

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

**Ueber die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies  
aus dem Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen.**

Von dem Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel.

Im Jahr 1780.

Verlag des Buchhändlers Johann Friedrich Hartmann in Freiberg.

Das Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen, das seit mehreren Jahren unter der Leitung des Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist. Das Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen, das seit mehreren Jahren unter der Leitung des Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist. Das Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen, das seit mehreren Jahren unter der Leitung des Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist.

Das Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen, das seit mehreren Jahren unter der Leitung des Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist. Das Schmelzbleiwerk zu Freiberg in Sachsen, das seit mehreren Jahren unter der Leitung des Herrn Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist.

\* Nach dem H. Hofrathen Dr. Johann Friedrich Schlegel, als eines der besten in Sachsen, betrieben wird, hat sich durch die vorzüglichsten Eigenschaften des Schmelzbleies, das daraus hervorgeht, einen Namen erworben, der in allen Theilen Deutschlands, und in vielen andern Ländern, bekannt ist.

Es sei als typischer Fall angenommen, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt. Dann ist zu erwarten, daß die Wahrscheinlichkeit, daß er sich in der Reichshauptstadt aufhält, umgekehrt proportional zu der Wahrscheinlichkeit, daß er sich in der Reichshauptstadt aufhält, umgekehrt proportional zu der Wahrscheinlichkeit, daß er sich in der Reichshauptstadt aufhält.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

### Reichshauptstadt

1. die Reichshauptstadt
2. die Reichshauptstadt
3. die Reichshauptstadt

Es sei nun die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist

1. die Reichshauptstadt
2. die Reichshauptstadt
3. die Reichshauptstadt

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist

<sup>1</sup> Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann zu einem Zeitpunkt, der nach dem 1. April 1933 und dem 1. April 1934 liegt, seinen Wohnsitz von der Reichshauptstadt nach der Reichshauptstadt verlegt, ist.

hängiger Proportionalitätsfaktor ist. Die Bewegungsgleichung einer solchen „Saite mit Kräften“ lautet:

$$-\sigma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + K\Psi = -\varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Diese Gleichung entspricht der Feldgleichung (1) nicht. Sucht man aber nun die stehenden Wellen der Saite

$$\Psi = \psi(x) \cos \omega_s t \quad \omega_s: \text{Kreisfrequenz der Saite} \quad (5)$$

auf, so ergibt sich aus (5) und (4) als Gleichung für die Amplitudenfunktionen  $\psi$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\sigma} (K - \varrho \omega_s^2) \psi. \quad (6)$$

Um die Entsprechung zwischen den Gleichungen (3) und (6) für die Konstruktion von Modellen ausnützen zu können, ist es zweckmäßig, für die Koordinate des quantentheoretischen Problems eine neue Maßeinheit  $x'_0$  so festzulegen, daß  $x'_0$  von der Größenordnung der Erstreckung der durch  $v$  dargestellten Potentialmulden ist. Das bedeutet, daß man in (3) die neue Variable  $x$  durch

$$x = \frac{x'}{x'_0} \quad (7)$$

einführt. So nimmt (3) die Form

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2 m x'_0{}^2}{\hbar^2} [v(x x'_0) - \hbar \omega] \psi. \quad (8)$$

an.

Jetzt wählt man die Kraftfunktion  $K = K(x)$  des Saitenmodells so, daß

$$\frac{1}{\sigma} K(x) = \frac{2 m x'_0{}^2}{\hbar^2} v(x x'_0) \quad (9)$$

ist.

Dann bestimmt man durch Resonanzversuche die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{s,n}$  der Saite. Zu jeder von diesen bildet sich auf der Saite eine stehende Welle aus, deren Amplitudenfunktion genau einer Amplitudenfunktion des analogen feldtheoretischen Problems entspricht. Aus den Eigenfrequenzen  $\omega_{s,n}$  der Saite, er-

rechnen sich die Kreisfrequenzen  $\omega_n$  der stehenden Kathodenfeldwellen nach

$$\frac{2 m x_0'^2 \omega_n}{\hbar} = \frac{e}{\sigma} \omega_{sn}^2 \quad \text{zu} \quad \omega_n = \frac{e \hbar}{2 m x_0'^2 \sigma} \omega_{sn}^2. \quad (10)$$

Den  $\omega_n$  kommt natürlich wegen der Willkürlichkeit des  $v$ -Nullpunktes keine Absolutbedeutung zu. Nur Differenzen von  $\omega_n$ -Werten haben unmittelbare physikalische Bedeutung. Schwingungsvorgänge auf der Saite, bei denen gleichzeitig mehrere stehende Wellen angeregt sind, besitzen, da die Frequenzen in beiden Fällen in verschiedener Weise eingehen, kein quantentheoretisches Analogon.

Zur annähernden Realisierung für Demonstrationen wird es genügen, die „Saite mit Kräften“ durch ein System von Drehpendeln zu ersetzen, die auf ein Torsionsband aufgereiht sind und an denen durch Federmechanismen oder geeignet angewendete Schwerkraftwirkung zusätzliche rücktreibende Kräfte angreifen.

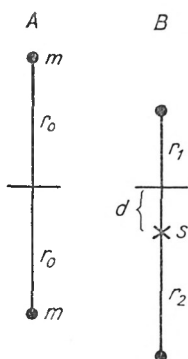


Abb. 1

A und B (Abb. 1) seien zwei Typen von in der Normallage vertikalen Torsionspendeln, die aus je zwei Massen  $m$  bestehen. Wenn  $r_1$  und  $r_2$  so gewählt sind, daß

$$r_1 = \sqrt{2 r_0^2 - r_2^2} \quad (11)$$

ist, haben A und B dasselbe Trägheitsmoment  $\Theta = 2 m r_0^2$ . Die auf Pendel B von der Schwere herrührende rücktreibende Kraft

für einen Punkt, der nicht in einem der angegebenen Punkte liegt, ist

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) \right). \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass die Durchschnittswerte der Funktion  $f(x)$  über einem Intervall  $[a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  durch  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  gegeben sind. Sei  $n = b - a$  die Länge des Intervalls. Dann gilt  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{a+b+1}{2}\right) + f\left(\frac{a+b-1}{2}\right) \right)$ . Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a+b+1-k}{2}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a+b-1+k}{2}\right)$ . Da  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar ist, konvergiert die rechte Seite gegen  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .



Abb. 1

Es ist hier leicht zu erkennen, dass die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$  darstellt. Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ . Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ . Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ .

Wir zeigen nun, dass die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$  darstellt. Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ . Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ . Die Mittelwertfunktion  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  ist die durchschnittliche Funktionswerte über dem Intervall  $[a, b]$ .