BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Schlichtheitsschranke von *James S. Thale*

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 5. Oktober 1956

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] hat Herr Thale neben anderen ähnlichen Sätzen bewiesen, daß der Kettenbruch

$$(1)\quad F_0(z) = \frac{1|}{|1} + \frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \cdots \qquad \left(|a_\nu| \leqq \frac{1}{4} \text{ für alle } \nu\right),$$

der bekanntlich für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert[2] und folglich für $|z| < 1$ analytisch ist, den Kreis $|z| < 12\sqrt{2} - 16 = 0{,}97\ldots$ *schlicht* abbildet, das heißt, daß für $z_1 \neq z_2$ stets auch $F_0(z_1) \neq F_0(z_2)$ ist. Er vermutet, daß sogar der ganze Kreis $|z| < 1$ schlicht abgebildet wird. In der Tat wird zunächst wohl kaum jemand die Richtigkeit dieser naheliegenden Vermutung bezweifeln; dennoch ist sie *falsch*, und die Schranke $12\sqrt{2} - 16$ ist sogar die *bestmögliche*.

Zum Beweis folgen wir zunächst Herrn Thales Gedankengang und setzen

$$(2)\quad F_\nu(z) = \frac{1|}{|1} + \frac{a_{\nu+1} z|}{|1} + \frac{a_{\nu+2} z|}{|1} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

was für $\nu = 0$ mit (1) übereinstimmt. Offenbar ist für $|z| \leqq \varrho < 1$

$$(3)\quad 0 < |F_\nu(z)| \leqq \frac{1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho|}{|1} - \cdots = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{F_\nu(z)} = 1 + a_{\nu+1}\, z F_{\nu+1}(z),$$

[1] James S. Thale: Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms. Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol. 7, Seite 232–244 (1956).

[2] Siehe z. B. mein Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1. oder 2. Aufl. Seite 262.

also

$$\frac{1}{F_\nu(z_2)} - \frac{1}{F_\nu(z_1)} = a_{\nu+1}\left[z_2 F_{\nu+1}(z_2) - z_1 F_{\nu+1}(z_1)\right]$$

$$= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2)\left[z_2 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_1)} - z_1 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_2)}\right]$$

$$= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2)\left[z_2\left(1 + a_{\nu+2} z_1 F_{\nu+2}(z_1)\right)\right.$$

$$\left. - z_1\left(1 + a_{\nu+2} z_2 F_{\nu+2}(z_2)\right)\right].$$

Multipliziert man mit $F_\nu(z_1)\, F_\nu(z_2)$ und setzt zur Abkürzung

$$F_\nu(z_1)\, F_\nu(z_2)\, F_{\nu+1}(z_1)\, F_{\nu+1}(z_2) = Q_\nu, \tag{4}$$

so kommt:

$$F_\nu(z_1) - F_\nu(z_2) \tag{5}$$

$$= a_{\nu+1} Q_\nu (z_2 - z_1) + a_{\nu+1} a_{\nu+2} Q_\nu z_1 z_2 \left[F_{\nu+2}(z_1) - F_{\nu+2}(z_2)\right].$$

Schreibt man diese Formel der Reihe nach für $\nu = 0, 2, 4, \ldots, 2n$ auf, so ergibt sich durch sukzessives Einsetzen:

$$F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0 (z_2 - z_1) \times$$

$$\times\left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_2 a_3 a_4 \ldots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \ldots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu\right] \tag{6}$$

$$+ a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n+2} Q_0 Q_2 \ldots Q_{2n} z_1^{n+1} z_2^{n+1} \left[F_{2n+2}(z_1) - F_{2n+2}(z_2)\right].$$

Nun ist $|a_\lambda| \leqq \frac{1}{4}$ und für $|z_k| \leqq \varrho < 1$ $(k = 1, 2)$ ist nach (3)

$$0 < |F_\lambda(z_k)| \leqq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}$$

und folglich

$$0 < |Q_\lambda| \leqq \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}\right)^4.$$

Daher ergibt sich aus (6) für $n \to \infty$

$$F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0 (z_2 - z_1) \times$$

$$\times\left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 a_4 \ldots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \ldots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu\right]. \tag{7}$$

Nun hat man aber die Abschätzung

(8)
$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 \ldots a_{2\nu+1}\, Q_2 Q_4 \ldots Q_{2\nu}\, z_1^\nu z_2^\nu\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2\nu}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right)^{4\nu} \varrho^{2\nu}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho^2}{(1+\sqrt{1-\varrho})^4}\right)^{\nu} = \frac{\varrho^2}{(1+\sqrt{1-\varrho})^4} \Big/ \left(1 - \frac{\varrho^2}{(1+\sqrt{1-\varrho})^4}\right).$$

Speziell für $\varrho < 12\sqrt{2} - 16$ ist

(9)
$$\frac{\varrho}{(1+\sqrt{1-\varrho})^2} < \frac{12\sqrt{2}-16}{(1+\sqrt{17-12\sqrt{2}})^2} = \frac{12\sqrt{2}-16}{(1+3-2\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{12\sqrt{2}-16}{24-16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

also ist $\frac{\varrho^2}{(1+\sqrt{1-\varrho})^4} < \frac{1}{2}$, und folglich die Reihe in (8) und (7) absolut $< \frac{1}{2} \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$, also $\neq -1$. Daher ist die eckige Klammer in (7) von 0 verschieden, also für $z_2 \neq z_1$ auch $F_0(z_2) \neq F_0(z_1)$. Das ist das Resultat von Thale.

Nunmehr betrachten wir den speziellen Kettenbruch (1), bei dem $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_\nu = -\frac{1}{4}$ für $\nu \geqq 3$ ist, während a_1 beliebig sein darf. Bei diesem ist

$$F_\nu(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}z|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}z|}{|1} - \cdots = \frac{2}{1+\sqrt{1-z}} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2,$$

wobei die Quadratwurzel mit positivem Realteil zu nehmen ist. Nach (4) ist dann auch

$$Q_\nu = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{1-z_2}}\right)^2 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2,$$

und die Formel (7) nimmt folgende Gestalt an:

$$F_0(z_1) - F_0(z_2)$$
$$= a_1 Q_0 (z_2 - z_1)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2\nu} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{1-z_2}}\right)^{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu\right]$$
$$= a_1 Q_0 (z_2 - z_1)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z_1}{(1+\sqrt{1-z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1+\sqrt{1-z_2})^2}\right)^{\nu}\right].$$

Es wird also $F_0(z_1) = F_0(z_2)$ sein, wenn die eckige Klammer verschwindet, wenn also

$$\frac{z_1}{(1+\sqrt{1-z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1+\sqrt{1-z_2})^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Das trifft zunächst zu, wenn die beiden Brüche auf der linken Seite gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, was $z_1 = z_2 = 12\sqrt{2} - 16$ liefert. Es trifft aber auch zu, wenn

$$(10) \qquad \frac{z_1}{(1+\sqrt{1-z_1})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\alpha}, \qquad \frac{z_2}{(1+\sqrt{1-z_2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\alpha}$$

ist. Das ergibt für z_1 und z_2 zwei *verschiedene* Werte, die für hinreichend kleines $|\alpha|$ beliebig nahe bei dem vorhin gefundenen Wert $12\sqrt{2}-16$ liegen. Somit kann die Thalesche Schranke $12\sqrt{2}-16$ durch keine größere ersetzt werden.

Das Beispiel lehrt auch noch, daß der von Herrn Thale beim Beweis herangezogene, angeblich aus einem (wohl mißverstandenen) Satz von Montel folgende Umstand, daß notwendig $|z_1| = |z_2|$ sein muß, nicht zutrifft. Denn die Gleichungen (10) liefern zwar bei rein imginärem α für z_1 und z_2 zwei konjugiert-komplexe Werte, also $|z_1| = |z_2|$, bei reellem α aber zwei verschiedene positive Werte, also $|z_1| \neq |z_2|$.