BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geq 2$)

Herrn Georg Faber zum achtzigsten Geburtstag gewidmet

Von **Otto Haupt** in Erlangen

Vorgelegt am 14. Dezember 1956

Einleitung

1. Im Zusammenhang mit Bemerkungen über dualisierbare Bogen in der Ebene wurde gezeigt, daß jede „nadelfreie" stetige Kurve[1] ohne parallele Paratingenten ein Konvexbogen ist (vgl. [4]). Bei dieser Gelegenheit wurde die Bestimmung (a) der ebenen Kontinua und (b) der (nicht „nadelfreien) stetigen Kurven in der Ebene ohne parallele Paratingenten in Aussicht genommen. Die Antwort auf die Frage (a) lautet (vgl. [5] sowie Genaueres in Nr. 2.3. der gegenwärtigen Mitteilung): *Jedes ebene Kontinuum K ohne parallele Paratingenten ist entweder ein Konvexbogen (ohne parallele Paratingenten) oder ein Stern von endlichem Komponentenordnungswert.* Dabei ist verabredet: Ist die Gerade G Paratingente an K in r verschiedenen Punkten von K, von denen keine zwei der gleichen, in K enthaltenen Strecke angehören, so wird G als genau r verschiedene parallele Paratingenten an K gezählt ($r \geq 2$).

2. Bei der Behandlung der in Ziff. 1 genannten Frage (a) zeigt sich, daß wesentliche Teile der Betrachtungen auch für den Fall eines Kontinuums im euklidischen n-dimensionalen Raum ($n \geq 3$) gültig bleiben, wenn die Forderung des Fehlens paralleler Paratingenten im Fall $n = 2$ geeignet für den Fall $n \geq 3$ verallge-

---

[1] Unter einer stetigen Kurve wird hier verstanden das Tripel ($K; f(t)$, $t \in J$), wobei K ein im Kleinen (oder lokal) zusammenhängendes Kontinuum und $f(t)$ eine eindeutige, stetige Abbildung der abgeschlossenen Strecke J auf K bedeutet.

meinert wird. Die von uns gewählte Verallgemeinerung ergibt sich aus folgender Bemerkung: Legt man für $n = 2$ die affine Ebene E_2 zugrunde, d. h. adjungiert man zur euklidischen Ebene eine uneigentliche Gerade, so sind deren Punkte ein-eindeutig den verschiedenen „Richtungen" in der euklidischen Ebene zugeordnet; und es können so je zwei parallele bzw. nicht-parallele Geraden in der Ebene bezeichnet werden als solche mit linear abhängigen bzw. mit linear unabhängigen Richtungen, kurz als richtungsabhängig bzw. als richtungsunabhängig. Dementsprechend erklären wir allgemein im affinen n-dimensionalen Raum E_n mit $n \geq 2$, je n Geraden G_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, als solche mit linear abhängigen bzw. unabhängigen Richtungen, kürzer als *richtungsabhängig* bzw. -unabhängig, wenn die G_ν Treffgeraden eines und des nämlichen $(n - 2)$-dimensionalen linearen Teilraumes der uneigentlichen Hyperebene des E_n sind oder nicht sind. Unter der gleichen Verabredung bezüglich der Vielfachheitszählung für Paratingenten bei $n \geq 3$ wie bei $n = 2$ (vgl. Ziff. 1) erhält man den Satz (vgl. [5] sowie Genaueres in Nr. 2.3. der gegenwärtigen Mitteilung): *Jedes Kontinuum im affinen E_n, mit $n \geq 3$, ohne n richtungsabhängige Paratingenten ist ein einfacher differenzierbarer Bogen, dessen Durchschnitt mit jeder Hyperebene höchstens n Komponenten besitzt und dessen (etwa vorhandene) hyperebene Teilbogen sämtlich Strecken sind.*

3. In der vorliegenden Mitteilung sollen die in Ziffer 1. und 2. angeführten Sätze bewiesen werden. Man wird dabei zu weiteren Fragen geführt, beispielsweise zur Frage nach denjenigen Kontinuen, die keine n richtungsabhängige Paratingenten besitzen, wenn abgesehen wird von einer im Raum der Richtungen nirgends dichten Menge (oder also von einer in der uneigentlichen Hyperebene nirgends dichten Punktmenge). Ferner erhebt sich die Frage nach der Gestalt der stetigen Kurven, die mit jeder Hyperebene höchstens n Teilbogen gemeinsam haben.

Übrigens ist die in Ziffer 1 genannte Frage (b) inzwischen ebenfalls beantwortet (vgl. [10], [11]). Wir werden auf die anderen erwähnten Probleme sowie auf weitere Eigenschaften der in Ziff. 2 genannten Bogen im E_n (mit $n \geq 3$) an anderer Stelle zurückkommen.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen

Der Grundbereich, in dem alle Betrachtungen dieser Arbeit sich abspielen, ist der n-dimensionale affine Raum E_n oder vielmehr, da wir nur mit beschränkten Mengen, also nur mit eigentlichen Punkten zu tun haben, der *euklidische* E_n; soweit nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, ist $n \geq 2$ (d. h. der Fall der Ebene ($n = 2$) ist einbegriffen). Die k-dimensionalen linearen Unterräume des E_n werden kurz als k-Ebenen bezeichnet, wobei $1 \leq k \leq n - 1$ ist; für $k = 1$ bzw. $k = n - 1$ sind die k-Ebenen speziell die Geraden bzw. die Hyperebenen. – Unter einem *Büschel* $\mathfrak{b}$ von Hyperebenen H mit der *Achse* A verstehe man die Gesamtheit aller Hyperebenen, deren Durchschnitt eine feste $(n - 1)$-Ebene A ist. Genau dann, wenn A in der uneigentlichen Hyperebene liegt, sind die $H \in \mathfrak{b}$ zueinander parallel.

1.1. Als *Paratingente* P *an* eine Menge $M \subset E_n$ *im* Punkt $p \in E_n$ als *Berührungspunkt*, $n \geq 2$, wird bezeichnet jeder Limes P von Geraden G_r derart, daß G_r (mindestens) zwei (verschiedene) Punkte $q_r, t_r \in M$ enthält und daß $p = \lim q_r = \lim t_r$. Es ist also $p \in \overline{M}$, wobei unter $\overline{M}$ die *abgeschlossene Hülle* von M (im E_n) verstanden wird.

1.1.1. Jede Paratingente an eine *Teil*menge M' von M im Punkt p ist zugleich Paratingente in p an die Obermenge M.

Jede Menge mit (mindestens) *einem Häufungspunkt*, insbesondere also *jedes Kontinuum*, *besitzt* (mindestens) *eine Paratingente.* Dabei wird unter einem *Kontinuum* im E_n, $n \geq 2$, jede mehrpunktige (d. h. mehr als einen Punkt enthaltende), beschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Menge verstanden.

Enthält der Durchschnitt D der Menge M mit der Geraden G bzw. mit der Hyperebene H unendlich viele Punkte, so ist G bzw. so enthält H eine Paratingente an M mit jedem Häufungspunkt von D als Berührungspunkt.

Jeder *Limes*[2] *einer Folge von Paratingenten* an eine *beschränkte* Menge N ist *wieder eine Paratingente* an N.

---

[2] Es handelt sich um den Limes im Raum der Geraden des E_n.

1.1.2. Es sei J eine in M enthaltene Strecke; wir nehmen dabei *stets* an, daß J eine *größte in M enthaltene Strecke* sei, d. h. nicht echte Teilmenge einer ebenfalls in M enthaltenen Strecke. Gemäß Nr. 1.1.1. ist die Trägergerade $G = G(J)$ von J Paratingente an M in jedem Punkt der abgeschlossenen Hülle $\bar{J}$ von J. Wir bezeichnen $\bar{J}$ als *verlängerten Punkt* von M auf der Geraden G und G als *Paratingente* an M *im verlängerten* Punkt $p = \bar{J}$. Ist dagegen P Paratingente an M in einem Punkt q, der zu keiner abgeschlossenen Strecke S mit $\underline{S} \subset M \cap P$ gehört, wobei $\underline{S}$ die größte, in S enthaltene offene Strecke bedeutet, so sagen wir auch, P sei *Paratingente* an M *im gewöhnlichen Punkt* q.

1.1.3. Festsetzung. In der Aussage „P ist Paratingente an M *in* p" kann im folgenden p sowohl einen gewöhnlichen als einen verlängerten Punkt bedeuten; ein verlängerter Punkt p wird hierbei als genau *ein* Punkt (Berührungspunkt) gezählt und P als Paratingente in nur *einem* Punkt. In der Aussage „P ist Paratingente an M in den Punkten $p_1, \ldots, p_r$" sind dementsprechend diese Punkte (Berührungspunkte) als sämtlich *verschieden*, bzw. als paarweise fremd, *vorausgesetzt*; außerdem wird P *als je eine Paratingente* an M in jedem einzelnen der $p_1, \ldots, p_r$ gezählt, es rechnet das gleiche P hier also im ganzen *als r verschiedene Paratingenten*, und wir sagen im vorliegenden Falle, es besitze M (mindestens) r Paratingenten. Sind die *verschiedenen Geraden* P und P' Paratingenten in p bzw. in p', so gelten P und P' *als verschiedene* Paratingenten, ob nun die Berührungspunkte p und p' verschieden oder ob sie gleich sind.

1.1.4. Eine Menge B wird als *einfacher Bogen* bezeichnet, wenn eine *topologische* Abbildung f von B auf eine *abgeschlossene* Strecke existiert. Vermöge einer derartigen (im übrigen beliebigen) Abbildung f werden die Begriffe *innerer* und *Endpunkt* sowie *vordere* und *hintere Umgebung* eines Punktes von B erklärt (nämlich als Bilder der inneren Punkte usw. der Urbildstrecke; diese Begriffe sind, bis auf allenfallsige Vertauschung von „hinten" und „vorn", unabhängig von der jeweiligen Abbildung f). Ist ein Endpunkt von B zugleich Endpunkt einer auf B und auf einer Geraden G liegenden (größten) Strecke J (wobei dann $J = \bar{J}$ wegen der Abgeschlossenheit von B und G), so bezeichnet man J auch als *verlängerten Endpunkt* von B *auf* G. Ein verlängerter Punkt von B auf G, der nicht (verlängerter) Endpunkt ist, heißt auch *verlängerter innerer Punkt* von B auf G. Soweit später von End- bzw. inneren Punkten von B *auf einer Geraden* G die Rede ist, kann es sich sowohl um gewöhnliche als um verlängerte Punkte handeln.

1.1.4.1. Unter einer *Stützhyperebene* an M im Punkt q wird verstanden jede q enthaltende Hyperebene H derart, daß eine Umgebung von q auf M ganz in einem der beiden, von H berandeten, abgeschlossenen (n-dimensionalen) Halbräume liegt. Es gilt der

Hilfssatz. Vor. *Es sei B ein einfacher Bogen im E_n, $n \geq 2$. Ferner sei H Stützhyperebene an B in einem Punkt q von B, der entweder Häufungspunkt von $H \cap B$ oder innerer Punkt von B ist.* – Beh. *Es besitzt B in q eine in H gelegene Paratingente mit q als Berührungspunkt.*

Bew. *Entweder* ist q Häufungspunkt von $H \cap B$; dann folgt die Beh. aus Nr. 1.1.1. – Oder es ist q isolierter Punkt von $H \cap B$ und dann (nach Vor.) innerer Punkt von B. Daher existiert eine vordere *und* eine hintere Umgebung U_v bzw. U_h von q auf B, die bis auf q untereinander und zu H fremd sind. Weil H Stützhyperebene in q ist, sind $U_v - (q)$ und $U_h - (q)$[3] beide enthalten im gleichen, offenen, von H begrenzten Halbraum R. Es seien H_r zu H parallele, in R gelegene Hyperebenen, die mit $r \to \infty$ gegen H konvergieren. Dann ist $H_r \cap U_v$ und $H_r \cap U_h$ nicht leer für schließlich alle r. Ist etwa $h_r \in H_r \cap U_h$ und $v_r \in H_r \cap U_v$, also $h_r \neq v_r$, ferner S_r die Verbindungsgerade der beiden Punkte h_r und v_r, so enthält die Folge der S_r eine Teilfolge, die gegen eine in H liegende Gerade S konvergiert. Da gleichzeitig die h_r und v_r gegen q konvergieren, ist S Paratingente in q an B.

1.2. Es heiße $M \subset E_n$, $n \geq 2$, vom *schwachen* (beschränkten *Punkt-*) *Ordnungswert* k bzw. von *schwachem endlichem* oder von *unendlichem* (Punkt-) Ordnungswert (bezüglich des Systems $\mathfrak{h}$ der Hyperebenen in E_n, wenn eine im Raum aller Hyperebenen nirgends dichte Menge $\mathfrak{n}$ von Hyperebenen exi-

---

[3] Es bezeichnet (q) die *einpunktige*, q enthaltende Menge.

stiert derart, daß jede Hyperebene H aus $\mathfrak{h} - \mathfrak{n}$ mit M maximal[4] k Punkte bzw. endlich viele Punkte gemeinsam hat oder wenn M mit mindestens einer Hyperebene (aus $\mathfrak{h}$) unendlich viele Punkte gemeinsam hat.

1.2.1. Es heiße M von *endlichem* (Punkt-) *Ordnungswert relativ eines Büschels* $\mathfrak{b}$ von parallelen Hyperebenen, oder kürzer: M heiße $\mathfrak{b}$-*endlich*, wenn der Durchschnitt von M mit jeder Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ endlich ist. Speziell werde M als $\mathfrak{b}$-*einfach* bezeichnet, wenn $M \frown H$ leer oder einpunktig ist für jedes $H \in \mathfrak{b}$. Schließlich werde M als $\mathfrak{b}$-*dehnungsbeschränkt* (oder als $\mathfrak{b}$-Lipschitzisch) bezeichnet, wenn ein α mit $0 < \alpha < 2^{-1}\pi$ existiert derart, daß die Verbindungsgerade je zweier (beliebiger, verschiedener) Punkte von M mit der Lotrichtung zu den Hyperebenen von $\mathfrak{b}$ einen Winkel kleiner als α bildet. Ein $\mathfrak{b}$-dehnungsbeschränkter Bogen ist also insbesondere $\mathfrak{b}$-einfach.

1.2.2. Es sei wieder $\mathfrak{b}$ irgendein *Büschel* paralleler Hyperebenen. Von einer Menge M sagen wir dann, M sei vom (M besitze den) (beschränkten) *Paratingentenordnungswert k bezüglich (relativ)* $\mathfrak{b}$, wenn es (genau) k verschiedene (vgl. die Festsetzung in Nr. 1.1.3.) Paratingenten an M gibt, die in Hyperebenen von $\mathfrak{b}$ enthalten sind. Ferner heiße M vom (*beschränkten*) *Paratingentenordnungswert t* bzw. von *endlichem* bzw. von *unendlichem* Paratingentenordnungswert (*schlechthin*), wenn das Maximum[5] der Paratingentenordnungswerte von M relativ aller Büschel $\mathfrak{b}$ gleich t ist bzw. wenn M relativ eines jeden Büschels $\mathfrak{b}$ beschränkten Paratingentenordnungswert besitzt bzw. wenn für mindestens ein Büschel unendlich viele Paratingenten an M in Hyperebenen des Büschels enthalten sind.

1.3. Der einfachste Fall ist der des Paratingentenordnungswertes Null. Für diesen sei bemerkt:

Satz. Vor. *Es sei* $\mathfrak{b}$ *ein Büschel paralleler Hyperebenen im* E_n *mit* $n \geq 2$. *Ferner sei* K *ein Kontinuum vom Paratingen-*

---

[4] Das heißt höchstens k Punkte für jedes $H \in \mathfrak{h} - \mathfrak{n}$ und genau k Punkte für mindestens ein $H \in \mathfrak{h} - \mathfrak{n}$.

[5] d. h. wenn der Paratingentenordnungswert höchstens bzw. genau gleich t ist relativ aller bzw. relativ mindestens eines Büschels $\mathfrak{b}$ (paralleler Hyperebenen).

tenordnungswert Null bezüglich $\mathfrak{b}$ (d. h. K besitzt keine in einer Hyperebene von $\mathfrak{b}$ enthaltene Paratingente).

Beh. *Es ist K ein einfacher Bogen, überdies ein $\mathfrak{b}$-einfacher und $\mathfrak{b}$-dehnungsbeschränkter Bogen.*

Bew. (**I**) Gemäß Nr. 1.1.1. ist K von endlichem Ordnungswert relativ $\mathfrak{b}$; da K unendlich viele Punkte enthält, ist also insbesondere K in keiner Hyperebene von $\mathfrak{b}$ enthalten. Daher ([1], S. 23, 30) ist K darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen,[6] $\mathfrak{b}$-einfachen Bogen und ist überdies zusammenhängend im kleinen. – (**II**) Es sei G eine Hyperebene aus $\mathfrak{b}$, die (mindestens) zwei verschiedene Punkte aus K enthält, etwa p und q. Da K (gemäß Ziff. I) zusammenhängend im kleinen ist, existiert ([8], S. 58/59) ein einfacher Bogen B mit den Endpunkten p und q, welcher Teilmenge von K ist. Da K, also auch B, mit G nur endlich viele Punkte gemeinsam hat (Ziff. (I)), liegt B nicht in G. Da überdies B beschränkt ist, existiert folglich mindestens eine von G verschiedene Hyperebene $H \in \mathfrak{b}$, von welcher B in einem von seinen Endpunkten p, q verschiedenen Punkt t gestützt wird. Gemäß Nr. 1.1.4.1. enthält M eine Paratingente an B und somit auch an K in t. Die Annahme, daß G mit K (mindestens) zwei Punkte gemeinsam hat, führt daher zu einem Widerspruch mit der Vor. des Satzes. – (**III**) Gemäß Ziff. (II) hat K mit jeder Hyperebene $G \in \mathfrak{b}$ höchstens einen Punkt gemeinsam. Wegen der Beschränktheit von K existieren Hyperebenen G', $G'' \in \mathfrak{b}$ derart, daß K mit G' bzw. mit G'' (genau) einen Punkt r' bzw. r'' gemeinsam hat sowie daß K im Durchschnitt D zweier abgeschlossener Halbräume liegt, deren einer von G' und deren anderer von G'' berandet wird. Wieder sind r' und r'' durch einen einfachen, in K enthaltenen Bogen R verbindbar (vgl. Ziff. (II)). Mit jedem $G \in \mathfrak{b}$, das nicht fremd ist zu D, hat R mindestens, also genau einen Punkt gemeinsam und mit jeder anderen Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ keinen Punkt. Wegen $R \subset K$ ist folglich R mit K identisch, also K ein $\mathfrak{b}$-einfacher Bogen mit den Endpunkten r', r''. – (**IV**) Ist K nicht $\mathfrak{b}$-dehnungsbeschränkt, so existieren

---

[6] *abzählbar viele* besagt: Keine oder endlich viele oder abzählbar unendlich viele.

Punkte $q_r', q_r'' \in K$ mit $q_r' \neq q_r''$, $r = 1, 2, \ldots$, derart, daß die Verbindungsgeraden S_r von q_r' und q_r'' schließlich alle mit der Lotrichtung zu den Hyperebenen von $\mathfrak{h}$ Winkel bilden, die beliebig wenig von $2^{-1}\pi$ abweichen. Wegen der Kompaktheit von K enthält die Folge der q_r' bzw. q_r'' eine Teilfolge von Punkten $\bar{q}_r'$ bzw. $\bar{q}_r''$ derart, daß die $\bar{q}_r'$ bzw. $\bar{q}_r''$ mit $r \to \infty$ gegen einen Punkt $q' \in K$ bzw. $q'' \in K$ konvergieren und die Verbindungsgeraden S_r von $\bar{q}_r'$ und $\bar{q}_r''$ gegen eine durch q' und q'' gehende Gerade S, die in einer Hyperebene $H^* \in \mathfrak{h}$ liegt (weil die Winkel der S_r mit der Lotrichtung zu den Hyperebenen von $\mathfrak{h}$ gegen $2^{-1}\pi$ konvergieren). Da K mit H^* höchstens einen Punkt gemeinsam hat (Ziff. (III)), ist $q' = q''$, also S Paratingente an K und in $H^* \in \mathfrak{h}$ gelegen, im Widerspruch zur Vor. des Satzes.

1.4. Die Menge $M \subset E_n$, $n \geq 2$, heiße vom (starken) *Komponentenordnungswert* k, wobei $k \geq 1$, wenn $M \frown H$ für jede Hyperebene H (des E_n) maximal k Komponenten (d. h. größte, zusammenhängende Teilmengen) besitzt. Sind die Komponenten von $M \frown H$ sämtlich einpunktig für jede Hyperebene H, so sagen wir, M besitze den (*starken* Punkt-) *Ordnungswert* k. Enthält $M \frown H$ für (mindestens) ein H mehrpunktige Komponenten, so heiße M von *unendlichem* (*starkem* Punkt-) Ordnungswert. Es gilt nun der

Satz. Vor. *Es sei B ein einfacher Bogen in E_n, $n \geq 2$.*

Beh. *Besitzt B den Komponentenordnungswert k, so auch den schwachen (Punkt-) Ordnungswert k ($k \geq 1$).*

Bew. (1) Ist H eine Hyperebene und K eine mehrpunktige Komponente von $B \frown H$, so ist K ein abgeschlossener Teilbogen von B. – (2) Die Hyperebenen H mit diskontinuierlichem[7] $B \frown H$ liegen dicht im Raum der Hyperebenen. Nämlich: Andernfalls existiert ein H$'$ derart, daß $B \frown H$ für *jede*, zu H' hinreichend benachbarte, zu H' parallele Hyperebene H mindestens eine mehrpunktige Komponente $K(H)$ besitzt. Da die $K(H)$ fremd

---

[7] Eine Punktmenge (des E_n) heißt *diskontinuierlich*, wenn sie kein Kontinuum enthält. Eine in sich kompakte Punktmenge besitzt, wenn diskontinuierlich, nur einpunktige Komponenten. (Vgl. [7], S. 152.)

sind für verschiedene H, so liefern diese H überabzählbar viele, paarweise fremde (mehrpunktige) Teilbogen von B. Es gibt indes nur abzählbar viele derartige Teilbogen. – (3) Nun besitzt aber B den schwachen (Punkt-) Ordnungswert k, wenn die Hyperebene H' mit diskontiunierlichem $B \frown H'$ dicht liegen im Raum der Hyperebenen (und wenn, wie in der Beh. unseres Satzes angenommen, B den Komponentenordnungswert k besitzt, vgl. [2], Nr. 3.2.).

1.5. Wichtig ist ferner der folgende Zusammenhang zwischen Komponenten- und Paratingentenordnungswert einfacher Bogen.

Hilfssatz. Vor. *Es sei B ein einfacher Bogen im E_n mit $n \geq 2$. Es existiere (mindestens) eine Hyperebene H, deren Durchschnitt mit B mindestens $(k+1)$ Komponenten besitzt $(k \geq 1)$.*

Beh. *Bezüglich des Büschels paralleler Hyperebenen, welchem H angehört, besitzt B mindestens den Paratingentenordnungswert k; genauer: Es existieren Paratingenten in mindestens k, nicht in H gelegenen, untereinander verschiedenen, inneren (gewöhnlichen oder verlängerten) Punkten von B, die zu H parallel sind.*

Anmerkung. Der Fall, daß die gleiche Gerade Träger von Paratingenten mit verschiedenen Berührungspunkten ist, wird zugelassen (Vgl. Nr. 1.1.3.).

Bew. Es seien $K_1, \ldots, K_{k+1}$ Komponenten von $D = B \frown H$ derart, daß die $K_\varkappa$ in der angegebenen Reihenfolge auf B aufeinanderfolgen (d. h. daß $K_\varkappa$ auf B etwa vor $K_{\varkappa+1}$ liegt, $\varkappa = 1, \ldots, k$). Als Komponenten der abgeschlossenen Menge D sind die $K_\varkappa$ abgeschlossene,[8] paarweise fremde Teilmengen von B. Daher existieren k abgeschlossene Teilbogen $B_1, \ldots, B_k$ von B der folgenden Beschaffenheit: Die $B_\varkappa$ sind untereinander fremd und zu den $K_\varkappa$ fremd bis auf höchstens Endpunkte; und zwar gehört von den Endpunkten von $B_\varkappa$ einer zu $K_\varkappa$ und der andere zu $K_{\varkappa+1}$; $\varkappa = 1, \ldots, k$. Jedes $B_\varkappa$ enthält Punkte, die nicht zu H gehören. Wegen der Beschränktheit von $B_\varkappa$ existiert daher eine

[8] Die Komponenten der beschränkten, abgeschlossenen Mengen K_{rt} sind abgeschlossen. (Vgl. [7], S. 152.)

zu H parallele (also von H verschiedene) Stützhyperebene an $B_\varkappa$ in einem *inneren* Punkt $q_\varkappa$ von $B_\varkappa$. Gemäß Nr. 1.1.4.1. existiert daher in $q_\varkappa$ eine zu H parallele Paratingente an $B_\varkappa$ und mithin an B. Die $q_1, \ldots, q_k$ sind untereinander verschieden, aber auch verschieden von den Endpunkten von B; diese Endpunkte können nämlich – sofern sie überhaupt zu gewissen der $B_\varkappa$ gehören – höchstens Endpunkte von B_1 bzw. B_k sein.

1.6. Eine Menge M des E_n, $n \geq 2$, heiße *vom Rang* r, wenn eine r-Ebene, aber keine $(r-1)$-Ebene existiert, in welcher M enthalten ist; $0 \leq r \leq n$. Im Falle $r = 1$ bzw. $r = n - 1$ heiße M auch *linear* bzw. *hypereben*, im Falle $r \leq n - 1$ entsprechend *höchstens-hypereben*. Für jedes Kontinuum vom Range n, welches den schwachen (Punkt-) Ordnungswert t besitzt, gilt $n \leq t$ (vgl. [3], S. 42, Nr. 1.2.). Da ein einfacher Bogen ein Kontinuum ist, folgt aus dem soeben Bemerkten zusammen mit Nr. 1.4. der

Satz. Vor. *Es sei B ein einfacher Bogen vom Rang n im E_n, $n \geq 2$.*

Beh. *Besitzt B den Komponentenordnungswert t, so ist $n \leq t$.*

Folgerung. Vor. (1) *Es sei B ein einfacher Bogen im E_n mit $n \geq 2$.* – (2) *Der Rang von B sei n.* – (3) *Es besitze B den Paratingentenordnungswert k mit $k \leq n - 1$.*

Beh. (1) *Es besitzt B den Komponentenordnungswert n.* – (2) *Es ist $k = n - 1$.*

Bew. Für den Komponentenordnungswert t von B folgt aus Vor. (2) und dem vorstehenden Satz, daß $n \leq t$. Zufolge Vor. (3) und Nr. 1.5. ist aber $t \leq n$. Somit gilt $t = n$. Aus $t = n$ und Nr. 1.5. folgt dann $k = n - 1$.

1.6.1. Wir benötigen später die Tatsache, daß – kurz gesagt – in jeder Ecke eines einfachen Bogens unendlich viele Paratingenten an den Bogen mit der Ecke als Berührungspunkt existieren, die sämtlich in einer 2-Ebene liegen. Zu dem Zwecke beweisen wir den

Satz. Vor. (1) *Im E_n mit $n \geq 2$ seien A und B einfache Bogen mit gemeinsamem Endpunkt c.* – (2) *In c existiere sowohl an A*

als an B genau eine Halbtangente h_A bzw. h_B. – (3) *Die Trägergeraden von h_A und h_B seien verschieden; die von h_A und h_B aufgespannte 2-Ebene sei R.* – (4) *Es sei G eine Gerade durch c.* – (5) *Es sei G Paratingente in c weder an A noch an B* (Es sei also G insbesondere weder Träger von h_A noch Träger von h_B).

Beh. *Es ist G Paratingente in c an $C = A \cup B$ genau dann, wenn G in R liegt und wenn H_A, H_B beide in der gleichen, durch G berandeten, abgeschlossenen Halbebene von R liegen.*

1. Zusatz. Besitzt sowohl A als B in c genau eine Paratingente, so folgt die Beh. aus Vor. (1)–(4) [also ohne Vor. (5)].

2. Zusatz. Unter den Vor. (1)–(3) besitzt $C = A \cup B$ im E_n mit $n \geq 3$ unendlichen Paratingentenordnungswert (bezüglich eines jeden Büschels, dem eine die 2-Ebene R enthaltende Hyperebene angehört).

Bew. Betr. *Dann.* (1) Es sei γ der von h_A und h_B gebildete Winkel kleiner als π, also $0 < \gamma < \pi$. Ferner sei $K(A, \eta)$ bzw. $K(B, \eta)$ der (n-dimensionale) offene Rotations(halb)kegel mit c als Spitze, mit h_A bzw. mit h_B als Achse und mit dem Öffnungswinkel η, wobei $0 < \eta < 2^{-2}\gamma$. Mit ab bzw. mit $|ab|$ bezeichnen wir die Verbindungsgerade bzw. den Abstand der Punkte a und b. – (2) Es sei nun G eine Gerade, die der in der Beh. formulierten (als hinreichend nachzuweisenden) Bedingung genügt. Zu zeigen ist: G ist Paratingente in c an C. Dazu genügt der Nachweis der Existenz von $a_r \in A$, $b_r \in B$ mit $a_r \neq b_r$, mit $a_r \neq c$, $b_r \neq c$, $c = \lim a_r = \lim b_r$ und mit $G = \lim a_r b_r$ für $r \to \infty$. Konstruktion der a_r, b_r: Es sei Q eine zu R orthogonale,[9] zu G parallele Hyperebene, die nicht fremd ist zu A und B, die aber den Punkt c nicht enthält; ein solches Q existiert und werde im Folgenden festgehalten. Es gibt dann eine Folge von Hyperebenen Q_r, die parallel sind zu Q, in denen c nicht enthalten ist und deren Abstand von c gegen Null konvergiert mit $r \to \infty$. Zu einer beliebig vorgegebenen, monotonen Folge positiver Zahlen η_s mit $\eta_s \to 0$ für $s \to \infty$ existiert eine monotone Folge von Indizes

---

[9] d. h. Q enthält eine $(n-2)$-Ebene, die orthogonal ist zu R; vgl. dazu Fußnote 10.

$r(s)$ mit $r(s) \to \infty$ für $s \to \infty$ derart, daß $A_s = K(A, \eta_s) \cap A \cap Q_{r(s)}$ sowie $B_s = K(B, \eta_s) \cap B \cap Q_{r(s)}$ beide nicht leer sind. Es sei etwa $a_s \in A_s$ und $b_s \in B_s$, ferner a'_s bzw. b'_s die (Zentral-) Projektion aus c von a_s bzw. b_s in Q. Dann ist $a_s b_s$ parallel zu $a'_s b'_s$ und $a' = (h_A \cap Q) = \lim a'_s$ sowie $b' = (h_B \cap Q) = \lim b'_s$, wobei $a' \neq b'$, also $a' b' = \lim a'_s b'_s$. Daraus folgt, daß $\lim a_s b_s$ existiert, parallel zu $a' b'$, also zu G ist und durch c geht. Somit ist $G = \lim a_s b_s$, w. z. z. w. – Betr. *Nur dann*. Es sei also G Paratingente in c an $C = A \cup B$, aber weder an A noch an B in c. Es ist also $G = \lim a_r b_r$ mit $a_r \in A - (c)$ und $b_r \in B - (c)$ sowie mit $c = \lim a_r = \lim b_r$. Wie im Beweis betr. Dann wählt man Q und zeigt: Zu jeder monotonen Nullfolge positiver Zahlen η_s existiert eine monotone Folge von Indizes $r(s)$ mit $r(s) \to \infty$ derart, daß für $a''_s = a_{r(s)}$ und $b''_s = b_{r(s)}$ gilt: $a''_s \in K(A, \eta_s) \cap A$ und $b''_s \in K(B, \eta_s) \cap B$ (neben $a''_s \to c$, $b''_s \to c$ für $s \to \infty$). Weiter werde jetzt a'_s als die Projektion von a''_s aus c in Q und b'_s auf der Halbgeraden durch b''_s mit c als Anfangspunkt so gewählt, daß $|b'_s c| : |b''_s c| = |a'_s c| : |a''_s c|$, daß also $a'_s b'_s$ parallel zu $a''_s b''_s$ ist. Da Q parallel zu G ist und $G = \lim a''_s b''_s$, gilt neben $a' = h_A \cap Q = \lim a'_s$ auch $b' = h_B \cap Q = \lim b'_s$, mithin $a' b' \subset R$. Daraus folgt $G \subset R$, w. z. z. w.

Betr. Zusatz 1. Nach der Annahme im Zusatz ist der Träger von h_A bzw. von h_B die einzige Paratingente in c an A bzw. B. Zum Bew. der Beh. brauchen daher nur Gerade betrachtet zu werden, die auch der Vor. (5) genügen. Damit ist man auf den im Satz betrachteten Fall zurückgeführt. (Übrigens folgt aus der Einzigkeit der Paratingente an A in c schon die Existenz von h_A). – Betr. Zusatz 2. In der 2-Ebene R gibt es unendlich viele Geraden durch c, welche den Vor. (4) und (5) des Satzes genügen, mithin (gemäß des Satzes) Paratingenten in c an C sind.

1.6.1.1. Bekanntlich besitzt jeder Bogen von endlichem (*Punkt-*) Ordnungswert in jedem seiner Punkte genau eine vordere und eine hintere Halbtangente (im Falle eines Endpunktes nur eine vordere bzw. hintere). Wir benötigen einen entsprechenden Satz auch für einfache Bogen von endlichem *Komponenten*ordnungswert.

Satz. Vor. *Es sei A ein einfacher Bogen im E_n mit $n \geq 2$. Außerdem sei A von endlichem Komponentenordnungswert.*

Beh. *In jedem Punkt von A existiert genau eine vordere bzw. hintere Halbtangente* (in den Endpunkten nur die vordere bzw. nur die hintere).

Bew. Es seien h', h'' zwei *verschiedene* z. B. vordere Halbtangenten an A im Punkt $c \in A$. Es sei L diejenige $(n-2)$-Ebene durch c, welche orthogonal[10] ist zu derjenigen 2-Ebene, in der h' und h'' enthalten sind. Das Hyperebenenbüschel mit der Achse L sei $\mathfrak{b}$. Da h' und h'' vordere Halbtangenten an A in c sind, existiert eine Folge abgeschlossener, paarweise fremder Teilbogen T_r aus einer vorderen Umgebung von c auf A mit folgender Eigenschaft: Sind a'_r, a''_r die Endpunkte von T_r, so gibt es eine Nullfolge positiver η_r derart, daß $a'_r \in K'_r$ und $a''_r \in K''_r$, wobei K'_r bzw. K''_r den Rotations(halb)kegel mit c als Spitze, mit h' bzw. h'' als Achse und mit dem Öffnungswinkel η_r bezeichnet. Da $h' \neq h''$ ist, sind $K'_r - (c)$ und $K''_r - (c)$ fremd für schließlich alle r. Es gibt also überzählbare viele Hyperebenen H' aus $\mathfrak{b}$ (nämlich zu schließlich allen $K'_r - (c)$ und $K''_r - (c)$ fremde), deren jede mit schließlich *jedem* der T_r innere Punkte gemeinsam hat (d. h. für jedes $r \geq N$, mit für alle H' gleichem N). Unter diesen H' können aber nur abzählbar viele vorkommen, deren Durchschnitt mit (mindestens) einem der T_r mehrpunktige Komponenten besitzt. Denn jede solche Komponente ist ein Teilbogen von A (vgl. Nr. 1.5., Bew.) und für verschiedene H' sind diese Teilbogen fremd. Andererseits gibt es nur abzählbar viele, paarweise fremde Teilbogen von A. Es gibt daher solche H', deren Durchschnitt mit jedem der T_r nicht leer ist und nur einpunktige Komponenten besitzt. Der Durchschnitt eines solchen H' mit A besitzt also unendlich viele Komponenten, im Widerspruch mit der Vor.

1.6.2. Nun ergibt sich noch der

Hilfssatz. *Vor. Es sei $n \geq 3$ und B ein einfacher Bogen im E_n. Der Rang von B sei mindestens 2 und höchstens $(n-1)$.*

---

[10] L ist *orthogonal* zu R besagt: Jede Gerade durch c, die gleichzeitig zu h' und h'' orthogonal ist, liegt in L. Es gibt genau ein solches L.

Beh. *Es besitzt B den Paratingentenordnungswert Unendlich, d. h. es existieren Hyperebenen H so, daß B unendlich viele (verschiedene) Paratingenten besitzt, die zu H parallel sind.*

Beispiel. Zu den Bogen B im E_n mit $n \geq 3$, welche den Voraussetzungen des Hilfssatzes genügen, gehören die Vereinigungen zweier Strecken mit gemeinsamem Endpunkt, die nicht den gleichen *Träger* besitzen, d. h. nicht auf der gleichen Geraden liegen.

Bew. (1) Es sei r der Rang von B, also $2 \leq r \leq n - 1$, und L_r die B enthaltende r-Ebene. Es sei H eine zu L_r fremde Hyperebene; solche H (im E_n) gibt es wegen $r \leq n - 1$. Dann ist jede Paratingente an B parallel zu H; denn jede Paratingente an B liegt in L_r. – (2) Gemäß (1) genügt es zu zeigen, daß B unendlich viele Paratingenten besitzt. Es sind nun nur folgende Fälle möglich: *Entweder* existiert ein Teilbogen T von B, der *keine Strecke als Teilbogen enthält.* In jedem inneren Punkt p von T existiert dann (mindestens) eine Paratingente P an T, also an B; dabei gehört p nicht zu einem verlängerten Punkt von B auf P. Die unendlich vielen inneren Punkte von T liefern also unendlich viele Paratingenten an B, die (im Sinne der Festsetzung von Nr. 1.1.3.) verschieden sind. – *Oder* B ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von (abzählbar) *unendlich vielen größten*, bis auf höchstens Endpunkte paarweise fremden Strecken, etwa T_1, $T_2, \ldots$, deren jede abgeschlossen ist; denn es soll nach Vor. B ein *einfacher* Bogen sein. Die Trägergeraden dieser Strecke liefern daher Paratingenten an B in unendlich vielen verschiedenen, je verlängerten Punkten auf diesen Geraden. Somit existieren wieder unendlich viele (im Sinne von Nr. 1.1.3.) verschiedene Paratingenten an B. – *Oder* es ist B Vereinigung von *endlich vielen größten* Strecken. Wegen $r \geq 2$ gibt es (mindestens) zwei unter diesen Strecken, etwa S' und S'', die einen Endpunkt c gemeinsam haben und deren Vereinigung V den Rang 2 besitzt. In c sind aber für V die Voraussetzungen (1)–(3) des Satzes in Nr. 1.6.1. erfüllt, wenn $A = S'$ und $B = S''$ gesetzt wird. Daher ist der 2. Zusatz zu diesem Satz anwendbar.

1.6.2.1. Der eben bewiesene Hilfssatz liefert folgendes Kriterium dafür, daß ein einfacher Bogen eine Strecke ist.

Satz. Vor. (1) *Es sei B ein einfacher Bogen im E_n mit $n \geq 3$.* – (2) *Der Rang von B sei nicht größer als $(n - 1)$.* – (3) *Der Paratingentenordnungswert t von B sei endlich.*

Beh. *Es ist B eine Strecke und daher $t = 1$.*

Bew. Ist der *Rang* r von B größer als 1 (und kleiner als n), so ist der Paratingentenordnungswert von B Unendlich (Gemäß Nr. 1.6.2., Hilfssatz). Für $r = 1$ ist aber B eine Strecke.

1.7. Schließlich benötigen wir einige Feststellungen hinsichtlich des Paratingentenordnungswertes bei *gewissen Kontinuen mit Verzweigungspunkten.* Wir bemerken:

Hilfssatz. *Vor.* (1) *Im E_n mit $n \geq 2$ sei p gemeinsamer Endpunkt von drei einfachen Bogen A_i, $i = 1, 2, 3$,* – (2) *Dabei soll der Durchschnitt je zweier der Bogen A_i keine Umgebung von p auf auch nur einem dieser beiden Bogen A_i enthalten.*

Beh. *Ist H eine beliebig vorgegebene Hyperebene durch p, so existiert in p eine Paratingente an $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, die in H enthalten ist.*

Bew. Nur folgende beiden Fälle sind möglich: I. *Fall.* Unter den A_i gibt es (mindestens) eines, etwa A_1, das in p eine in H gelegene (Halb-)Tangente besitzt. Da jede Tangente in p an A_1 zugleich Paratingente an A_1 und daher an A in p ist, folgt die Beh. – II. *Fall.* Keines der A_i, $i = 1, 2, 3$, besitzt in p eine in H liegende Tangente. Dann gibt es (mindestens) zwei unter den A_i, etwa A_1 und A_2, derart, daß (mindestens) eine Halbtangente in p an A_1 und (mindestens) eine in p an A_2, abgesehen vom Punkt p selbst, ganz im gleichen offenen, n-dimensionalen, von H begrenzten Halbraum E liegt. Daher hat jede in E gelegene, zu H parallele und hinreichend benachbarte Hyperebene H' mit A_1 (mindestens) einen Punkt q_1 und mit A_2 (mindestens) einen Punkt q_2 gemeinsam; auf Grund der Vor. (2) gibt es unter diesen H' solche zu H beliebig benachbarte, für die $q_1 \neq q_2$ gewählt werden kann. Ähnlich wie in Nr. 1.1.4.1., Hilfssatz, Bew., ergibt sich daraus die Existenz einer Paratingente an $A_1 \cup A_2$ und damit an A in p, die in H liegt; w. z. z. w.

1.7.1. Mit Hilfe der Nr. 1.7. ergibt sich weiter der

Hilfssatz. Vor. (1) *und* (2) *wie in* Nr. 1.7., *Hilfssatz* ($n \geq 2$). – (3) *(Mindestens) eines der* A_i, *etwa* A_1, *besitze einen Komponentenordnungswert, der nicht kleiner als* k *ist* ($k \geq 1$).

Beh. *Der Paratingentenordnungswert von* $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ *ist nicht kleiner als* k.

Bew. (I) Nach Vor. (3) existiert eine Hyperebene H, deren Durchschnitt mit A_1 mindestens k Komponenten besitzt. – (II) Ferner gibt es (gemäß Nr. 1.7.) mindestens eine (zu H parallele, ev. in H gelegene) Paratingente an A in p. – (III) Für $k = 1$ folgt die Beh. aus Ziff. (I) und (II). – (IV) Ist aber $k \geq 2$, so besitzt A_1 (zufolge (I) und Nr. 1.5.) zu H parallele Paratingenten in mindestens ($k - 1$) verschiedenen, inneren, insbesondere also von p verschiedenen Punkten von A_1. Dazu kommt gemäß Ziff. (II) noch eine, zu H parallele oder in H gelegene Paratingente im Endpunkt p von A_1.

1.7.2. Schließlich gehört hierher noch der

Hilfssatz. Vor. (1) *Es seien* A_1 *und* A_2 *einfache Bogen in* E_n, $n \geq 2$, *mit einem gemeinsamen Endpunkt* p. – (2) *In* p *besitze* $B = A_1 \cup A_2$ *eine Spitze, d. h. in* p *existiere an* A_1 *sowohl als an* A_2 *genau eine Halbtangente, und beide Halbtangenten fallen zusammen* (mit der einzigen Halbtangente an B in p). – (4) *Der Durchschnitt* $A_1 \cap A_2$ *enthalte keine Umgebung von* p *weder auf* A_1 *noch auf* A_2.

Beh. *In jeder Hyperebene* H *durch* p *liegt (mindestens) eine Paratingente an* B *in* p.

Bew. (I) Entweder enthält H die Trägergerade (den Träger) f der Halbtangente an B in p. Es ist aber f Paratingente an B und daher die Beh. richtig. – (II) Oder f liegt nicht in H. Dann ist H Stützhyperebene an B in p und der Beweis der Beh. verläuft entsprechend wie im Fall II. des Beweises für den Hilfssatz der Nr. 1.7.

§ 2. Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geq 2$)

Nach den Vorbereitungen in § 1 gehen wir an den Beweis der in der Einleitung angegebenen Sätze.

2.1. Zunächst wird gezeigt

Satz. Vor. (1) Es sei $\mathfrak{b}$ ein Büschel paralleler Hyperebenen im E_n mit $n \geq 2$. – (2) Es sei K ein Kontinuum im E_n, das in keiner Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ enthalten ist. – (3) Diejenigen Hyperebenen H' aus $\mathfrak{b}$, in denen Paratingenten an K enthalten sind, bilden eine in $\mathfrak{b}$ nirgends dichte Teilmenge $\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{b}$.

Beh. (1) Es ist K darstellbar als Vereinigung von abzählbar vielen, $\mathfrak{b}$-*einfachen*, halboffenen oder offenen[11] Bogen A_i, die untereinander sowie zu allen $H' \in \mathfrak{n}'$ fremd sind, und von den Durchschnitten $D' = H' \cap K$ für alle $H' \in \mathfrak{n}'$. Jeder abgeschlossene Teilbogen eines jeden A_j ist $\mathfrak{b}$-*dehnungsbeschränkt* (und ein einfacher Bogen).

(2) Es ist $\mathfrak{n}'$ abgeschlossen in $\mathfrak{b}$. Jeder der in Beh. (1) genannten Bogen A_j mündet[12] in genau einem H' oder in genau zweien der H'. Im ersteren Falle wird das betreffende A_j als ein *Stachel* S_r (relativ $\mathfrak{b}$) bezeichnet, im letzteren Fall als *überbrückend* oder als eine *Brücke* B_i (relativ $\mathfrak{b}$). Jeder Stachel ist ein halboffener, jede Brücke ein offener ($\mathfrak{b}$-einfacher) Bogen.

(2a) Mündet die Brücke B_i in H'_1 und H'_2, so liegt „zwischen" H'_1 und H'_2 in $\mathfrak{b}$ kein $H' \in \mathfrak{n}'$.

(2b) In einem (beliebigen) $H' \in \mathfrak{n}'$ münden höchstens *endlich viele Brücken* – falls überhaupt solche Brücken existieren. Dagegen können in einem $H' \in \mathfrak{n}'$ abzählbar *unendlich viele Stacheln* münden.

(3) Enthält $\mathfrak{n}'$ mindestens 2 Hyperebenen H' (in denen also Paratingenten an K liegen), so mündet mindestens eine Brücke in jedem $H' \in \mathfrak{n}'$, das in $\mathfrak{b}$ mindestens eine einseitige, kein $H' \in \mathfrak{n}'$ enthaltende Umgebung besitzt; falls dabei $\mathfrak{n}'$ insbesondere endlich ist, mündet in *jedem* $H' \in \mathfrak{n}'$ mindestens eine Brücke (weil

[11] Ein $\mathfrak{b}$-einfacher Bogen heiße *offen* bzw. *halboffen*, wenn er sich vermöge $\mathfrak{b}$ (ein-eindeutig) in eine offene bzw. halboffene Strecke (Intervall) projiziert. Unter einem *abgeschlossenen* Bogen wird immer ein einfacher Bogen im Sinne der Definition in Nr. 1.1.4 verstanden.

[12] Eine Menge M *mündet* in einem Punkt s, wenn s Berührpunkt von M, wenn also $s \in \overline{M}$ ist. Und M mündet in einer Menge N, wenn M in (mindestens) einem Punkt von N mündet.

dann jedes $H' \in \mathfrak{n}'$ eine solche Umgebung besitzt). – Besteht dagegen $\mathfrak{n}'$ aus einer einzigen Hyperebene H', so mündet in H', genauer in $H' \frown K$, mindestens ein Stachel (und Brücken existieren nicht).

Zusatz. Die Vor. (3) des Satzes ist jedenfalls dann erfüllt, wenn K endlichen Paratingentenordnungswert relativ $\mathfrak{h}$ besitzt. *Ist speziell* dieser Paratingentenordnungswert (von K relativ $\mathfrak{h}$) Null, also $\mathfrak{n}'$ *leer*, so ist K ein einfacher (sogar ein $\mathfrak{h}$-einfacher, abgeschlossener) Bogen (gemäß Nr. 1.3., Satz).

Bew. Da der Fall eines leeren $\mathfrak{n}'$ durch Nr. 1.3., Satz, erledigt ist, wird im folgenden Beweis $\mathfrak{n}'$ *stets als mindestens ein H' enthaltend* angenommen. – (I) Es gibt zwei Stützhyperebenen aus $\mathfrak{h}$ an K, etwa $G', G'' \in \mathfrak{h}$ derart, daß K im Durchschnitt C zweier von G' bzw. von G'' berandeter, abgeschlossener Halbräume enthalten ist (vgl. Nr. 1.3., Satz, Bew., (III)). Es sei Q ein abgeschlossener, n-dimensionaler Quader, in dem K enthalten ist; zwei der Seiten von Q sollen in G' bzw. G'' liegen, während die anderen Seiten von Q fremd sind zu K. Die Projektion von C vermöge $\mathfrak{h}$ auf eine zu G' orthogonale Gerade F, d. h. der Durchschnitt von C mit F, ist ein abgeschlossenes Intervall (Strecke) J. Die *in $\mathfrak{h}$ nirgends dichte Menge* $\mathfrak{n}'$ derjenigen Hyperebenen $H' \in \mathfrak{h}$, in welchen Paratingenten an K liegen, *ist abgeschlossen* (in $\mathfrak{h}$), weil jeder Limes von Paratingenten wieder Paratingente ist (vgl. Nr. 1.1.1.). Und $\mathfrak{n}'$ projiziert sich (vermöge $\mathfrak{h}$) in eine abgeschlossene, nicht leere, nirgends dichte Teilmenge N von J. Bezeichnet man mit $\underline{J}$ das größte offene, in J enthaltene Intervall, so ist $N \frown \underline{J}$ Komplement einer Vereinigung von abzählbar vielen, paarweise fremden, offenen Intervallen $J_\varrho \subset \underline{J}$; $\varrho = 1, 2, \ldots$[13] Jedes J_r ist Vereinigung (Limes) einer aufsteigenden Folge abgeschlossener Intervalle $J_{\varrho\tau}$, $\tau = 1, 2, \ldots$; dabei ist J_ϱ bzw. $J_{\varrho\tau}$ Projektion vermöge $\mathfrak{h}$ eines Teilquaders Q_ϱ von Q bzw. eines abgeschlossenen Teilquaders $Q_{\varrho\tau}$ von Q_ϱ. – (II) Es ist $K_{\varrho\tau} = K \frown Q_{\varrho\tau}$ beschränkt und abgeschlossen; außerdem liegt keine Paratin-

[13] Es besitzt N, wenn überhaupt einseitige Häufungspunkte, dann nur abzählbar viele; jeder dieser ist Endpunkt eines J_r. Brücken und Stacheln münden (höchstens) in solchen $H \in \mathfrak{h}$, die den Endpunkten eines J_r, also den isolierten Punkten und den einseitigen Häufungspunkten von N entsprechen.

gente an $K_{\varrho\tau}$ in einer Hyperebene aus $\mathfrak{h}$. Daher ist jede mehrpunktige Komponente von $K_{\varrho\tau}$ ein Kontinuum,[8] für das die Voraussetzungen von Nr. 1.3., Satz, erfüllt sind. Jede solche Komponente ist also ein *einfacher* ($\mathfrak{h}$-einfacher und $\mathfrak{h}$-dehnungsbeschränkter) Bogen B. Es seien $H'_{\varrho\tau}$ und $H''_{\varrho\tau}$ diejenigen beiden Hyperebenen aus $\mathfrak{h}$, in denen die Endpunkte von $J_{\varrho\tau}$ liegen. Für jeden der Bogen B liegt (mindestens) einer seiner Endpunkte in einer der Hyperebenen $H'_{\varrho\tau}$, $H''_{\varrho\tau}$; denn der durch Wegnahme der Endpunkte aus B entstehende $\mathfrak{h}$-einfache offene[11] Bogen B^* ist Komponente der (in $K_{\varrho\tau}$ offenen) Menge $K_{\varrho\tau} - H'_{\varrho\tau} - H''_{\varrho\tau} = M_{\varrho\tau}$, weil andernfalls B echte Teilmenge einer zusammenhängenden Teilmenge von $K_{\varrho\tau}$ wäre, also B nicht Komponente von $K_{\varrho\tau}$. Jede Komponente von $M_{\varrho\tau}$ mündet aber in $H'_{\varrho\tau}$ oder in $H''_{\varrho\tau}$ (vgl. z. B. [6], S. 118).[13a] Ferner sind die abgeschlossenen Bogen B paarweise fremd als verschiedene Komponenten der (abgeschlossenen) Menge $K_{\varrho\tau}$. Schließlich sind $D'_{\varrho\tau} = K \cap H'_{\varrho\tau}$ und $D_{\varrho\tau} = K \cap H'_{\varrho\tau}$ endliche Mengen, weil andernfalls $H'_{\varrho\tau}$ oder $H''_{\varrho\tau}$ eine Paratingente an K enthält (gemäß Nr. 1.1.1.; denn $D'_{\varrho\tau}$, $D''_{\varrho\tau}$ sind kompakt (und abgeschlossen)). Daher ist $K_{\varrho\tau}$ Vereinigung endlich vieler, $\mathfrak{h}$-einfacher (und $\mathfrak{h}$-dehnungsbeschränkter), abgeschlossener, paarweise fremder Bogen $B_{\varrho\mu}$ sowie endlich vieler (ev. keiner) einpunktiger Teilmengen von $D'_{\varrho\tau}$ und $D''_{\varrho\tau}$, die untereinander und zu $B_{\varrho\mu}$ fremd sind. – (**II 1**) Unter den $B_{\varrho\mu}$ gibt es mindestens einen, der in $H'_{\varrho\tau}$ *und* in $H''_{\varrho\tau}$, mithin in $D'_{\varrho\tau}$ und in $D''_{\varrho\tau}$, mündet, also eine Brücke zwischen $H'_{\varrho\tau}$ und $H''_{\varrho\tau}$. In der Tat: Nach dem Brückensatz (vgl. z. B. [6], S. 118) gibt es mindestens eine Komponente K' von $C = K - D'_{\varrho\tau} - D''_{\varrho\tau}$, die sowohl in $D'_{\varrho\tau}$ als in $D''_{\varrho\tau}$ mündet. Ist nun R' bzw. R'' derjenige von $H'_{\varrho\tau}$ bzw. von $H''_{\varrho\tau}$ begrenzte, offene, n-dimensionale Halbraum, der fremd ist zu $K_{\varrho\tau}$, und setzt man $M' = R' \cap K$ sowie $M'' = R'' \cap K$ sowie $C_{\varrho\tau} = K_{\varrho\tau} - D'_{\varrho\tau} - D''_{\varrho\tau}$, so gilt $C = M' \cup C_{\varrho\tau} \cup M''$. Da M', M'' und $C_{\varrho\tau}$ paarweise fremd sind sowie offen in C, ist jede Komponente von C ganz in einer dieser drei Teilmengen von C enthalten. Und weil $D''_{\varrho\tau}$ bzw. $D'_{\varrho\tau}$ nicht zur Begrenzung von M' bzw. von M'' gehört, muß die in $D'_{\varrho\tau}$ und $D''_{\varrho\tau}$ mündende Komponente K' von C Teilmenge von $C_{\varrho\tau}$ sein. Nun sind aber

[13a] Es besitzt also $M_{\varrho\tau}$ keine einpunktigen Komponenten.

die $B_{\varrho\mu}$ nach Wegnahme ihrer Endpunkte gerade die Komponenten von $C_{\varrho\tau}$ (Vgl. auch Ziff. (II) dieses Beweises betr. den Teilbogen B von $K_{\varrho\tau}$). Daher ist $\bar{K}'$ gleich einem der $B_{\varrho\mu}$. – (**II 2**) Geht man von $K_{\varrho\tau}$ zu $K_{\varrho,\tau+1}$, über, so erweisen sich unter den endlich vielen Punkten von $D'_{\varrho\tau}$ oder $D''_{\varrho\tau}$ jedenfalls diejenigen, welche fremd sind zu den $B_{\varrho\mu}$, als Punkte von mehrpunktigen Komponenten von $K_{\varrho,\tau+1}$, folglich als Endpunkte $\mathfrak{b}$-einfacher Bogen. Für $\tau \to \infty$ ergibt sich nun: Es ist $K \cap Q_\varrho$ Vereinigung von abzählbar vielen, $\mathfrak{b}$-einfachen, paarweise fremden Bogen, deren jeder in (mindestens) einer der Hyperebenen aus $\mathfrak{n}'$ mündet, die einen Endpunkt von J_ϱ enthält; im allgemeinen gibt es zwei solcher Hyperebenen, etwa H'_1, H'_2, und mindestens einer dieser Bogen mündet dann sowohl in H'_1 als in H'_2, ist also offen und eine Brücke (nur falls einer der Endpunkte von J_ϱ zugleich Endpunkt von J ist, braucht diesem Endpunkt kein $H' \in \mathfrak{n}'$ zu entsprechen und es handelt sich dann um einen Stachel). Es kann aber *nur endlich viele solche Brücken* (zwischen H'_1 und H'_2) geben. Denn jede Brücke hat mit *jeder*, zu J_ϱ nicht fremden Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ (genau) einen Punkt gemeinsam. Gibt es also unendlich viele Brücken zwischen H'_1 und H'_2, so enthält, da die Brücken paarweise fremd sind, jede der zu J_ϱ nicht fremden Hyperbenen aus $\mathfrak{b}$ unendlich viele Punkte von K, also (gemäß Nr. 1.1.1.) eine Paratingente an K, gehört aber nicht zu $\mathfrak{n}'$ (gemäß der Definition von J_ϱ). Daraus folgt die Beh. sowohl des Satzes als des Zusatzes.

2.1.1. Anschließend sei erwähnt der

Hilfssatz. Vor. (1) *Im E_n mit $n \geq 2$ seien $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ Büschel paralleler Hyperebenen; diese $\mathfrak{b}_\nu$ seien linear unabhängig, d. h. die $(n-2)$-dimensionalen Achsen der $\mathfrak{b}_\nu$ sollen linear unabhängig sein,*[14] $\nu = 1, \ldots, n$. – (2) *Es sei K ein Kontinuum.*[15] – (3) *Für jedes $\mathfrak{b}_\nu$ sei die Menge derjenigen Hyperebenen aus $\mathfrak{b}_\nu$, in denen Paratingenten an K enthalten sind, nirgends dicht in $\mathfrak{b}_\nu$.*

Beh. (1) *Es ist K zusammenhängend im Kleinen.* – (2) *Jeder Stachel S_τ und jede Brücke B_i bezüglich eines (beliebigen) Bü-*

---

[14] Dies ist genau dann der Fall, wenn der Durchschnitt dieser n Achsen leer ist.

[15] Es darf K auch für eines der $\mathfrak{b}_\nu$ in einem $H \in \mathfrak{b}_\nu$ enthalten sein.

schels $\mathfrak{b}$ *paralleler Hyperebenen* ***mündet***, *wenn in der Hyperebene* $H \in \mathfrak{b}$, *dann in* ***genau einem Punkt*** *von* H. *Die abgeschlossenen Hüllen* $\bar{S}_r$, $\bar{B}_i$ *der* S_r *und* B_i *sind* ***einfache Bogen*** (d. h. topologische Bilder einer *abgeschlossenen* Strecke, vgl. vgl. Nr. 1.1.4.).

Zusätze. (1) Die Voraussetzungen des vorstehenden Hilfssatzes sind erfüllt, wenn K von endlichem Paratingentenordnungswert ist. – (2) Ist die Voraussetzung (1) vorstehenden Hilfssatzes nur für $n - 1$ (linear unabhängige) Büschel erfüllt, so braucht K nicht den Beh. (1) und (2) zu genügen; dies gilt also insbesondere für die im Satz der Nr. 2.1. betrachteten Kontinua.

Bew. *Betr. Beh.* (1) (vgl. [9], S. 270 ff.) (**A**) Es sei K in $x \in K$ *nicht* zusammenhängend im Kleinen. Dann gibt es eine feste n-dimensionale, abgeschlossene Kugel $C = \bar{C}$ mit x als Zentrum und eine Folge von Punkten $x_r \in K$ mit $x \neq x_r$ und mit $x_r \to x$ für $r \to \infty$ von folgender Eigenschaft: Die Komponente K_r von $C \cap K$, zu der x_r gehört, ist fremd zu x, aber nicht fremd zur $(n-1)$-dimensionalen Sphäre $S = C - \underline{C}$, und zwar für jedes $r = 1, 2, \ldots$; die K_r sind (Kontinua und) paarweise fremd; es existiert ein Punkt $y_r \in S \cap K_r$ und ein $y \in S$ mit $y_r \to y$ für $r \to \infty$. Wegen $x \in \underline{C}$ ist $x \neq y$. – (**B**) Zufolge der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{b}_\nu$ gibt es eine natürliche Zahl t mit $1 \leq t \leq n$ derart, daß die Achse von $\mathfrak{b}_t$ fremd ist zur Verbindungsgeraden von x und y. Mithin gibt es eine Hyperebene $H \in \mathfrak{b}_t$ derart, daß x und y sowie schließlich alle x_r bzw. y_r im Innern verschiedener, von H berandeter, n-dimensionaler abgeschlossener Halbräume liegen; die gleiche Eigenschaft besitzt dann jede Hyperebene aus einer Umgebung $\mathfrak{u}$ von H in $\mathfrak{b}_t$. Da K und K_r Kontinua sind, da ferner $x_r, y_r \in K_r$, so gibt es eine natürliche Zahl r_0 derart, daß der Durchschnitt eines *jeden* K_r für $r_0 \leq r$ mit einem *jeden* $H'' \in \mathfrak{u}$ nicht leer ist. Jedes H'' enthält also unendlich viele Punkte von K, d. h. eine Paratingente an K (vgl. Nr. 1.1.1.), und diese H'' liegen nicht nirgends dicht in $\mathfrak{b}_t$. Widerspruch zur Vor. – Betr. Beh. (2). Indirekt. Die Brücke T oder der Stachel T möge gleichzeitig in den Punkten $x, y \in H \in \mathfrak{b}$ münden, wobei $x \neq y$. Dann gibt es also $x_r \in T = T - H$ (weil T fremd zu H) sowie $y_r \in T$ mit $x_r \to x$ und $y_r \to y$ für $r \to \infty$ derart, daß x_r, y_r die

Endpunkte eines einfachen Bogens K_r (nämlich eines Teilbogens von T) und daß diese K_r paarweise fremd sind.[15a] Auf $x, x_r; y, y_r$ lassen sich nun die Überlegungen im Bew. betr. Beh. (1), (B) anwenden. – Betr. Zusatz (2). Es sei $n = 2$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ das Büschel der Parallelen zur y-Achse des E_2. Es sei K das Sinusoid: $y = \sin x^{-1}$ für $0 < x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ für $x = 0$. Hier ist $x = 0$ die einzige Paratingente an K in $\mathfrak{b}$; und $y = \sin x^{-1}$ für $0 < x \leq 1$ ist ein Stachel relativ $\mathfrak{b}$, der in jedem Punkt $(0, y)$ mit $0 \leq y \leq 1$ mündet.

2.2.1. Wir bemerken weiter

Satz. Vor. (1) *Es sei* $\mathfrak{b}$ *ein Büschel paralleler Hyperebenen im* E_n *mit* $n \geq 2$. – *Das Kontinuum* K *sei in keiner Hyperebene aus* $\mathfrak{b}$ *enthalten.* – (2) (a) *Es sei* K *von endlichem Paratingentenordnungswert* (also bezüglich eines jeden Büschels); (b) *insbesondere seien Paratingenten an* K *enthalten genau in den* k *Hyperebenenen* $H_1, \ldots, H_k$ *aus* $\mathfrak{b}$, *wobei* $1 \leq k$.

Beh. (A) *Ist* $k = 1$ *und* H_1 *die (einzige) Hyperebene aus* $\mathfrak{b}$, *in der Paratingenten an* K *enthalten sind, so ist* $D_1 = H_1 \frown K$ *zusammenhängend. Und in* D_1 *mündet mindestens ein Stachel (während Brücken nicht existieren).*

(B) *Hingegen gilt für* $2 \leq k$ *folgendes:*

(1) *In jeder Komponente eines jeden* $D_\varkappa = K \frown H_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots k$, *mündet mindestens eine Brücke* B_i *zwischen* $H_\varkappa$ *und einer der in* $\mathfrak{b}$ *zu* $H_\varkappa$ *benachbarten unter den Hyperebenen* $H_1, \ldots, H_k$. – (2) *Jedes* $D_\varkappa$ *besitzt nur endlich viele (ein- und mehrpunktige) Komponenten* ($\varkappa = 1, \ldots, k$).

1. Anmerkung. Bezüglich $k = 0$, d. h. des Falles, daß in *keiner* Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ Paratingenten aus $\mathfrak{b}$ liegen, vgl. den Satz in Nr. 1.3.

[15a] Zufolge der Annahme gibt es nämlich innere Punkte x'_r, y'_r von $T'_0 = T$ mit $x'_r \to x$ und $y'_r \to y$, die sämtlich verschieden sind. Ist $K_1 = x_1 y_1$ der durch $x_1 = x'_1$, $y_1 = y'_1$ begrenzte Teilbogen von T'_0, so ist $S_1 = T'_0 - K_1$ Vereinigung fremder Teilbogen T'_1, T'_2. Weil T aber $\mathfrak{b}$-einfach ist, sind schließlich alle x'_r sowohl als y'_r, etwa für $r \geq t$, innere Punkte eines der T'_1, T'_2, etwa von T'_1. Setzt man $x_2 = x'_t$, $y_2 = y'_t$, so läßt sich auf T'_1 und $K_2 = x_2 y_2$ der gleiche Schluß anwenden wie vorher auf T'_0 und K_1; usw.

2. Anmerkung. Die Vor. (2) (a) des Satzes wird nur beim Beweis von Beh. (B) benutzt. Statt der Vor. (2) (a) würden die Vor. (1) und (3) des Satzes in Nr. 2.1.1. genügen.

Bew. (I) Wir zeigen zunächst:

Lemma. Vor. (1) und (2) wie im Satz (Nr. 2.2.1.). – (3) Es sei k' mit $1 \leq k' \leq k$ beliebig und $H = H_{k'}$ sowie $D = D_{k'} = K \frown H_{k'}$ gesetzt. Zu H ist in $\mathfrak{h}$ unter den übrigen $H_1, \ldots, H_k$ benachbart entweder keine ($k = 1$) oder eine ($k = 2$) evtl. zwei ($k \geq 3$), etwa H' evtl. H' und H''. – (4) Es sei $D = \bigcup_{\varrho=1}^{r} D'_\varrho$ eine „Spaltung" von D in die $r \geq 2$ „Stücke" D'_ϱ.[16]

Beh. (1) Falls $k \geq 2$, mündet in jedem Stück D'_ϱ mindestens eine Brücke B_i zwischen H und H' oder H'', soweit H'' existiert. – (2) Falls $k = 1$ ist, existiert keine Spaltung von D und in D mündet mindestens ein Stachel (aber keine Brücke).

Bew. des Lemmas. Betr. Beh. (1) (des Lemmas). Fall $k \geq 2$ (Wenn $k = 2$, existiert H'' nicht.)

[1,1] Für jedes ϱ existieren (vgl. [2], S. 129, Nr. 2.1.1.) Umgebungen U_ϱ (in E_n) von D'_ϱ sowie Hyperebenen $H'_0, H''_0 \in \mathfrak{h}$ von folgender Beschaffenheit: (a) Die $\bar{U}_\varrho$ sind paarweise fremd. – (b) Jedes U_ϱ sowie H liegt in der offenen, von H'_0 und H''_0 begrenzten (Parallel-)Schicht R_0. – (c) Es ist $\bar{R}_0$ fremd zu H' und zu H'' (soweit H'' existiert). – (d) Es gehört $(H'_0 \smile H''_0) \frown \bar{U}_\varrho$ zur Begrenzung $G(U_\varrho)$ von U_ϱ; dabei ist $(H'_0 \smile H''_0) \frown \bar{U}_\varrho = T'_\varrho \smile T''_\varrho$ mit $T'_\varrho \subset H'_0$, $T''_\varrho \subset H''_0$, wobei T'_ϱ und T''_ϱ abgeschlossen und fremd sind. – (e) $G(U_\varrho) - (T'_\varrho \smile T''_\varrho)$ ist fremd zu K. – (f) Es ist $H'_0 \smile H''_0 \smile (R_0 - H)$ fremd zu allen $H_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$.

[1, 2] Ersetzt man H'_0 und H''_0 durch Hyperebenen H'_*, H''_* aus $\mathfrak{h}$, die näher an H liegen und wiederum H einschließen, ferner R_0 durch die von H'_*, H''_* begrenzte offene Schicht R_* und dementsprechend U_ϱ durch $U^*_\varrho = U_\varrho \frown R_*$, so besitzen R_* und U^*_ϱ wieder die Eigenschaften [1,1], (a)–(f).

[2] Es sind H'_0 und H''_0 nicht fremd zu (höchstens) endlich vielen Brücken und Stacheln, die in H, H' oder H'' münden; denn in H'_0 und H''_0 liegen keine Paratingenten an K (vgl. Nr. 2.1.,

---

[16] D. h. es seien die D'_ϱ nicht leer, abgeschlossen in D und paarweise fremd.

Satz). Daher kann und *soll* H_0' und H_0'' *so nahe an* H *gewählt werden* (vgl. Ziff. [1,2]), daß die abgeschlossene Hülle V der Vereinigung aller *in* $H' \cup H''$ *mündenden* (also nicht in H, d. h. *nicht in* D *mündenden*) *Stacheln* fremd ist zu $\bar{R}_0$, oder, was damit gleichbedeutend ist, fremd ist zu allen T_ϱ', T_ϱ'', $\varrho = 1, \ldots, r$. Es ist V (abgeschlossene) Teilmenge von K.

[3] Es seien $S_{\varrho\tau}$, $\tau = 1, \ldots, t_\varrho$, diejenigen endlich vielen in D_ϱ' mündenden Stacheln, die nicht fremd sind zu $T_\varrho' \cup T_\varrho''$. (Der Fall, daß es keine $S_{\varrho\tau}$ gibt, ($t_\varrho = 0$), wird eingeschlossen). Wir setzen $Z_\varrho = (K \cap \bar{U}_\varrho) \cup (\bigcup_{\tau=1}^{t_\varrho} S_{\varrho\tau})$. Diese Z_ϱ sind abgeschlossen und paarweise fremd. Ferner sind die Z_ϱ fremd zur Vereinigung W von V mit $K \cap (\bar{R}' \cup \bar{R}'')$, wobei $\bar{R}'$ bzw. $\bar{R}''$ den abgeschlossenen, von H' bzw. H'' begrenzten Halbraum bezeichnet, in dem H nicht enthalten ist; falls H'' nicht existiert, sei $\bar{R}''$ die leere Menge. Es ist $W = V \cup (K \cap (\bar{R}' \cup \bar{R}''))$ abgeschlossene Teilmenge von K.

[4] Schließlich seien $B_1, \ldots, B_m$ die in H, d. h. in D mündenden Brücken; dabei $k \geq 2$ und $m \geq 1$. *Mündet nun* z. B. *in* D_1' *keine der Brücken* B_μ, so ist Z_1 fremd zu $W \cup (\bigcup_{\mu=1}^{m} B_\mu) \cup (\bigcup_{\varrho=2}^{r} Z_\varrho) = X$. Es ist also X abgeschlossen und $K = X \cup Z_1$. Weder X noch Z_1 sind leer (weil D_1' und D_2' beide nicht leer; denn $r \geq 2$). Somit ist $X \cup Z_1$ eine Spaltung von K und folglich K nicht zusammenhängend; im Widerspruch damit, daß K ein Kontinuum ist.

Betr. Beh. (2) (des Lemmas) Fall $k = 1$. Hier gibt es keine Hyperebenen H', H'', und keine Brücken; aber in D mündet (mindestens) ein Stachel, weil K nicht in H enthalten ist. (Vgl. Nr. 2.1., Satz, Beh. (1)). Benutzt man wieder die beim Beweis der Beh. (1) des Lemmas eingeführten Bezeichnungen, so sind hier V und W leer, ferner $X = \bigcup_{\varrho=2}^{r} Z_\varrho$, also $K = \bigcup_{\varrho=1}^{r} Z_\varrho$ eine Spaltung von K (weil $r \geq 2$). Widerspruch.

(**II**) Beweis des *Satzes* (Nr. 2.2.1.).

Die Beh. (A) folgt aus der Beh. (2) des Lemmas.

Die Beh. (B) ergibt sich so: (**a**) *Jeder in* $D_\varkappa = K \cap H_\varkappa$ *mündenden Brücke ist eindeutig zugeordnet ein Stück* D_ϱ' *einer beliebig vorgegebenen Spaltung von* $D_\varkappa$ *und jedes Stück dieser Spaltung tritt bei dieser Zuordnung auch auf.* Nämlich: In jedem Stück mündet mindestens eine Brücke (gemäß Lemma, Beh. (1)). Außerdem *kann eine Brücke*, etwa B, *nur in einem der Stücke* D'_ϱ *münden*. Da nämlich K als von endlichem Paratingentenordnungswert angenommen ist (vgl. Vor. (2) (a)), sind die Voraussetzungen von Nr. 2.1.1., Hilfssatz bzw. Zusatz (1) erfüllt; gemäß der Beh. (2) dieses Hilfssatzes mündet aber jede Brücke (und jeder Stachel) in genau einem Punkt von $H_\varkappa$, also in genau einem der Stücke D'_ϱ, wenn sie (er) überhaupt in $H_\varkappa$ mündet. – (b) Gemäß Nr. 2.1., Satz, Beh. (2b), gibt es nur *endlich* viele, in $D_\varkappa$ mündende Brücken. Wegen (a) ist aber die Anzahl der Stücke einer beliebigen Spaltung von $D_\varkappa$ nicht größer als die Anzahl t dieser Brücken. Andererseits ist $D_\varkappa$ in q Stücke spaltbar, falls $D_\varkappa$ (mindestens) q Komponenten besitzt (vgl. z. B. [2], Nr. 1.3.1., S. 126). Somit ist die Anzahl q der Komponenten von $D_\varkappa$ höchstens gleich t, also jedenfalls endlich. Ferner existiert auch eine Spaltung von $D_\varkappa$, deren Stücke die q Komponenten von $D_\varkappa$ sind (vgl. [2], Nr. 1.3.1.). Zufolge (a) mündet daher in jeder *Komponente* von $D_\varkappa$ mindestens eine Brücke. Damit sind Beh. (B) (1) und (2) des Satzes bewiesen.

2.2.2. Ein wesentliches Teilergebnis des abschließenden Satzes (Nr. 2.3.) ist enthalten in dem folgenden

Satz. Vor. (1) *Es sei K ein Kontinuum im E_n vom Rang $r(K) \leq n-1$, wobei $n \geq 2$.* – (2) *Es besitze K endlichen Paratingentenordnungswert (also je beschränkten bezüglich eines jeden Büschels paralleler Hyperebenen des E_n).*

Beh. *Es ist K eine Strecke.*

Bew. Vollständige Induktion. – (A) Für $n = 2$ klar. – (B) Es sei *also* $n \geq 3$. *Induktionsvoraussetzung.* Der Satz sei richtig für alle t mit $2 \leq t < n$. – *Induktionsbehauptung.* Der Satz ist richtig für $n = t$. –

Bew. (I) Es sei $K \subset E_n$ und $\mathfrak{b}$ ein Büschel paralleler Hyperebenen in E_n derart, daß K in keinem $H \in \mathfrak{b}$ enthalten ist. Solche $\mathfrak{b}$ gibt es; da nämlich K mehrpunktig ist, gibt es Punkte $p, q \in K$ mit $p \neq q$, also Hyperebenen H' derart, daß p und q in verschiedenen, offenen, von H' begrenzten (t-dimensionalen) Halbräumen liegen, weshalb K weder in H' noch in einer zu H'

parallelen Hyperebene enthalten ist. Nach Vor. (2) gibt es höchstens endlich viele Hyperebenen aus $\mathfrak{h}$, in denen Paratingenten an K liegen; diese Hyperebenen, falls solche überhaupt existieren, seien $H_1, \ldots, H_k$. Gemäß Nr. 2.1., Satz (vgl. auch Nr. 2.2.1., Satz) gilt dann

$$K = \left(\bigcup_{\varkappa=1}^{k} (H_\varkappa \cap K)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{I} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{r \geq 1} S_r\right);$$

dabei bezeichnen B_i die Brücken und S_r die Stacheln. Da die Menge $\mathfrak{n}'$ von Hyperebenen in Nr. 2.1., Satz, hier endlich ist, gibt es insgesamt nur endlich viele Brücken B_i (vgl. Nr. 2. 1., Satz, Beh. (2b)); der Fall, daß es keine $H_\varkappa$ oder keine B_i oder keine S_r gibt, ist ausdrücklich einbegriffen.

(**II**) *Alle Brücken B_i und alle Stacheln S_r (soweit vorhanden) sind Strecken.* In der Tat: Die B_i, S_r sind ($\mathfrak{h}$-)einfache Bogen (gemäß Nr. 2.1.1., Hilfssatz, Beh. (2)), sie liegen im E_n mit $n \geq 3$, ihr Rang ist nicht größer als der von K, also nicht größer als $n - 1$ und sie besitzen endlichen Paratingentenordnungswert (als Teilmengen von K). Daher sind die Vor. von Nr. 1.6.2.1., Satz, für die $\overline{B}_i$ und $\overline{S}_r$ erfüllt (soweit solche $\overline{B}_i$ und $\overline{S}_r$ existieren).

Folgerung. Im Fall $k = 0$ ist K selbst ein einfacher Bogen der eben erwähnten Art, also eine Strecke. Damit ist *für $k = 0$ die Induktionsbehauptung bewiesen.*

(**III**) *Die Annahme $k \geq 1$ führt zu einem Widerspruch.* In der Tat:

(**III, 1**) *Jede mehrpunktige Komponente C eines $D_\varkappa = K \cap H_\varkappa$ ist eine Strecke.* (Man beachte, daß gemäß Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (B) (2), die Anzahl der (ein- und) mehrpunktigen Komponenten von $D_\varkappa$ endlich ist.) In der Tat: Jede mehrpunktige Komponente C von $D_\varkappa$ ist ein Kontinuum von endlichem Paratingentenordnungswert (weil dies von K vorausgesetzt wird). Außerdem ist der Rang $r(C)$ von C nicht größer als $r(K) - 1 = n - 2$; denn nach Konstruktion von $\mathfrak{h}$ ist K in keinem $H \in \mathfrak{h}$ enthalten (vgl. Ziff. (I)) und folglich ist $r(K \cap H) \leq r(L \cap H) = r(K) - 1$, wobei L der kleinste, K enthaltende lineare Unterraum von E_n, also nicht in H enthalten ist. Gemäß der Induktionsvoraussetzung folgt aus $C \subset H$, aus $r(C) \leq n - 2$ und aus der Tatsache, daß H ein E_{n-1} ist: Es ist C eine Strecke.

(III, 2) *Jede Komponente C' eines $D_\varkappa = K \cap H_\varkappa$ ist einpunktig* ($k \geq 1$). Nämlich: Da K in keinem $H \in \mathfrak{b}$ enthalten ist, mündet in C' eine Brücke V (falls $k \geq 2$) oder doch ein Stachel V (jedenfalls für $k = 1$). (Vgl. Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (B) bzw. (A).) Es ist V eine Strecke (vgl. Ziff. (II)). Ist nun C' mehrpunktig, also Strecke (gemäß Ziff. (III, 1)), und mündet die Strecke V in einem Endpunkt von C', so ist $W = C' \cup V$ Vereinigung zweier Strecken mit gemeinsamem Endpunkt, aber verschiedenen Trägergeraden; mündet aber V in einem inneren Punkt von C', so ist in $C' \cup V$ ein ebensolches Streckenpaar enthalten, das wir ebenfalls mit W bezeichnen. Wegen $W \subset E_n$ mit $n \geq 3$ besitzt aber W unendlichen Paratingentenordnungswert (gemäß Nr. 1.6.2., Hilfsssatz, Beispiel), im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß, K, also auch die Teilmenge W von K, endlichen Paratingentenordnungswert hat.

(III, 3) Da $D_\varkappa$ nur endlich viele Komponenten besitzt, speziell im Falle $k = 1$ nur eine einzige (gemäß Nr. 2.2.1., Satz), so existiert keine Paratingente an die (endliche) Menge $D_\varkappa$. Weil ferner die Brücken und Stacheln (gemäß Ziff. (II)) Strecken sind, können Paratingenten an K, die in $H_\varkappa$ liegen, nur dann auftreten, wenn in einer Komponente, d. h. in einem Punkt p von $D_\varkappa$, mindestens zwei unter den Brücken oder Stacheln münden und dann p als gemeinsamen Endpunkt, aber verschiedene Trägergeraden besitzen. Somit enthält K wiederum Streckenpaare der in Ziff. (III, 2) betrachteten Art, womit die Annahme, daß $H_\varkappa$ Paratingenten an K enthalten, sich als widerspruchsvoll erweist.

(III, 4) Aus Ziff. (III, 3) folgt, daß es keine Hyperebenen in $\mathfrak{b}$ gibt, in denen Paratingenten an K enthalten sind, d. h. daß die Annahme $k \geq 1$ widerspruchsvoll ist (für Büschel $\mathfrak{b}$, in denen K nicht enthalten ist). In dem somit nur noch möglichen Fall $k = 0$ ist aber die Induktionsbehauptung richtig (gemäß Ziff. (II), Folgerung).

2.3. Nunmehr sind sämtliche Hilfsmittel vorhanden zur Bestimmung aller Kontinua im E_n (mit $n \geq 2$), die einen Paratingentenordnungswert k mit $1 \leq k \leq n-1$ besitzen. Um das Ergebnis auch für den Fall $n = 2$ kurz formulieren zu können, bezeichnen wir als einen S t e r n im E_2 jede Vereinigung von abzählbar vielen, abgeschlossenen Strecken, die sämtlich den gleichen Punkt p als Endpunkt gemeinsam haben und deren jede eine größte Strecke ist, d. h. nicht echter Teil einer Strecke mit dem Endpunkt p, die im Stern enthalten ist; der Fall, daß der *Stern aus einer einzigen Strecke* besteht, sei *einbegriffen*.

Wir haben dann das

Theorem. V o r. (1) *Es sei K ein Kontinuum im* E_n *mit* $n \geq 2$. – (2) *Es besitze K einen Paratingentenordnungswert t mit* $t \leq n-1$.

B e h. (**A**). *Falls* $n \geq 3$, *ist entweder* $t = 1$ *oder* $t = n-1$. *Für* $t = 1$ *ist K eine Strecke; für* $t = n-1$ *ist K ein einfacher Bogen vom Komponentenordnungswert und vom Rang n, der überall eine (einzige) Tangente besitzt und dessen höchstens-hyperebene Teilbogen sämtlich Strecken sind (und wobei höchstens* $n-1$ *Paratingenten des Bogens zur gleichen Hyperebene parallel sind).*

(**B**) *Falls* $n = 2$, *ist stets* $t = 1$ *und K entweder ein einfacher Bogen vom Komponentenordnungswert und Rang 2 (nämlich ein, nicht notwendig differenzierbarer Konvexbogen ohne parallele Paratingenten) oder ein Stern von endlichem Komponentenordnungswert (der eine beschränkte, abgeschlossene Menge ist).*

A n m e r k u n g e n. (a) Nicht jeder Bogen im E_n vom Komponentenordnungswert n (mit einer einzigen Tangente in jedem Punkt und nur mit Strecken als höchstens-hyperebenen Teilbogen) besitzt einen Paratingentenordnungswert $\leq n-1$. Beispiel: $n = 2$, Kreisbogen vom Radius 1 und von der Länge $3.2^{-1}\pi$. – (b) Dagegen besitzt jeder Stern von endlichem Komponentenordnungswert den Paratingentenordnungswert 1 (für $n = 2$). – (c) Daß unter den betrachteten Kontinuen solche vorkommen können, in denen Strecken als Teilmengen auftreten, ist bedingt durch die *Festsetzung* in Nr. 1.1.3., derzufolge die Trägergerade einer Teilstrecke des Kontinuums als Paratingente nur in *einem* (nämlich verlängerten) Punkt, mithin als nur *eine* Paratingente der betreffenden Richtung gezählt wird. Trifft man diese Festsetzung nicht und *verbietet* demgemäß das *Auftreten von Teil-*

strecken, so bleiben in Beh. (A) nur differenzierbare, nirgends hyperebene Bogen vom Punktordnungswert n und in Beh. (B) nur Konvexbogen ohne Teilstrecken übrig. Auf die Frage, inwieweit aus der Differenzierbarkeit der Bogen vom Komponentenordnungswert n deren *stetige* Differenzierbarkeit folgt, soll in einer späteren Note eingegangen werden, die sich mit derartigen Bogen beschäftigt. – (d) Ein Stern in E_2 ist von endlichem Komponentenordnungswert genau dann, wenn er lokal zusammenhängend ist.

Bew. Da K als Kontinuum Paratingenten besitzt (vgl. Nr. 1.1.1.), ist stets $t \geq 1$.

(I) Vorbemerkung. Ist der *Rang* $r(K)$ von K *nicht größer* als $n - 1$, so ist K eine Strecke (gemäß Nr. 2.2.2.), also $t = 1$, und zwar für $n \geq 2$; in diesem Fall ist daher die Beh. richtig. Dementsprechend wird *für das Folgende* die *Annahme* gemacht, daß *K den Rang n besitzt*, daß also *K in keiner Hyperebene enthalten ist.*

Es sei nun $\mathfrak{b}$ ein (beliebiges) Büschel paralleler Hyperebenen. Der *Paratingentenordnungswert von K relativ $\mathfrak{b}$* sei k. Im *Falle* $k = 0$ ist K ein einfacher Bogen, auf den die in Ziff. (II, 3) (vgl. weiter unten) angestellten Überlegungen anwendbar sind, so daß wir diesen Fall zur Erledigung in Ziff. (II, 3) zurückstellen können.

Es sei also $k \geq 1$ und es seien $H_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k'$, mit $1 \leq k' \leq k$, diejenigen Hyperebenen aus $\mathfrak{b}$, in denen Paratingenten an K liegen. Da der Rang von $D_\varkappa = K \cap H_\varkappa$ kleiner als n (vgl. Nr. 2.2.2., Satz, Bew., Ziff. (III, 1)) und da jede Komponente von $D_\varkappa$ einpunktig oder ein Kontinuum von endlichem Paratingentenordnungswert ist, so folgt aus Nr. 2.2.2. sowie Nr. 2.2.1.: Jedes $D_\varkappa$ ist Vereinigung von *endlich vielen*, paarweise fremden, abgeschlossenen Mengen, die entweder *einpunktig* oder *Strecken* sind. Ferner genügt K den Voraussetzungen von Nr. 2.1.1., Satz bzw. Zusatz (1), so daß die Brücken B_i und Stacheln S_r (relativ $\mathfrak{b}$) (im Sinne von Nr. 2.1., Satz) je in genau einem Punkt eines $D_\varkappa$ münden und die $\bar{B}_i$, $\bar{S}_r$ einfache Bogen sind. Gemäß Nr. 2.1. und Nr. 2.2.1. gibt es nur endlich viele Brücken und abzählbar viele Stacheln. Daher ist K Vereinigung von abzählbar vielen einfachen Bogen, die paarweise fremd sind bis auf höchstens Endpunkte.

(**II**) Betr. Beh. (A). ($n \geq 3$).

(**II, 1**) *Es besitzt K keine Verzweigungspunkte* im Sinne der topologischen Kurventheorie (vgl. [8], S. 99). Nämlich: (**II, 1, 1**) Wegen der paarweisen Fremdheit der B_i und S_r[17] können Verzweigungspunkte von K nur in einem $D_\varkappa$ liegen. Da K einen Paratingentenordnungswert $\leq n-1$ besitzt, ist jedes B_i und jedes S_r entweder vom *Komponentenordnungswert n oder* eine *Strecke* (gemäß Nr. 1.6., Folgerung, und Nr. 1.6.2.1.). – (**II, 1, 2**) Ist (v) eine *einpunktige* Komponente von $D_\varkappa$ und ist v Verzweigungspunkt von K, so ist v gemeinsamer Endpunkt von mindestens 3 Bogen B_i oder S_r. Besitzt mindestens einer dieser drei Bogen den Komponentenordnungswert n, so ergibt sich aus Nr. 1.7.1., Hilfssatz, ein Widerspruch mit der Voraussetzung (2) unseres Satzes (in Nr. 2.3.). Sind dagegen alle drei Bogen Strecken, so ergibt sich aus Nr. 1.6.2., Hilfssatz, Beispiel, ein Widerspruch. – (**II, 1, 3**) Es sei jetzt T eine *mehrpunktige* Komponente von $D_\varkappa$, also T eine Strecke (vgl. Ziff. (I)). Entsprechend wie in Ziff. (II, 1, 2) folgt, daß kein Punkt von T Verzweigungspunkt von K ist, also insbesondere in keinem inneren Punkt der Strecke T ein B_i oder ein S_r mündet. Es kann daher höchstens in den Endpunkten von T ein B_i oder S_r münden, und zwar nur ein einziges.

(**II, 2**) Gemäß Ziff. (II, 1) dieses Beweises münden unter den B_i und S_r einerseits in jeder der endlich vielen *einpunktigen* Komponenten (v) von $D_\varkappa$ höchstens je zwei, andererseits (höchstens) in den Endpunkten der *mehrpunktigen* endlich vielen Komponenten T von $D_\varkappa$ höchstens je eines; die T sind sämtlich Strecken. Somit ist K Vereinigung von endlich vielen einfachen Bogen; und da K keine Verzweigungspunkte besitzt (vgl. Ziff. (II, 1)), *ist K* selbst ein *einfacher Bogen* (vgl. [8], S. 64).

(**II, 3**) Aus der Vor. (2) unseres Satzes (Nr. 2.3.) und aus $r(K) = n$ (vgl. Ziff. (I)) ergibt sich jetzt gemäß Nr. 1.6., Folgerung, daß

---

[17] Die $\bar{B}_i$ und $\bar{S}_r$ sind einfache Bogen und haben höchstens Endpunkte gemeinsam. (Vgl Nr. 2.1.1, Hilfssatz, Beh. (2).)

der einfache Bogen K den Komponentenordnungswert n besitzt; ferner ergibt sich aus Nr. 1.6.2.1., daß jeder höchstens hyperebene Teilbogen von K eine Strecke ist. Die Existenz der Halbtangenten in jedem Punkt von K folgt aus Nr. 1.6.1.1., Satz, weil der einfache Bogen K (vgl. Ziff. (II, 2)) endlichen Komponentenordnungswert besitzt; und die Existenz der Tangente folgt aus Nr. 1.6.1., Zusatz 2.

(**III**) Betr. Beh. (B) ($n = 2$) Wegen $t \geq 1$ und $t \leq n-1$ ist hier $t = 1$. Außerdem kann $r(K) = 2$ angenommen werden (vgl. diesen Beweis Ziff. (I)). Es gibt also in einem (beliebigen) Büschel $\mathfrak{b}$ paralleler Geraden höchstens ein H, das eine Paratingente enthält.

(**III, 1**) Besitzt K *bezüglich* $\mathfrak{b}$ den *Paratingentenordnungswert Null,* so ist K ein einfacher Bogen (gemäß Nr. 1.3., Satz), der gemäß Nr. 1.6., Folgerung, den Komponentenordnungswert 2 besitzt.

(**III, 2**) Es besitze also K den *Paratingentenordnungswert Eins* bezüglich $\mathfrak{b}$. Es sei H' die (einzige) Gerade aus $\mathfrak{b}$, die Paratingente an K ist. Gemäß Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (A), ist $D = H' \frown K$ zusammenhängend, also (wegen $n = 2$) D *einpunktig* oder eine *Strecke*. Brücken relativ $\mathfrak{b}$ gibt es nicht. Der Rang $r(S_r)$ eines jeden der (gemäß Nr. 2.1., Satz, Beh. (2b)) abzählbar vielen *Stacheln* S_r (relativ $\mathfrak{b}$) ist entweder 1 oder 2. Da $\overline{S}_r$ einfacher Bogen ist (vgl. Nr. 2.1.1., Satz, Beh. (2)), muß jedes S_r entweder eine *Strecke* oder ein *Bogen vom Komponentenordnungswert* Zwei sein (letzteres wegen Nr. 1.6., Folgerung). Dementsprechend unterscheiden wir zunächst die beiden Fälle (III, 2, 1) und (III, 2, 2), nämlich:

(**III, 2, 1**) *Es ist D einpunktig, etwa $D = (d)$. In d* münden alle S_r. Man hat die Unterfälle: (**III, 2, 1a**). *Alle S_r sind Strecken.* Dann ist K ein Stern mit mindestens 2 (größten) Strecken ohne gemeinsame Trägergerade (weil $r(K) = 2$). Ist dieser Stern K *nicht* von endlichem Komponentenordnungswert, so gibt es eine, d nicht enthaltende Gerade G, deren Durchschnitt mit K unendlich viele Komponenten besitzt. Dann ist aber G Paratingente an K (gemäß Nr. 1.1.1.) und der Stern enthält somit mehr als 2 (sogar unendlich viele) größte Strecken. Da die $\bar{S}_r$ fremd sind bis auf den gemeinsamen Endpunkt d, sind hier für K die Voraussetzungen von Nr. 1.7., Hilfssatz, erfüllt; mithin existiert eine zu G parallele, d enthaltende Paratingente an K im Widerspruch zur Vor. (2) unseres Satzes (der Nr. 2.3.). Es besitzt also der Stern K endliche Komponentenordnung. – **(III, 2, 1b)** *Mindestens eines der* S_r, *etwa* S_1, *besitzt den Komponentenordnungswert Zwei.* Da die $\bar{S}_r$ paarweise fremd sind bis auf den gemeinsamen Endpunkt d, sind die Voraussetzungen von Nr. 1.7.1., Hilfssatz, erfüllt, falls mindestens 3 Stacheln in d münden; in diesem Fall besäße also K mindestens den Paratingentenordnungswert 2, gegen die Vor. Daher mündet in d, außer S_1, nur noch höchstens ein und wegen $r(K) = 2$ auch genau ein S_r, etwa S_2. Es ist $K = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ zufolge der Definition der S_r ein einfacher Bogen. Außerdem besitzt K den Komponentenordnungswert Zwei (Vgl. Nr. 1.6., Folgerung).

(III, 2. 2) *Es ist D eine Strecke.* Da K Vereinigung von D und abzählbar vielen untereinander und zu D fremden $\mathfrak{b}$-einfachen Bogen, nämlich den S_r, ist, enthält K nur abzählbar viele (größte) Strecken. Somit gibt es Büschel $\mathfrak{b}''$ paralleler Geraden derart, daß der Durchschnitt von K mit keinem $H \in \mathfrak{b}''$ eine Strecke enthält. Besitzt nun K bezüglich $\mathfrak{b}''$ den Paratingentenordnungswert Null, so liegt der schon erledigte Fall (III, 1) vor. Besitzt aber K den Paratingentenordnungswert Eins bezüglich $\mathfrak{b}''$, so sei $H'' \in \mathfrak{b}''$ die Paratingente an K. Nach Konstruktion von $\mathfrak{b}''$ ist $D = H'' \cap K$ keine Strecke, also einpunktig; damit sind wir auf den schon erledigten Fall (III, 2.1) zurückgeführt.

(III, 3) Schließlich ist noch zu bemerken, daß ein *Bogen im E_2* vom *Paratingentenordnungswert Eins* und vom *Komponentenordnungswert* Zwei ein Konvexbogen ist, d. h. daß sein Durchschnitt mit einer beliebigen Geraden besteht entweder aus keinem, einem oder zwei Punkten oder aus einer Strecke. In der Tat überzeugt man sich, daß der Bogen mindestens den Paratingentenordnungswert Zwei besitzt, falls einer der Durchschnitte aus einer Strecke und einem Punkt oder aus zwei Strecken besteht.

Literatur

[1] Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1932), 20–39.

[2] Haupt, Limessätze bei geometrischen Ordnungen, Annali di mat. 4. Ser. 23 (1944), 123–148.

[3] Haupt, Kontinua von n-ter Ordnung im projektiven n-dimensionalen Raum, Mat. Ann. 121 (1949), 41–51.

[4] Haupt, Über Kennzeichnungen lokal konvexer ebener Bogen, insbesondere auch dualisierbarer, Abh. math. Seminar Univ. Hamburg 21 (1957), 44–54.

[5] Haupt, Gestalten ebener Kontinua ohne parallele Paratingenten. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. Sitz.-Ber. Jahrg. 1955, 26*; sowie: Kontinua im n-dimensionalen Raum, mit $n \geqq 3$, ohne zur gleichen Hyperebene parallele Paratingenten, ebenda 29*/30*.

[6] Haupt-Nöbeling-Pauc, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 182 (1940), 105–121.

[7] Hausdorff, F., Mengenlehre, 3. Aufl. (Berlin 1935).

[8] Menger, K., Kurventheorie (Leipzig u. Berlin 1932).

[9] Rosenthal, A., Über Kontinua von endlicher Ordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1932), 270–273.

[10] Haupt, Sur la notion de courbe continue dépourvue de paratingentes parallèles. C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), 297–299.

[11] Haupt, Sur les figures des courbes planes sans paratingentes parallèles. C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), 440–442.