinsichtlich dieser Seiten soll gelten:

(3.1) Bezeichnet $\mathfrak{b}(E)$ das System aller $K \in \mathfrak{k}$ mit $E \subset K$ und ist $K, K' \in \mathfrak{b}(E)$ (mit $K \neq K'$), so liegen die beiden Seiten von E

in K' auf verschiedenen Seiten von K in R; ist hierbei K' hinreichend benachbart zu K (in $\mathfrak{k}$), so ist $K'(E; \pm)$ beliebig benachbart (in R) zu $K(E; \pm)$ bei passender Wahl von $\pm$.

(3.2) Es sei gesetzt $\alpha = \pm$ und $\beta = \pm$. „Zwischen" einem beliebigen $x \in K(E; \alpha)$ und einem zu x in R benachbarten, im übrigen beliebigen $y \in R(K; \beta)$ verläuft jedes zu $K(E; \alpha)$ hinreichend benachbarte, in $R(K; \beta)$ gelegene $K'(E; \alpha)$, wobei $K' \in \mathfrak{b}(E)$ ist und wobei derartige K' existieren.

4.2. Definition. Es sei C ein Kontinuum in R, welches den Annahmen in Nr. 2.2. genügt, insbesondere also endlichen Komponentenordnungswert besitzt. Ferner sei C' eine Stützkomponente von C mit K, und N' eine (hinreichend kleine) Normalumgebung von C'. Es heißt dann C' innere bzw. nicht-innere *Stützkomponente* (von C mit K), wenn mehr als eine bzw. wenn genau eine Komponente von $C \frown (N' - N' \frown K)$ in C' mündet.

Weiter heiße C ordnungsreduzibel, wenn für jedes $K \in \mathfrak{k}$ folgendes gilt: Es seien T_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, die sämtlichen nicht-inneren Stützkomponenten von C mit K. Dann gibt es *erstens* in K ein $E \in \mathfrak{e}$ derart, daß höchstens eines der T_ϱ fremd ist zu E; wenn *zweitens* zu diesem K und diesen T_ϱ ein $D = E_1 \frown \cdots \frown E_n \neq 0$ mit $D \subset K$ existiert, welches zu keinem der T_ϱ fremd ist, dann kann $E \subset K$ sogar so gewählt werden, daß höchstens eines der T_ϱ fremd ist zu $D \frown E$, wobei $D \frown E$ echter Teil von D ist.

4.3. Es gilt nun der

Reduktionssatz. Vor. (1) *Die Axiome in Nr.* 2.1., 2.2. *und* 4.1. *seien erfüllt.* – (2) *Es sei C ordnungsreduzibel und von endlichem Komponentenordnungswert.*

Beh. *Besitzt $C \frown K_1$ insgesamt t_1 Komponenten, so gibt es in beliebiger Umgebung von K_1 in $\mathfrak{k}$ ein K' derart, daß $C \frown K'$ mindestens t_1 Schnittkomponenten besitzt, die in beliebiger Umgebung (in R) von $C \frown K_1$ liegen.*

Anmerkung. Für den Fall eines den Grundraum schlicht überdeckenden Systems $\mathfrak{k}$ von OCh sind die Voraussetzungen des Reduktionssatzes im allgemeinen nicht erfüllt. (In der Tat ist ja hier die in Nr. 4.1., (3.2.), geforderte Existenz eines $K' \in \mathfrak{b}(E)$ mit zwischen x und y verlaufenden $K'(E;\alpha)$ nicht gesichert.)

Beispiel. In der x, y-Ebene sei $\mathfrak{k}$ das System der Parallelen zur x-Achse. Ferner sei als Grundgebilde G der durch $y = f(x)$ in $-2 \leq x \leq 2$ erklärte Bogen gewählt, wobei $f(x) = x^2(1-x) \cdot \cdot (2-x)$ für $0 \leq x \leq 2$ und $f(x) = f(-x)$ für $-2 \leq x \leq 0$. Die Gerade $x = 0$ hat 5 Punkte mit G gemeinsam, nämlich die beiden Endpunkte ($x = \pm 2$, $y = 0$), den Stützpunkt ($x = 0$, $y = 0$) sowie die beiden Schnittpunkte $x = \pm 1$. Jede Gerade mit $y =$ konst. $\neq 0$ hat aber mit G höchstens 4 Punkte gemeinsam. Die Mengen E sind hier die Punkte der x, y-Ebene.

4.3.1. Der Reduktionssatz der Nr. 4.3. bleibt wörtlich richtig, wenn auf das Axiom (1) in Nr. 4.1. verzichtet und wenn die Definition der Ordnungsreduzibilität folgendermaßen abgeändert wird: Man ersetze „Erstens" durch: In jedem $K \in \mathfrak{k}$ gibt es $E \in \mathfrak{e}$ derart, daß *genau* eine der nicht-inneren Komponenten von $C \frown K$ fremd ist zu E, vorausgesetzt, daß nicht-innere Komponenten von $C \frown K$ überhaupt existieren. Ferner läßt man „Zweitens" fort.

Literatur

[1] Greenspan, D., On vertices of space arcs. Annali di Mat. p. ed appl., (IV) 44 (1957), 45–72.

[2] Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1931), 20–39.

[3] Haupt, Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 200 (1958), 170–181.

[4] Haupt, Limessätze bei geometrischen Ordnungen. Annali di Mat. p. ed appl. (IV) 23 (1944), 123–148.

[5] G. Nöbeling, Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 180 (1939), 129–140.