BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zusammenhänge zwischen Vektoranalysis und Krümmungstheorie der Kurvenkongruenzen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 4. Juli 1958

Vor mehr als zehn Jahren hat F. Emde Beziehungen mitgeteilt,[1] die zwischen der Divergenz oder dem Rotor eines Vektorfeldes und gewissen Krümmungsfunktionen der Kongruenz seiner Feldlinien[2] bestehen.

Im folgenden mögen zunächst diese Emdeschen Formeln auf einem neuen Wege abgeleitet werden. Mit ihrer Hilfe sollen danach die bekannten Integralsätze von Gauß und von Stokes auf Kurvenkongruenzen angewandt werden.

1. Die vektorielle Ortsfunktion im dreidimensionalen euklidischen Raum

$$\mathfrak{v} = v\mathfrak{e}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{e}$ einen Einheitsvektor bedeute, besitze alle für die Rechtmäßigkeit der folgenden Schlüsse notwendigen Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften; insbesondere gebe es eine Kongruenz von Raumkurven, deren Tangenten an jeder Stelle

---

[1] Fritz Emde, Der Einfluß der Feldlinien auf Divergenz und Rotor. Archiv für Elektrotechnik, 39 (1948), S. 2–8.

Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Emde an den Verfasser vom 22. 2. 1949 gibt die zitierte Arbeit den wesentlichen Inhalt eines von Herrn Emde im April 1947 in Karlsruhe gehaltenen Vortrags wieder und nahm Ausführungen vorweg, die schon in dem im Jahr 1943 zum Druck gegebenen Manuskript seines Buches über Quirlende elektrische Felder standen, das 1949 in Leipzig erschien.

[2] Hierzu vergleiche man das Literaturverzeichnis zu der Arbeit des Verfassers über die Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen, Math. Zeitschr. 56 (1952), S. 208–218, Fußnote 1, das noch zu ergänzen ist durch den Hinweis auf das Buch von R. v. Lilienthal, Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen, Leipzig 1896.

die Richtung des dem Berührpunkt zugeordneten Feldvektors $\mathfrak{v}$ haben, so daß, wenn $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor eines Punktes und σ die Bogenlänge einer Feldlinie bezeichnet, $\mathfrak{e} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \sigma}$ ist.

Führen wir noch zwei Felder von Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1}$ und $\mathfrak{a}_2 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2}$ ein, die zu $\mathfrak{e}$ und untereinander senkrecht sind, und zwar so, daß $\mathfrak{e} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ ist, so können zwei für das Feld $\mathfrak{e}$ oder, was dasselbe ist, für die Kurvenkongruenz charakteristische skalare Ortsfunktionen, die „mittlere Schränkung" A und die „mittlere Spreizung" B auf folgende Weise ausgedrückt werden:[3]

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_1 \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_2} - \mathfrak{a}_2 \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_1}\right), \tag{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_1 \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_1} + \mathfrak{a}_2 \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_2}\right). \tag{3}$$

Nun kann man den Hamiltonschen Operator an jeder Raumstelle in dem im allgemeinen nichtintegrablen Bezugssystem der Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{e}$ folgendermaßen darstellen:

$$\nabla = \mathfrak{e} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \mathfrak{a}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathfrak{a}_2 \frac{\partial}{\partial s_2}; \tag{4}$$

die räumliche Veränderlichkeit der Richtungen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ stört nicht, solange man nicht auf sie bezogene Koordinaten benützt.

Daher findet man, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{e}^2 = 1$ das Verschwinden von $\mathfrak{e} \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \sigma}$ zur Folge hat, nach (3)

$$\operatorname{div} \mathfrak{e} = 2B. \tag{5}$$

Bedenkt man, daß die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_2}$ zu $\mathfrak{e}$ senkrecht sind, so daß $\mathfrak{a}_i \times \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_i} = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}\mathfrak{a}_i \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_i}$ ist, und wendet man auf $\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \sigma}$

---

[3] Das kann man den Gleichungen (10), (13′) und (14′) auf S. 211 und S. 213 der in Fußnote 2 angeführten Arbeit unmittelbar entnehmen. Dort ist, wie schon auf ganz andere Weise in dem in Fußnote 1 genannten Emdeschen Buch, die geometrische Bedeutung der Größen A und B auseinandergesetzt; $-A$ und B werden von Emde als mittlere Drillung σ bzw. als mittlere Spreizung ϱ bezeichnet. Über die Autoren, die sich schon in früheren Zeiten mit diesen Begriffen beschäftigt haben, ist in der in Fußnote 2 zitierten Arbeit auf S. 209, Fußnote 2, berichtet.

die erste der Frenetschen Formeln der Kurventheorie an, die $\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \sigma} = k\mathfrak{h}$ ergibt, wo k die Krümmung und $\mathfrak{h}$ den Einheitsvektor der Hauptnormalen der Kongruenzlinie bedeutet, so erhält man, mit der Bezeichnung $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{h}$ für den Binormalenvektor, aus (2)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{e} = k\mathfrak{b} - 2A\mathfrak{e}. \tag{6}$$

(5) und (6) sind die Formeln von Emde;[4] aus ihnen folgen auf Grund bekannter Beziehungen der Vektoranalysis unmittelbar die Verallgemeinerungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 2Bv + \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \tag{5'}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = kv\mathfrak{b} - 2Av\mathfrak{e} - \mathfrak{e} \times \operatorname{grad} v. \tag{6'}$$

Aus (6) folgt unmittelbar

$$\mathfrak{e} \operatorname{rot} \mathfrak{e} = -2A. \tag{6''}$$

2. Es liegt nahe, auf (5′) und (6′) den Gaußschen bzw. den Stokesschen Integralsatz anzuwenden; wir finden, wenn V einen Raumbereich und $\mathfrak{O}$ seine Oberfläche, dV das Volumelement, $d\mathfrak{f}$ das vektorielle Flächenelement von $\mathfrak{O}$ bedeutet, aus (5′)

$$\int\limits_V \left(2Bv + \frac{\partial v}{\partial \sigma}\right) dV = \int\limits_{\mathfrak{O}} v\mathfrak{e}\, d\mathfrak{f}, \tag{7}$$

ferner, wenn $\mathfrak{B}$ einen einfach zusammenhängenden Bereich einer das Feld durchsetzenden Fläche, γ seine orientierte Randkurve, $d\mathfrak{f}$ das vektorielle Flächenelement von $\mathfrak{B}$, $d\mathfrak{r}$ das vektorielle Linienelement von γ bezeichnet, aus (6′)

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} (kv\mathfrak{b} - 2Av\mathfrak{e} - \mathfrak{e} \times \operatorname{grad} v)\, d\mathfrak{f} = \int\limits_{\gamma} v\mathfrak{e}\, d\mathfrak{r}. \tag{8}$$

3. Durch spezielle Wahl der skalaren Ortsfunktion v läßt sich aus (7) eine Integralinvariante für eine Röhre von Kongruenz-

[4] Sie stehen in der in Fußnote 1 angegebenen Arbeit auf S. 6; die Gleichungen am Schluß dieser Arbeit auf S. 8 enthalten die Verallgemeinerungen des Textes. Siehe auch die Beziehungen (14) und (15) auf S. 103 des in Fußnote 1 genannten Emdeschen Buches.

kurven gewinnen; darunter wollen wir eine sich selbst nicht durchdringende Fläche verstehen, die aus denjenigen Feldlinien besteht, die durch die Punkte einer geschlossenen Raumkurve gehen. Für die Punkte einer solchen Röhrenfläche ist $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{f} = 0$; schließen wir durch zwei Flächen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ einen Raumteil V innerhalb einer Röhre ein, so gilt folglich bei geeigneter Orientierung von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$

$$\int\limits_V \left(2\, B v + \frac{\partial v}{\partial \sigma}\right) \; dV = \int\limits_{\mathfrak{B}_2} v \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f} - \int\limits_{\mathfrak{B}_1} v \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f}.$$

Bestimmen wir nun die Ortsfunktion v so, daß in V überall $2\, B v + \frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$ wird, wählen wir also $v = v_0\, e^{-2\int_{\sigma_0}^{\sigma} B\, d\sigma}$, wobei das Integral längs jeder Kongruenzlinie von ihrem Durchdringungspunkt mit der Fläche $\mathfrak{B}_1$ an erstreckt zu denken ist und v_0 als beliebige Ortsfunktion auf $\mathfrak{B}_1$ angenommen sei, so wird foglich

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_2} v_0\, e^{-2\int_{\sigma_0}^{\sigma} B\, d\sigma}\; \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f} = \int\limits_{\mathfrak{B}_1} v_0\, \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f}\,.$$

Demnach erweist sich insbesondere

$$I = \int\limits_{\mathfrak{B}} e^{-2\int_{\sigma_0}^{\sigma} B\, d\sigma}\; \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f} \tag{9}$$

als eine Integralinvariante der Röhre, die aus den durch die Randpunkte von $\mathfrak{B}$ gehenden Kongruenzlinien gebildet ist.

4. Aus (8) möge zunächst die bekannte geometrische Bedeutung des identischen Verschwindens von A streng bewiesen werden.

Wenn es möglich sein soll, durch einen beliebigen Raumpunkt eine Orthogonalfläche durch die Kurvenkongruenz zu legen, so muß für einen ihn enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}$ der Fläche, da $d\mathfrak{f}$ senkrecht zu $\mathfrak{b}$ und zu $\mathfrak{c} \times \operatorname{grad} v$ sein und längs des Randes γ überall $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{r}$ verschwinden soll, für jede Funktion v des Ortes $\int\limits_{\mathfrak{B}} A\, v\, \mathfrak{c}\, d\mathfrak{f} = 0$ sein; daraus folgt, daß überall $A = 0$ sein muß.

Wird umgekehrt dies gefordert, so ergibt sich etwa für $v = 1$, da dann

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} (k\mathfrak{b} - 2\, A\, \mathfrak{c})\, d\mathfrak{f} = \int\limits_{\gamma} \mathfrak{c}\, d\mathfrak{r} \tag{8'}$$

ist: Auf jeder Fläche, die von einer Schar solcher Kurven gebildet wird, die lauter Binormalen von Kongruenzkurven oder, falls $k = 0$ ist, beliebige ihrer Normalen zu Tangenten haben, für die also auf der ganzen Fläche $\mathfrak{b}\, d\mathfrak{f} = 0$ ist, gilt für jede geschlossene Kurve $\int\limits_{\gamma} \mathfrak{e}\, d\mathfrak{r} = 0$. Legt man eine solche Fläche $\mathfrak{B}$ durch irgendein zur Kongruenz orthogonales Kurvenstück γ_1, das selbst nicht zur Menge der Binormalenkurven gehört, so kann man ein ganz beliebiges Kurvenstück γ_2 auf $\mathfrak{B}$ mit einem Stück von γ_1 durch zwei Stücke γ' und γ'' der Binormalenkurven zu einer geschlossenen Linie γ vereinigen, für die $\int\limits_{\gamma} \mathfrak{e}\, d\mathfrak{r} = 0$ ist; weil dieses Integral längs γ_1, γ' und γ'' verschwindet, muß also für jede Kurve γ_2 auf $\mathfrak{B}$ gelten $\int\limits_{\gamma_2} \mathfrak{e}\, d\mathfrak{r} = 0$. Diese Fläche ist demnach eine Orthogonalfläche der Kongruenz.

5. Unter der Annahme $v = 1$ findet man aus (8) für zwei Stücke $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von Kongruenzlinien, die auf einem aus solchen gebildeten Flächenstreifen $\mathfrak{B}$ zwischen zwei auf $\mathfrak{B}$ verlaufenden Orthogonaltrajektorien der Kongruenz liegen, da $\mathfrak{e}\, d\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{B}$ verschwindet, $\int\limits_{\mathfrak{B}} k \mathfrak{b}\, d\mathfrak{f} = \int\limits_{\gamma} \mathfrak{e}\, d\mathfrak{r}$, wo γ den aus Stücken der Kongruenzkurven und der Orthogonaltrajektorien zusammengesetzten Rand von $\mathfrak{B}$ bedeutet; bezeichnen wir mit ϑ den Winkel zwischen der Binormalen und der Flächennormalen und mit df das skalare Flächenelement, so folgt, da für das Element $d\mathfrak{r}$ einer Kongruenzlinie $\mathfrak{e}\, d\mathfrak{r} = d\sigma$ gilt, für die Längen σ_1 und σ_2 von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int\limits_{\mathfrak{B}} k \cos \vartheta \, df.$$

6. Gelingt es, in (8) die Ortsfunktion v so zu wählen, daß $k v \mathfrak{b} - \mathfrak{e} \times \operatorname{grad} v$ im betrachteten Bereich überall verschwindet, so erhält man eine besonders einfache Integralformel. Das ist aber nicht bei jedem Feld möglich, sondern nur, wenn es sich um eine Kongruenz von Lichtstrahlen in einem isotropen Medium handelt. Denn diese sind bekanntlich, wenn $v = n$ der Brechungsindex ist, durch die Extremalforderung $\delta \int\limits_{P_1}^{P_2} n\, d\sigma = 0$ längs jedes Lichtstrahls zwischen zwei beliebigen, festgehaltenen seiner

Punkte P_1 und P_2 bestimmt. Ohne auf Einzelheiten einzugehen und unter Verzicht auf die Berücksichtigung von Unstetigkeitsflächen der Funktion n wollen wir nach der klassischen Methode der Variationsrechnung die Differentialgleichung für die ∞^4 Lichtstrahlen ableiten; es erweist sich dabei als sehr vorteilhaft, $d\sigma$ durch $\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r}$ zu ersetzen: dann wird – die Integrationsgrenzen seien weggelassen –

$$\delta \int n\, d\sigma = \int \delta(n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r}) = \int (\delta\, n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r} + n\,\delta\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r} + n\,\mathfrak{e}\,\delta\,d\mathfrak{r}).$$

Da aus $\mathfrak{e}^2 = 1$ folgt $d\mathfrak{r}\,\delta\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,\delta\mathfrak{e}\,d\sigma = 0$, und weil $\delta n = \delta\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,n$ ist, wird somit

$$\delta\int n\,d\sigma = \int(\delta n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r} + n\,\mathfrak{e}\,d\delta\mathfrak{r}) = \int \delta\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,n\,d\sigma + n\,\mathfrak{e}\,\delta\mathfrak{r}\Big/_{P_1}^{P_2} - \int \delta\mathfrak{r}\,d(n\,\mathfrak{e}).$$

Da in P_1 und in P_2 $\delta\mathfrak{r} = 0$ sein soll, muß demnach für jede Vektorfunktion $\delta\mathfrak{r}$ von σ

$$\int \delta\mathfrak{r}\left(\mathrm{grad}\,n - \frac{d}{d\sigma}(n\,\mathfrak{e})\right) d\sigma = 0$$

sein, woraus unter den bekannten Voraussetzungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(n\,\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\sigma}\right) = \mathrm{grad}\,n \tag{10}$$

oder

$$n\,k\,\mathfrak{h} + \mathfrak{e}\,\frac{\partial n}{\partial\sigma} = \mathrm{grad}\,n.$$

Hieraus ergibt sich wegen $\mathfrak{e}\times\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$

$$n\,k\,\mathfrak{b} - \mathfrak{e}\times\mathrm{grad}\,n = 0;$$

es ist zu beachten, daß diese Beziehung mit der vorhergehenden gleichbedeutend ist, da man sie aus ihr zurückgewinnen kann, weil die Komponente von $\mathrm{grad}\,n$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ notwendig $\mathfrak{e}\,\dfrac{\partial n}{\partial\sigma}$ sein muß.

Für Lichtstrahlkongruenzen und nur für solche gilt also nach (8)

$$2\int_{\mathfrak{B}} A\,n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{f} + \int_{\gamma} n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r} = 0.$$

Hieraus folgen auf besonders einfache Weise die bekannten geometrischen Sätze über Lichtstrahlen:[5]

Zunächst ergibt sich, wenn $\mathfrak{B}$ als Fläche angenommen wird, die aus einer Schar von Lichtstrahlen besteht, so daß auf $\mathfrak{B}$ überall $\mathfrak{e}\,d\mathfrak{f} = 0$ ist, daß irgend zwei auf $\mathfrak{B}$ verlaufende orthogonale Trajektorien der Lichtstrahlen, für die $\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r}$ verschwindet, aus zwei beliebigen von diesen Stücke gleich großen Lichtwegs $\int n\,d\sigma$ ausschneiden; ja, für beliebige auf $\mathfrak{B}$ zwischen den Orthogonaltrajektorien sich hinziehende Kurvenstücke besitzt das Integral $\int n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r}$ den gleichen Wert. Man braucht, um dies zu erkennen, nur γ aus Stücken der Orthogonaltrajektorien und zwei andern Kurven auf $\mathfrak{B}$ zusammengesetzt zu denken.

Weiter ist unmittelbar zu sehen, daß $\oint n\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{r}$ für einen eine Röhre aus Lichtstrahlen einfach umschlingenden Integrationsweg eine Invariante der Lichtröhre ist, da auf der Röhrenfläche überall $\mathfrak{e}\,d\mathfrak{f} = 0$ ist. Auch die bekannte geometrische Deutung dieser Invariante erscheint unmittelbar einleuchtend.

Wenn schließlich $\mathfrak{B}$ als ein von γ berandetes, ein Lichtstrahlenbündel im Innern einer Röhre durchsetzendes Flächenstück gewählt wird, so führt dies auf den Satz: Wenn auf einer eine Lichtröhre durchsetzenden Fläche überall A verschwindet, so geschieht das in allen Punkten des Raumes innerhalb der Röhre.

Die Emdeschen Formeln erlauben, wie man sieht, in mannigfacher Weise Zusammenhänge zwischen vektoranalytischen Eigenschaften eines Vektorfeldes und geometrischen Eigenschaften der Kongruenz seiner Feldlinien zu untersuchen.

---

[5] Siehe etwa M. Herzberger, Strahlenoptik, Berlin, 1931, oder C. Carathéodory, Geometrische Optik, Berlin, 1937.