BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Einführung der δ-Funktionen

Von **Detlef Laugwitz** in Darmstadt[1]

Mit einer Figur

Vorgelegt von Herrn Fritz Bopp am 6. Februar 1959

Übersicht

In der Physik sind seit einigen Jahrzehnten gewisse Rechenmethoden in Gebrauch, welche explizit „unendlich große" und „unendlich kleine" Zahlen verwenden. Auch die δ-Funktion wird vielfach in solcher Weise verwendet, daß etwa der „unendlich große" Wert $\delta(0)$ auftritt.[2] Auch in anderem Zusammenhang hat sich gezeigt, daß die Begriffsbildungen der klassischen Analysis für die Anwendungen nicht ausreichen: Man braucht „uneigentliche" Funktionen, z. B. die Diracsche δ-Funktion.[3]

Hier soll eine Erweiterung der Analysis angegeben und an einigen Anwendungsbeispielen erläutert werden, welche sowohl unendlich kleine und unendlich große Zahlen einführt als auch einen wesentlich größeren Funktionsvorrat besitzt als die gewohnte reelle Analysis, so daß sich die früher uneigentlichen Funktionen, insbesondere die δ-Funktion, mühelos einführen und behandeln lassen. Insbesondere ist zu erwähnen, daß hier solche

[1] Die Note enthält Material aus den Antrittsvorlesungen, die der Verfasser unter dem Titel „Über unendlich kleine Zahlen und δ-artige Funktionen" am 19. 6. 1958 an der TH München und am 30. 6. 1958 an der TH Darmstadt gehalten hat. – Herrn Professor F. Bopp, München, bin ich für mannigfache Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

[2] Man denke auch an die unendlich langen Vektoren im Hilbert-Raum, beispielsweise bei Dirac [1].

uneigentlichen Funktionen an jeder Stelle einen bestimmten Wert besitzen, was bei den anderen Erweiterungen des Funktionsbegriffs[3] nicht zutrifft; dies liegt daran, daß wir hier zunächst den Zahlbegriff erweitern, so daß wir dann allein mit dem klassischen Dirichletschen Funktionsbegriff schon zu einer hinreichend weiten Klasse von Funktionen kommen.

Die Begründung dieser erweiterten Analysis beruht auf einer Arbeit von C. Schmieden und dem Verfasser [4]. Die Grundzüge dieser Analysis werden zur Bequemlichkeit des Lesers in den §§ 1–2 noch einmal zusammengestellt; und zwar wird hier – anders als in [4] – von den reellen und nicht den rationalen Zahlen ausgegangen, was vom Standpunkt der Anwendungen her gewisse Vorteile bietet und auch gelegentlich einfachere Beweise gestattet. In § 3 werden δ-Funktionen definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet. In § 4 wird angedeutet, wie die entwickelten Methoden sich bei der Lösung physikalischer Aufgaben anwenden lassen. In § 5 schließlich wird eine Rechtfertigung für eine sehr bequeme Methode zur Gewinnung der Grundlösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben. Daraus ergibt sich insbesondere eine mathematische Begründung für die in [2] verwendeten Rechenmethoden.[4]

§ 1. Einführung des erweiterten Zahlbereichs

Im folgenden bezeichnen m, n natürliche Zahlen, g, h, k ganze rationale Zahlen, p, q, r, s reelle Zahlen.

Wir verwenden Folgen reeller Zahlen zur Definition der Zahlen des erweiterten Bereichs, dessen Elemente wir mit großen

[3] Von den in der Literatur bereits untersuchten Möglichkeiten für Erweiterungen des klassischen Funktionsbegriffs seien erwähnt: Die Distributionstheorie von L. Schwartz, der Operatorenkalkül von J. Mikusiński und die Theorie der Pseudofunktionen von M. Riesz.

[4] Auf die naheliegende Frage, wie sich unsere Erweiterung zu den in [3] erwähnten verhält, soll an anderer Stelle eingegangen werden. Hier sei nur bemerkt, daß die Äquivalenz der Distributionstheorie mit einem Ausschnitt unserer Analysis sich beweisen läßt. Man zieht dazu einerseits die Definition von Distributionen durch Fundamentalfolgen von Funktionen heran und bildet andererseits aus gewissen unserer Funktionen Klassen.

lateinischen, gelegentlich auch mit griechischen Buchstaben bezeichnen. Eine solche Zahl R wird gegeben durch eine Folge r_m von reellen Zahlen, die keiner weiteren Bedingung unterworfen wird ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Wir schreiben:

$$R = \{r_m\}.$$

(Man denke sich R etwa als Limes – in einem neuen Sinne – der Folge r_m.) Das Rechnen mit diesen neuen Zahlen wird durch die folgenden einfachen Regeln erklärt: Ist $R = \{r_m\}$, $S = \{s_m\}$, dann gilt

$R = S$ genau wenn $r_m = s_m$ für alle m,

$R > S$ genau wenn $r_m > s_m$ für alle m (entsprechend für $<$),

$R + S = \{r_m + s_m\}$ (entsprechend werden die übrigen rationalen Operationen $-, \cdot, :$ durch Ausführung der entsprechenden Operationen für die „Komponenten" r_m, s_m definiert; man beachte, daß die Division nur dann erklärbar ist, wenn alle $s_m \neq 0$!)

Die reellen Zahlen r selbst werden durch die konstanten Folgen $r_m = r$ für alle m in den neuen Zahlbereich isomorph eingebettet.

Der absolute Betrag wird erklärt durch $|R| = \{|r_m|\}$.

Eine Zahl G heißt ganz, wenn in $G = \{g_m\}$ alle Komponenten g_m ganze rationale Zahlen sind. $\Omega = \{m\}$, die Limeszahl der Folge der natürlichen Zahlen m selbst, ist ganz.

Eine Zahl R heiße relativ unendlich groß gegen eine andere, S, in Zeichen $R \gg S$ oder $S \ll R$, wenn beide größer als 0 sind und

$$r_m > n \cdot s_m \quad \text{für jede natürliche Zahl } n \text{ und alle } m \geqq m(n).$$

S heißt dann auch relativ unendlich klein gegen R. Es gilt zum Beispiel

$$1 \ll \Omega \ll \Omega^2.$$

Eine Zahl R mit $R \gg 1$ heißt unendlich groß, eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \ll 1$ heißt unendlich klein oder infinitesimal.

Wir schreiben $R \cong S$, wenn $|R - S| \ll 1$.

Es sei durch $Q_k = (q_{km})$ für jedes k eine Zahl gegeben; dann definiert man die Zahlen

$$S = \sum_{k=G}^{H} Q_k \quad , \quad P = \prod_{k=G}^{H} Q_k$$

für ganze Zahlen $G = \{g_m\}$, $H = \{H_m\}$ mit $G < H$ durch

$$S = \{s_m\} \quad \text{mit} \quad s_m = \sum_{k=g_m}^{h_m} q_{km}$$

$$P = \{p_m\} \quad \text{mit} \quad p_m = \prod_{k=g_m}^{h_m} q_{km}\,.$$

Man zeigt zum Beispiel, daß

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{1}{N}\right) \cong \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}$$

für jede ganze Zahl N mit $N \gg 1$. Die Operationen Σ, Π mit ganzzahligen Grenzen bezeichnen wir als quasirationale Operationen.

Weiteres Material über diesen erweiterten Zahlbereich kann man aus [4] entnehmen.

§ 2. Funktionen; Grundtatsachen der Infinitesimalrechnung

Eine Funktion $F(X)$ ist eine Abbildung einer Untermenge $\mathfrak{D}$ des Zahlbereichs in diesen Zahlbereich. Eine Funktion $F(X)$ heißt stetig im Punkte X_0 ihres Definitionsbereiches $\mathfrak{D}$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ (die nun auch beliebig unendlich klein sein darf) ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß

$$|F(X) - F(X_0)| < \varepsilon \text{ für alle } X \in \mathfrak{D} \text{ mit } |X - X_0| < \delta(\varepsilon).$$

Eine Funktion $F(X)$, die für alle X mit $|X - X_0| < \varrho$ für $\varrho > 0$ definiert ist, heißt differenzierbar in X_0, wenn es eine Zahl $F'(X_0)$ gibt (welche dann übrigens eindeutig bestimmt ist und Ableitung genannt wird), so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\left|\frac{F(X)-F(X_0)}{X-X_0}-F'(X_0)\right|<\varepsilon \text{ für alle } X \text{ mit } 0<|X-X_0|<\delta(\varepsilon), X\in\mathfrak{D}.$$

Auch das Riemannsche Integral läßt sich ähnlich wie sonst erklären.

Es ist wichtig, die gewöhnlichen reellen Funktionen in eindeutiger Weise auf den neuen Bereich zu erweitern; dies geschieht durch die

Stetige Fortsetzung reeller Funktionen:

Sei $f(x)$ definiert für reelle $x \in \mathfrak{d}$ (Definitionsbereich von f) und daselbst reellwertig. Dann wird für die Gesamtheit $\mathfrak{D}$ derjenigen $X = \{x_m\}$, für die $x_m \in \mathfrak{d}$, definiert:

$$F(X) = \{f(x_m)\}.$$

$F(X)$ heißt die stetige Fortsetzung von $f(x)$.

Begriffsbildung und Name rechtfertigen sich durch den folgenden

Satz: *Ist $f(x)$ (gleichmäßig) stetig für alle $x \in \mathfrak{d}$, so ist die stetige Fortsetzung $F(X)$ (gleichmäßig) stetig für alle $X \in \mathfrak{D}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis hier nur für die eingeklammerte Behauptung, also für den Fall der gleichmäßigen Stetigkeit, und überlassen den Rest des Beweises dem Leser. Sei also $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \{\varepsilon_m\}$, ($\varepsilon_m > 0$ reell). Dann existiert nach der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit von f zu jedem ε_m ein reelles $\delta_m = \delta_m(\varepsilon_m)$, so daß

$$|f(x_m)-f(y_m)| < \varepsilon_m \text{ wenn nur } |x_m-y_m| < \delta_m.$$

Definiert man eine Zahl δ des erweiterten Bereichs durch $\delta = \{\delta_m\}$, so folgt durch Zusammenfassung der unendlich vielen Beziehungen aus den Definitionen unmittelbar

$$|F(X)-F(Y)| < \varepsilon \text{ für } |X-Y| < \delta, \quad \delta > 0, \; X, Y \in \mathfrak{D}$$

und das ist die Behauptung.

Wir können also jetzt alle reellen Funktionen in vernünftiger Weise auf den neuen Bereich erweitern. Es ist oft zweckmäßig, für die Erweiterung das gleiche Funktionssymbol zu verwenden wie für die ursprüngliche reelle Funktion, etwa

$$\exp(X) = e^X = \{e^{x_m}\}, \quad \sin X = \{\sin x_m\}.$$

Man verifiziert die Funktionalgleichungen, z. B.

$$e^{X+Y} = \{e^{x_m + y_m}\} = \{e^{x_m} \cdot e^{y_m}\} = \{e^{x_m}\}\,\{e^{y_m}\} = e^X e^Y.$$

Die Gesamtheit der durch stetige Fortsetzung reeller Funktionen entstehenden Funktionen im neuen Zahlbereich ist nun aber für die Anwendungen zu eng, unter ihnen ist z. B. keine Funktion vom Typ der Diracschen δ-Funktion enthalten. Andererseits ist es bisher nicht gelungen, die Analysis für alle Funktionen im neuen Bereich in hinreichendem Umfang aufzubauen. Es gibt nun aber eine Klasse von Funktionen, die die stetig fortgesetzten reellen Funktionen enthält und die für alle bisher bekannten Anwendungen ausreicht. Diese Klasse von „normalen" Funktionen ist beweistechnisch sehr einfach zu behandeln; sie wird folgendermaßen definiert:

Definition.[5] Eine Funktion $F(X)$ heißt *normal* auf der Untermenge $\mathfrak{D}$ ihres Definitionsbereichs, falls die n-te Komponente f_n des Funktionswertes $F(X)$ für $X \in \mathfrak{D}$ nur von x_n (der n-ten Komponente des Arguments) und der Nummer n abhängt.

Normale Funktionen $F(X)$ kann man also schreiben

$$F(X) = \{f_n(x_n)\}$$

mit reellen Funktionen $f_n(x)$, die für alle diejenigen reellen x definiert sind, für die es ein $X \in \mathfrak{D}$ gibt, so daß $x = x_n$. Die Gesamtheit dieser reellen x, die den Definitionsbereich von f_n ausmachen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_n$.

Beispiele für normale Funktionen sind außer den stetig fortgesetzten reellen Funktionen, bei denen $f_n(x) = f(x)$ für alle n,

---

[5] Diese Definition der normalen Funktionen verdanken wir einer freundlichen Mitteilung von Herrn R. A. Rankin in Glasgow. Sie ist weiter als die in [4] Seite 19 angegebene Definition und vermeidet außerdem die Notwendigkeit, normale Mengen von Zahlen zu definieren. Wie ebenfalls R. A. Rankin bemerkt hat, sind die in [4] als Beispiele angegebenen Intervalle z. T. nicht normal.

die quasirationalen Funktionen, die in folgender Weise definiert werden können: Eine Funktion heißt **quasirational**, wenn sie sich durch einen expliziten Ausdruck darstellen läßt, in dem außer Zahlen und der Variablen X nur endlich viele rationale Operationen ($+$, $-$, $\cdot$, $:$) und quasirationale Operationen (Σ, Π) vorkommen. Quasirationale Funktionen sind z. B.

$$X^N = \prod_{k=1}^{N} X$$

und die früher [4], S. 31 angegebenen Beispiele.

Die Komponentenfunktionen $f_n(x_n)$ einer quasirationalen Funktion $F(X)$ sind sämtlich rationale Funktionen über dem reellen Zahlkörper.

Auf normale Funktionen lassen sich die wichtigsten Sätze der reellen Analysis sehr einfach dadurch übertragen, daß die entsprechenden Sätze auf die reellen Komponentenfunktionen angewandt werden. Wir führen das an einigen Beispielen aus. Zuvor beweisen wir den

Satz. *Eine normale Funktion* $F(X) = \{f_n(x_n)\}$ *ist stetig in* $X = \bar{X} \in \mathfrak{D}$ *genau wenn die Funktionen* $f_n(x)$ *im gewöhnlichen Sinne stetig sind jeweils für* $x = \bar{x}_n$.

Beweis. Die Stetigkeit von $F(X)$ in $X = \bar{X}$ besagt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|F(X) - F(\bar{X})| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |X - \bar{X}| < \delta(\varepsilon), \quad X \in \mathfrak{D}.$$

Dies ist nach den Definitionen äquivalent mit

$$|f_n(x_n) - f_n(\bar{x}_n)| < \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |x_n - \bar{x}_n| < \delta_n, \quad x_n \in \mathfrak{d}_n$$

da jedes $x_n \in \mathfrak{d}_n$ wirklich als n-Komponente eines $X \in \mathfrak{D}$ auftritt und zu jedem reellen positiven ε_n ein positives ε existiert, dessen n-Komponente ε_n ist. Damit ist der Beweis geführt.

Ganz ähnlich beweist man, daß mit $f_n(x)$ auch die normale Funktion $F(X) = \{f_n(x_n)\}$ differenzierbar ist und daß $F'(X) = \{f'_n(x_n)\}$. Ferner ist jede in $A \leqq X \leqq B$ stetige und normale Funktion integrierbar, und es gilt

$$\int_A^B F(X)\,dX = \left\{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx\right\}.$$

Auch uneigentliche Integrale, bei denen eine oder beide Grenzen $\pm\infty$ sind, werden erfaßt. Es ist

$$\int_A^\infty F(X)\,dX = \left\{\int_{a_n}^\infty f_n(x)\,dx\right\}.$$

Ist $F(X, Y) = \{f_n(x_n, y_n)\}$ eine normale Funktion zweier Veränderlicher, so gilt für die Differentialgleichung $Y' = F(X, Y)$ der Existenz- und Eindeutigkeitssatz genau wie üblich unter Voraussetzung einer Lipschitzbedingung, wobei die Lipschitzkonstante nun dem neuen Zahlbereich angehören, also z. B. auch unendlich groß sein darf.

Aus dem Nullstellensatz von Weierstraß, angewandt auf die Komponentenfunktionen f_n, folgt: Ist $F(X)$ in $A \leqq X \leqq B$ stetig und normal, und ist $F(A) < 0$, $F(B) > 0$, so gibt es ein X_0 mit $A < X_0 < B$ und $F(X_0) = 0$.

Die Übertragung weiterer Sätze der Analysis nach diesem Rezept wird der Leser mühelos durchführen.

Für das weitere ist es zweckmäßig, die Unterscheidung zwischen großen Buchstaben für die Zahlen des neuen Bereichs und kleinen für den engeren der reellen Zahlen fallen zu lassen. Wir bezeichnen jetzt also auch Zahlen des neuen Zahlbereichs mit kleinen lateinischen Buchstaben, falls nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist.

§ 3. δ-Funktionen

Wir definieren eine Klasse von Funktionen, die das typische Verhalten der δ-Funktion haben, im Nullpunkt unendlich groß zu sein, für endliche Argumentwerte unendlich kleine Werte zu haben und das Integral 1 zu besitzen.

Eine normale Funktion $\delta(x)$, die in $-R \leqq x \leqq R$ (R endlich oder unendlich groß) definiert und stetig sei, heißt δ-artig, wenn sie die beiden Eigenschaften (I) *und* (II) *hat:*

(I) *Es gibt eine positive unendlich kleine Zahl* β, *so daß*

$$\left|\int_a^b \delta(x)\, dx\right| \ll 1 \quad \textit{für alle } a, b \ \textit{ mit } \ a < b < -\beta \ \textit{ oder } \ \beta < a < b$$

(II)
$$\int_{-\beta}^{\beta} \delta(x)\, dx \cong 1\,.$$

(Aus (I) und (II) folgt sofort, daß $\int \delta(x)\, dx \cong 1$ für jedes Intervall, das das Intervall $\langle -\beta, \beta \rangle$ enthält).

Die meisten in den Anwendungen auftretenden δ-artigen Funktionen haben noch eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften:

(III) $\quad \delta(x) > 0$ in $-\beta < x < \beta$.

(IV) $\quad |\delta(x)| \ll 1$ *für* $|x| > \beta$.

(V) $\quad \delta(-x) = \delta(x)$.

Für δ-artige Funktionen mit den Eigenschaften (I) und (II) beweist man mittels des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ohne weiteres, daß (vgl. [4], S. 33)

(1)
$$\int \delta(x)\, f(x)\, dx \cong f(0)$$

für jedes Intervall, das das Intervall $(-\beta, \beta)$ enthält und jede im üblichen Sinne stetige Funktion $f(x)$, welche durch eine endliche Konstante beschränkt ist. Die Voraussetzungen lassen sich für konkrete δ-Funktionen oft abschwächen.

Wir gehen an die Konstruktion einiger wichtiger Typen von δ-artigen Funktionen. Sei $g(x)$ eine Glockenfunktion, d. h. eine stetige Funktion, die in 0 ihr Maximum annimmt ($g(0)$ endlich oder auch unendlich groß), von dort nach beiden Seiten monoton fällt, überall positiv ist und $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1$ erfüllt. Dann zeigt man leicht:

$$\delta(x) = N \cdot g(Nx)$$

ist für jedes $N \gg 1$ δ-artig; es gelten (I)–(IV).

Aus dieser Bemerkung ergeben sich die folgenden Typen von δ-Funktionen.

Beispiel 1.

Es sei

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} .$$

Man erhält

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{N}{1 + N^2 x^2} .$$

Für β kann man etwa wählen $\beta = 1/\sqrt{N}$.
Es gilt

$$\eta(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} Nx = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\, dx$$

Dies ist eine monoton wachsende, stetige Sprungfunktion.

Beispiel 2.

Aus der stetigen Sprungfunktion

$$\eta(x) = 1/1 + \exp(-x N)$$

erhält man durch Differentiation

$$\delta(x) = \frac{N}{4} \left(\cosh \frac{Nx}{2}\right)^{-2} .$$

Beispiel 3.

Die Kastenfunktion

$$g(x) = \frac{1}{1 + (2x)^{2M}}, \quad M \text{ ganz}, \quad M \gg 1$$

führt zu

$$\delta(x) = \frac{N}{1 + (2Nx)^{2M}} .$$

Hier ist

$$\frac{\delta(x)}{N} \cong 1 \quad \text{für} \quad |x| < \frac{1}{2N} - \varepsilon$$

und

$$\delta(x) \cong 0 \quad \text{für} \quad |x| > \frac{1}{2N} + \varepsilon$$

wobei $0 < \varepsilon \ll \frac{1}{2N}$. Man kann also wählen $\beta = \frac{1}{2N} + \varepsilon$.

Beispiel 4.

Eine andere Kastenfunktion ist

$$\delta(x) = \frac{N}{2a(1+(1-a^2+x^2N^2)M)},$$

$|a| < 1$, endlich; $M \gg 1$, $N \gg 1$. Man setze $\beta = \frac{2a}{N} + \varepsilon$.

Beispiel 5.

Für die Anwendungen besonders wichtig ist folgendes Beispiel, bei dem (I)–(III) und (V) erfüllt sind:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{+N} \exp(ikx)\, dk = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Nx}{x}$$

mit $\beta \geqq \frac{\pi}{\sqrt{N}}$. Die Gültigkeit von Gl. (1) geht hier auf Dirichlet zurück und ist aus der Theorie der Fourierschen Reihen bekannt.

Man sieht, daß es eine Fülle verschiedenartiger δ-Funktionen gibt, von denen man jeweils eine dem Problem besonders angepaßte auswählen kann. In den Anwendungen wird man meist in natürlicher Weise auf eine spezielle δ-Funktion geführt.

Wir wollen jetzt einige der am häufigsten gebrauchten Regeln für δ-Funktionen diskutieren. Sie lassen sich hier mit Verschärfungen versehen.

Es gilt als Folge von (IV)

$$x \cdot \delta(x) \cong 0 \tag{2}$$

für $x = 0$ wegen des Verschwindens des ersten Faktors und für endliche x, weil dafür $\delta(x)$ unendlich klein ist. Man beachte aber, daß $x \cdot \delta(x)$ für gewisse unendlich kleine x durchaus endliche Werte haben kann: Für die δ-Funktionen aus Beispiel 1 wird

$$x \cdot \delta(x) = 1/2\pi \quad \text{für} \quad x = 1/N.$$ [6]

Besonders wichtig ist die Multiplikation verschiedener δ-Funktionen. Dazu beweist man zunächst:

---

[6] Für die Anwendungen interessiert allerdings nur, daß wegen (1) gilt $\int x\, \delta(x) f(x)\, dx \cong 0$.

$$\delta(x)\,\bar{\delta}(x) = \gamma\cdot\bar{\bar{\delta}}(x), \tag{3}$$

d. h.: *Zu zwei δ-Funktionen* δ, $\bar{\delta}$ *gibt es eine Zahl* γ *und eine dritte δ-Funktion, so daß* (3) *gilt.* (Der Beweis ergibt sich daraus, daß $\gamma = \int \delta(x)\,\bar{\delta}(x)\,dx$ gesetzt wird und man nachweist, daß $\bar{\bar{\delta}}(x) = \delta(x)\bar{\delta}(x)/\gamma$ tatsächlich eine δ-Funktion ist. Man setze $\bar{\bar{\beta}} = \beta + \bar{\beta}$. Der Fall $\gamma = 0$ ist unmittelbar zu erledigen.)

Wichtig ist, daß auch die folgende Umkehrung gilt: *Zu jeder Zahl* γ *gibt es δ-Funktionen* δ, $\bar{\delta}$, $\bar{\bar{\delta}}$ *mit* (3).

Beweis. Wir wählen δ, $\bar{\delta}$ als Kastenfunktionen aus Beispiel 3, etwa mit N, $\bar{N}$ statt N in den dortigen Formeln. Ist $\bar{N} > N$, so folgt

$$\gamma = \int \delta(x)\,\bar{\delta}(x)\,dx \cong N,$$

und da N beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung zunächst für unendlich große γ.

Um den Beweis auch für die übrigen Werte von γ zu führen, benötigen wir verhältnismäßig pathologische δ-Funktionen. Wir wählen $\delta(x)$ wieder aus Beispiel 3, aber $\bar{\delta}(x)$ wie in der Figur angedeutet. Die Figur gibt in unendlicher Vergrößerung der x-Richtung und unendlicher Verkleinerung in y-Richtung die Verhältnisse in einer infinitesimalen Umgebung von $x = 0$ wieder:

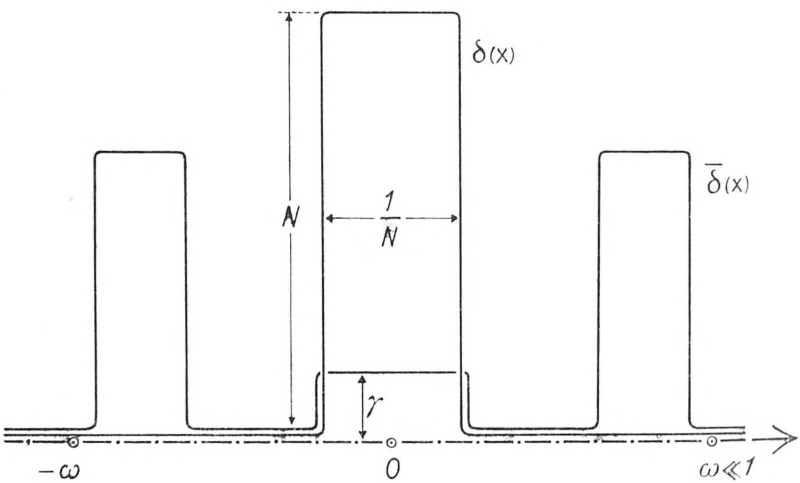

Abb. 1

Man kann sich überlegen, daß tatsächlich nicht beide eingehenden Funktionen glockenförmig sein dürfen, damit für γ nicht gilt $\gamma \gg 1$. Es zeigt sich also, daß für die in den Anwendungen fast ausschließlich verwendeten glockenförmigen δ-Funktionen die Zahl γ in (3) stets unendlich groß ist. In den Multiplikationstheorien von König [3] zur Schwartzschen Distributionstheorie läßt sich lediglich $\delta\delta = c\delta$ mit beliebigen *endlichen* Konstanten c erreichen, was für die Anwendungen sicher unzureichend ist und zeigt, daß tatsächlich eine Analysis gebraucht wird, in der – wie bei uns – mit unendlich großen Zahlen gerechnet werden darf.

Dies bestätigt sich, wenn wir speziell den Fall $\overline{\delta} = \delta$ betrachten. Es gilt nämlich:

In $\delta^2(x) = \gamma\overline{\overline{\delta}}(x)$ *ist notwendig* $\gamma \gg 1$.

Beweis:

Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$1 \cong \left(\int 1 \cdot \delta(x)\, dx\right)^2 \leqq \int dx \cdot \int \delta^2(x)\, dx.$$

Wegen (II) ist mit dem dort eingehenden $\beta \ll 1$:

$$\gamma \cong \int_{-\beta}^{+\beta} \delta^2(x)\, dx \geqq \frac{1-\varepsilon}{\int_{-\beta}^{\beta} dx} = \frac{1-\varepsilon}{2\beta} \gg 1$$

wobei

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\beta} \delta(x)\, dx + \int_{\beta}^{\infty} \delta(x)\, dx$$

unendlich klein ist.

Auch hier läßt sich wieder eine Umkehrung beweisen:

Zu jeder Zahl $\gamma \gg 1$ *gibt es* δ-*Funktionen* δ, $\overline{\overline{\delta}}$ *mit* $\delta^2(x) = \gamma\overline{\overline{\delta}}(x)$.

Dies beweist man wieder mit Kastenfunktionen des Beispiels 3, für die man sofort erhält

$$\int \delta^2(x)\, dx = N,$$

woraus für $N = \gamma$ die Behauptung folgt.

Wir wollen diese Zusammenstellung von Rechenmethoden für δ-Funktionen beschließen mit einer Herleitung der häufig gebrauchten Formel

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} - i\pi\,\delta(x).$$

Offenbar ist diese Formel wegen der Singularität im Nullpunkt bei uns zunächst genau so sinnlos wie in der klassischen Analysis. Nimmt man aber die Funktion

$$l(x) = \log(x + i\alpha)$$

für eine beliebig unendlich kleine Konstante α, so hat man eine für alle x differenzierbare Funktion, die für endliche $|x|$ die Eigenschaft hat

$$l(x) \cong \log|x| \quad \text{für } x > 0$$

und

$$l(x) \cong \log|x| + i\pi \quad \text{für } x < 0,$$

Es ist

$$l'(x) = \frac{1}{x + i\alpha} = \frac{x - i\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \frac{x}{x^2 + \alpha^2} - i\pi\,\delta(x)$$

$$= \frac{1}{x}\big(1 - \alpha\pi\,\delta(x)\big) - i\pi\,\delta(x),$$

wobei $\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$ eine δ-Funktion aus Beispiel 1 ist.

§ 4. Das Prinzip der unendlich kleinen Abänderungen

Wir betrachten vor der Formulierung des für die nachfolgenden Anwendungen grundlegenden Prinzips zwei einfache Beispiele zum Potential eines Massenpunktes. Dieses Potential muß der Poissonschen Gleichung genügen

$$\Delta V = -4\pi\varrho,$$

und weil wir die Situation als kugelsymmetrisch voraussetzen können, $V = V(r)$, bleibt

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV) = -4\pi\varrho(r). \tag{1}$$

Das Potential $\frac{1}{r}$ eines Massenpunktes läßt sich aus dieser Gleichung zunächst nicht direkt, durch einfache Ausführung der Differentiationen, bestätigen. Man kann aber mit unseren Mitteln zu einer direkten Verwendung von (1) gelangen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Beispiel 1. Wir ersetzen $\frac{1}{r}$ durch $V(r) = \frac{1}{r+\alpha}$ mit $0 < \alpha \ll 1$. Hier kann man die Differentiationen in (1) ausführen und erhält

$$\varrho(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{r(r+\alpha)^3}$$

für die Dichte. Diese Dichtefunktion ist tatsächlich außerhalb einer unendlich kleinen Umgebung von $r = 0$ unendlich klein, und man berechnet

$$\int \varrho \, dV = \int_0^\infty \varrho(r)\, 4\pi r^2 \, dr = 1.$$

$\varrho(r)$ ist also eine räumliche δ-Funktion.

Beispiel 2. Man kann auch bereits die Poissonsche Gleichung unendlich wenig abändern, um zu direkt verifizierbaren Lösungen zu gelangen. Wir setzen (Gleichung von Neumann und Seeliger)

$$(\Delta - \alpha)\, V = -4\pi\varrho. \qquad (0 < \alpha \ll 1) \tag{2}$$

Die Lösung von (2) für ein geeignetes δ-artiges ϱ wird sich aus den Methoden des nächsten Abschnitts ergeben. Hier interessiert uns zunächst, daß aus (2) für eine im ganzen Raum konstante Massenverteilung, $\varrho = \varrho_0$, folgt

$$V = \frac{4\pi\varrho_0}{\alpha}.$$

Also ist auch das Potential konstant. Es ergibt sich zwar ein unendlich großer Wert, aber nicht in dem divergenten Sinne der gewohnten Analysis, sondern als eine wohlbestimmte Zahl. Daher hat es auch einen Sinn, durch Differentiation die Gültigkeit von (2) zu bestätigen.

In beiden Beispielen sind Ausdrücke mit unendlich kleinen Abänderungen versehen worden. Man kann allgemein bemerken: Eine physikalische Größe, die ja ohnehin nur mit einer gewissen Genauigkeit bestimmt ist, muß man unendlich wenig abändern dürfen, so daß sich auch die Ergebnisse einer Rechnung, in die diese Größe eingeht, nur unendlich wenig ändern. Man nennt eine Aufgabe „*sachgemäß gestellt*", wenn unendlich kleine Abänderungen der vorgegebenen Größen höchstens unendlich kleine Abänderungen der gesuchten Größen zur Folge haben. Beispiele für solche sachgemäß gestellten Aufgaben sind nach bekannten Sätzen die Anfangswertaufgaben für hyperbolische und für parabolische Differentialgleichungen: Bei unendlich kleiner Abänderung der Anfangswerte ändert sich die Lösung höchstens unendlich wenig. Man kann ganz allgemein sagen, daß physikalische Aufgaben ihrer Natur nach sachgemäß gestellt sein müssen.

Dies führt zur Formulierung eines allgemeinen Prinzips, das wir als das „*Prinzip der unendlich kleinen Abänderungen*" bezeichnen wollen. Es besteht darin, daß *Größen in sachgemäß gestellten Aufgaben mit unendlich kleinen Zusätzen versehen* werden, um dadurch entweder Singularitäten zum Verschwinden zu bringen (Beispiel 1) oder um wie in Beispiel 2 nach der üblichen Auffassung divergente Ausdrücke in solche zu verwandeln, die unendlich große, aber wohlbestimmte Werte haben.

§ 5. Grundlösungen linearer partieller Differentialgleichungen

Es soll das Prinzip der unendlich kleinen Abänderungen und die hier entwickelte Einführung δ-artiger Funktionen zu einer direkten Herleitung der Grundlösungen für eine Klasse von Differentialgleichungen verwendet werden, die die linearen Differentialgleichungen der klassischen und z. T. auch der Quantenphysik umfaßt. Dies gibt eine Rechtfertigung für ein übliches Verfahren, daß z. B. in [2] S. 18 ff. angegeben ist.[7]

[7] Vom Standpunkt der Distributionstheorie hat besonders Malgrange die Grundlösungen linearer Differentialgleichungen untersucht (L. Schwartz, Théorie des distributions I, Paris 1957, p. 135 ff.).

Es sei

(1)

$$D_x = \left(a_0 + \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum a_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \cdots\right)$$

ein linearer Differentialoperator (a_0, a_i, a_{ik}, ... Konstante).

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung

(2) $$D_x G(x) = -\delta(x)$$

heißt eine Greensche Funktion oder Grundlösung. Wir wählen speziell

(3) $$\delta(x) = \frac{1}{\pi^n} \frac{\sin N x_1}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin N x_n}{x_n}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \exp\left(i \sum k_j x_j\right) dk_1 \ldots dk_n .$$

Dies ist nach Beispiel (5) aus § 3 tatsächlich eine δ-Funktion.

Wegen

$$D_x \exp\left(i \sum k_j x_j\right) = P(k_j) \cdot \exp\left(i \sum k_j x_j\right)$$

mit dem Polynom

$$P(k_j) = a_0 + i \sum a_j k_j + i^2 \sum a_{jl} k_j k_l + \cdots$$

hat man für die δ-Funktion (3)

$$D_x G(x) = -\delta(x)$$

mit

(4) $$G(x) = -\frac{1}{2(\pi)^n} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \frac{\exp(i \Sigma k_j x_j)}{P(k_j)} dk_1 \ldots dk_n .$$

Der Ausdruck (4) ist wegen der Integrierbarkeit der stetigen Funktionen immer dann ohne weiteres sinnvoll, wenn $P(k_j)$ keine Nullstellen für reelle k_j hat; allgemeiner darf man den Nenner auch unendlich wenig abändern, um dieses Nichtverschwinden zu erreichen, also $P(k_j) + \alpha(k_j)$ mit $|\alpha(k_j)| \ll 1$ schreiben.[8]

Man kann (4) bekanntlich zur Lösung der allgemeinen inhomogenen Gleichung $D_x \varphi = -q(x)$ verwenden. Dies stellt sich bei uns so dar. Man ersetzt rechts $-q(x)$ durch

$$-\int \ldots \int \delta(x-x')\, q(x')\, dx'_1 \ldots dx'_n ,$$

mit $\delta(x)$ aus (3), was höchstens einen unendlich kleinen Fehler bedingt. Dann folgt für die Lösung

$$\varphi(x) = \int \ldots \int q(x')\, G(x-x')\, dx'_1 \ldots dx'_n .$$

Übrigens wird man in den Anwendungen auch gern andere δ-Funktionen als (3) verwenden, die der speziellen Aufgabe besonders angepaßt sind.

Wir wenden die hergeleiteten Formeln auf einige einfache Beispiele an, die für die Art des Vorgehens charakteristisch sind.

Beispiel 1. Die Poissonsche Gleichung im eindimensionalen Fall (Potential einer homogenen Ebene).

$$D_x \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d x^2} = -q(x).$$

Es folgt aus (4)

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(ikx)}{-(k^2+\gamma)}\, dk ,$$

---

[8] Enthält D_x nur Differentiationen gerader Ordnung, so ist $P(k)$ für reelle k_j reellwertig, und man wähle α rein imaginär. Umgekehrt kann man α reell ansetzen, wenn der Differentialoperator nur Differentiationen ungerader Ordnung enthält. Bei einer einzigen Variablen (gewöhnliche Differentialgleichung) kann man $\alpha(k)$ in folgender Weise bestimmen: $P(k)$ besitzt in diesem Falle nur endlich viele komplexe Nullstellen. Man kann daher eine beliebig unendlich kleine reelle Zahl β so finden, daß das Polynom auf der Parallelen im Abstand β zur reellen Achse keine Nullstellen hat. Man ersetze dann im Nenner des Integranden der Grundlösung $P(k)$ durch $P(k+i\beta)$. – Die unendlich kleine Abänderung, die den Nenner für reelle k nullstellenfrei werden läßt, sichert zugleich auch, da dann ein stetiger und genügend oft stetig differenzierbarer Integrand erhalten wird, die Berechtigung für die oben vorgenommene Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Differentiation.

wobei wir die noch verfügbare unendlich kleine Abänderung $\alpha(k) = \gamma$ mit $0 < \gamma \ll 1$ wählen, um zu erreichen, daß der Nenner keine reellen Nullstellen hat. Es folgt

$$G(x) = \int_{-N}^{+N} \frac{\exp(ikx) - 1}{k^2 + \gamma} \, dk + \int_{-N}^{N} \frac{dk}{k^2 + \gamma} \cong \frac{|x|}{2} + C,$$

wobei

$$C = \int_{-N}^{+N} \frac{dk}{k^2 + \gamma}$$

eine unendlich große Konstante ist. Man sieht, daß dieser Ausdruck für $\gamma = 0$ sinnlos würde; tatsächlich ist die Herleitung in [2] S. 21 aus diesem Grunde durch die hier gegebene zu ersetzen.

Beispiel 2. Die Poissonsche Gleichung im dreidimensionalen Raum

$$\Delta G = -\delta(x)$$

ergibt nach (4), wenn wir dem Nenner wieder eine unendlich kleine positive Konstante γ^2 hinzufügen

$$G = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\exp(i \Sigma k_j x_j)}{\Sigma k_j^2 + \gamma^2} \, dk_1 \, dk_2 \, dk_3 = \frac{\exp(-\gamma r)}{4 \pi r}.$$

Diese Grundlösung ist für endliche r unendlich wenig von $\frac{1}{r}$ verschieden. Sie ist zugleich die Grundlösung der in § 3, Beispiel 2, diskutierten modifizierten Poissonschen Gleichung.

Wir wollen uns hier mit diesen besonders einfachen Beispielen begnügen. Man kann sämtliche Herleitungen von Greenschen Funktionen, die in [2] angegeben sind, mit unseren Methoden präzisieren, worauf hier noch hingewiesen sei.

Literatur:

[1] Dirac, P. A. M.: The principles of quantum mechanics, 3rd ed. Oxford 1947.

[2] Iwanenko, D. u. A. Sokolow: Klassische Feldtheorie. Berlin 1953.

[3] König, H.: Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen. Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Kl., Heft 82. München 1957.

[4] Schmieden, C. u. D. Laugwitz: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math. Zeitschr. 69, 1–39 (1958).