BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eng korrespondierendes klassisches Modell eines quantenmechanischen Elektrons

Von Fritz Bopp in München

Vorgelegt am 2. März 1956

Übersicht

1. Das Modell des Elektrons und seine Liouvillesche Gleichung 2
2. Integration mitttels Lösungen von Schrödingergleichungen 3
3. Ableitung der statistischen Bewegungsgleichung der Quantenmechanik 8

An anderer Stelle ist gezeigt worden, daß man den Zustand eines quantenmechanischen Systems durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum darstellen kann, derart daß allen quantenmechanischen Bewegungen im Raum Bewegungen der Verteilungsfunktionen im Phasenraum eindeutig und beinahe umkehrbar zugeordnet sind.[1] Die der Liouvilleschen Gleichung entsprechende statistische Bewegungsgleichung der Quantenmechanik kann man leicht aus der Schrödingergleichung ableiten.

Hier wollen wir zeigen, daß die statische Bewegungsgleichung eines quantenmechanischen Elektrons sehr eng mit der Liouvilleschen Gleichung für ein ausgedehntes Elektron zusammenhängt. In Ziff. 1 geben wir die klassische Hamiltonfunktion für ein eindimensionales ausgedehntes Elektron und bestimmen daraus die zugehörige Liouvillesche Gleichung der statistischen Mechanik. In Ziff. 2 wird bewiesen, daß man alle Lösungen dieser klassischen Gleichung aus den vollständigen Orthogonalsystemen von Lösungen zugeordneter Schrödingergleichungen ableiten kann. Nach Ziff. 3 gelangt man von hier aus zur statistischen Bewegungsgleichung der Quantenmechanik, wenn man nur eine Auswahl von Lösungen betrachtet und die Liouvillesche Verteilungsfunktion durch gleitende Mittelwerte ersetzt, zu denen man übergehen

[1] F. Bopp, Ann. de l'Institut Henri Poincaré, 1956 (im Druck), zitiert als I; F. Bopp, Hund-Czerny-Kolloquium, Frankfurt/Main, Februar 1956, zitiert als II; Z. Phys. **144**, 13 (1956).

muß, wenn nicht beliebig feine Beobachtungen möglich sind. Wir erhalten so ein Modell, dessen Korrespondenz zur Quantenmechanik sehr viel enger ist als die des Punktelektrons.

1. Das Modell des Elektrons und seine Liouvillesche Gleichung

Wir betrachten Teilchen in einem eindimensionalen Raum. Ihre Ausdehnung sei $2\,Q$ (Teilchenradius $= Q$). Sie seien negativ elektrisch geladen, und ihre Ladungsverteilung sei homogen (Ladungsdichte $= -e/2Q =$ const.) Bewegen sie sich in einem elektrischen Feld mit dem Potential $\Phi(x)$, so ist die potentielle Energie gleich

$$U = -\frac{e}{2Q}\int_{q-Q}^{q+Q} \Phi(x)\,dx, \tag{1}$$

wenn q der Ort des Teilchenmittelpunktes ist. Mit den Abkürzungen

$$V(x) = -e\,\Phi(x), \quad Z(x) = \int_{x_0}^{x} V(\xi)\,d\xi \tag{2}$$

können wir dafür schreiben:

$$U = \frac{1}{2Q}\,[Z(q+Q) - Z(q-Q)]. \tag{3}$$

Sei ferner M die Masse der Teilchen und p ihr Impuls, so lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2Q}\,[Z(q+Q) - Z(q-Q)]. \tag{4}$$

Dieses Modell vervollständigen wir durch die Annahme, daß der Elektronenradius Q keine universelle Konstante sein soll, sondern das er gemäß

$$Q = Q(P_1, P_2 \ldots; Q_1, Q_2 \ldots) \tag{5}$$

von den verborgenen Parametern $P_1, P_2 \ldots, Q_1, Q_2 \ldots$ abhänge, genauer gesagt von ‘inneren’ kanonischen Koordinaten des Elektrons. Spezielle Annahmen über die Gestalt der Funktion Q brauchen wir nicht, da Q ein Integral der Bewegung ist. Wir setzen nur voraus, daß es das einzige Integral sei, welches von den äußeren Koordinaten nicht abhängt.

Denn dann sind statistische Gesamtheiten von Elektronen, deren Bewegung durch die Hamiltonfunktion (4) beschrieben wird, nach einem Satze von Fermi[1] in den Mikrovariablen quasiergodisch. In diesen wird sich ein statistisches Gleichgewicht einstellen und wir wollen annehmen, daß dies in äußerst kurzer Zeit geschehe, so daß die Verteilungsfunktion

$$g = g\,(p, q, Q, t) \tag{6}$$

außer von p, q und t nur noch von Q abhängt, was hinsichtlich der inneren Variablen mit dem Boltzmannfaktor vergleichbar ist, der die kanonischen Koordinaten nur als Bestimmungsstücke der Energie enthält.

Die Verteilungsfunktion (6), in der bereits jetzt spezielle Züge der Mikromechanik nicht mehr enthalten sind, setzen wir in die aus (4) folgende Liouvillesche Gleichung ein. Wegen des integralen Charakters von Q fallen dabei die Ableitungen nach den Mikrovariablen heraus, so daß sich die Gleichung

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{p}{M}\,\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{1}{2Q}\,(V\,(q+Q) - V\,(q-Q))\,\frac{\partial g}{\partial p} = 0 \tag{7}$$

ergibt, aus der die Liouvillesche Gleichung für ein Punktelektron folgt, wenn wir annehmen, daß sich V in Gebieten, in denen die Verteilungsfunktion merklich von 0 verschieden ist, nur wenig mit Q ändert, so daß wir den Differenzenquotienten $(V\,(q+Q) - V\,(q-Q))/2\,Q$ durch den Differentialquotienten $V'\,(q)$ ersetzen dürfen.

2. Integration mittels Lösungen von Schrödingergleichungen

Die Integration von Gl. (7) kann in Strenge auf die von Schrödingergleichungen zurückgeführt werden. Dazu betrachten wir neben q und Q nicht p, sondern pQ als unabhängige Variable und

[1] E. Fermi, Z. Phys. **24**, 261 (1923).

stellen die Verteilungsfunktion $g(p, q, Q, t)$ durch folgendes Fourierintegral dar:

$$g = \int G(\alpha, q, Q, t) \exp\left(\frac{-2i\alpha Qp}{\hbar}\right) d\alpha. \tag{8}$$

Substitution in Gl. (7) ergibt mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{\partial \exp(\;)}{\partial Q} = -\frac{2i\alpha p}{\hbar} \exp(\;)$$

nach einer partiellen Integration

$$\int \left\{\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\hbar}{2i\alpha M}\frac{\partial^2 G}{\partial q\,\partial Q} + \frac{i\alpha}{\hbar}(V(q+Q) - V(q-Q))\,G\right\} \exp\left(\frac{-2i\alpha Qp}{\hbar}\right) d\alpha = 0$$

Nach dem Fourierschen Integraltheorem folgt daraus unmittelbar:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\hbar}{2i\alpha M}\frac{\partial^2 G}{\partial q\,\partial Q} + \frac{i\alpha}{\hbar}(V(q+Q) - V(q-Q))\,G = 0 \tag{9}$$

Diese Gleichung ist bis auf einen Zahlenfaktor mit der v. Neumannschen Gleichung der Quantenmechanik äquivalent. Setzen wir

$$q + Q = x', \; q - Q = x'' \tag{10}$$

und

$$G(\alpha, q, Q, t) = \frac{|\alpha|}{\pi\hbar} P(\alpha, x', x'', t), \tag{11}$$

so folgt daraus

$$\frac{i\hbar}{\alpha} \dot{P} = -\frac{\hbar^2}{2M\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x''^2}\right) + (V(x') - V(x''))\,P, \tag{12}$$

d. i. die v. Neumannsche Gleichung[1] mit $\hbar/\alpha$ an Stelle von $\hbar$.

Der Faktor $|\alpha|/\pi\hbar$ in Gl. (11) ist so gewählt, daß aus dem Normierungsintegral $\int g\,dp\,dq\,dQ = 1$ für die Matrix $\underline{P}(\alpha, t)$ mit den Elementen $< x' \,|\, \underline{P}(\alpha, t) \,|\, x'' > = P(\alpha, x', x'', t)$ die Spurbedingung

---

[1] J. v. Neumann, Math. Grundl. d. Quantenmechanik, Springer, Berlin 1932, hier Kap. IV, § 1, Gl. (Z_1).

$$(13) \qquad \int \operatorname{Spur} \underline{P}(\alpha, t)\, d\alpha = \int P(\alpha, x', x', t)\, dx'\, d\alpha = 1$$

folgt, welche der Bedingung Spur $\underline{P} = 1$ in der Quantenmechanik entspricht.

Gl. (12) läßt sich bekanntlich mit dem Separationsansatz

$$(14) \qquad P = \psi_k(\alpha, x', t)\, \psi_l^*(\alpha, x'', t)$$

lösen, in dem die Funktionen

$$(15) \qquad \psi = \ldots \psi_k(\alpha, x, t), \ldots \psi_l(\alpha, x, t), \ldots$$

Glieder vollständiger Sätze orthogonaler und normierter Integrale der Schrödingergleichungen

$$(16) \qquad \frac{i\hbar}{\alpha} \frac{\partial \psi(\alpha, x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi(\alpha, x, t)}{\partial x^2} + V(x)\, \psi(\alpha, x, t)$$

sind, die sich von der gewöhnlichen Schrödingergleichung abermals nur darin unterscheiden, daß der Parameter α noch von 1 verschieden sein kann.

Wenn die Integrale der Schrödingergleichungen (16) bekannt sind, kann man daraus die der Liouvilleschen Gleichung (7) berechnen. Aus Gl. (14) folgt bei willkürlicher Wahl von $A_{k'l'}(\alpha)$

$$(17) \qquad P(\alpha, x', x'', t) = \sum_{k', l'} A_{k'l'}(\alpha)\, \psi_{k'}(\alpha, x', t)\, \psi_{l'}^*(\alpha, x'', t)$$

als allgemeines Integral von Gl. (12), und die Verteilungsfunktion g ist nach den Gl. (8), (10) und (11) gleich

$$(18) \qquad g = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{k', l'} \int |\alpha|\, A_{k'l'}(\alpha)\, \psi_{k'}(\alpha, q+Q, t)\, \psi_{l'}^*(\alpha, q-Q, t) \exp\left(-\frac{2i\alpha Q p}{\hbar}\right) d\alpha.$$

Die Koeffizienten $A_{k'l'}(\alpha)$ berechnen sich aus den Anfangswerten von g, also aus der Gleichung

$$g(p, q, Q, 0) =$$
$$= \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{k'l'} \int |\alpha|\, A_{k'l'}(\alpha)\, \psi_{k'}(\alpha, q+Q, 0)\, \psi_l^*(\alpha, q-Q, 0) \exp\left(\frac{-2i\alpha Q p}{\hbar}\right) d\alpha.$$

Multiplikation mit $\pi\hbar \exp(i\xi\eta)$ und Integration über $\xi \equiv \frac{2Qp}{\hbar}$ ergibt:

$$\pi\hbar \int g\left(\frac{\hbar\xi}{2Q}, q, Q, 0\right) \exp(i\,\xi\eta)\, d\xi =$$
$$= 2\pi \sum_{k'l'} |\eta|\, A_{k'l'}(\eta)\, \psi_{k'}(\eta, q+Q, 0)\, \psi_{l'}^{*}(\eta, q-Q, 0)$$

Weitere Multiplikation mit $\psi_k^*(\eta, q+Q, 0)\,\psi_l(\xi, q-Q\; 0)$ und Integration über q und Q führt wegen der Orthogonalität der ψ_k schließlich zu den Ausdrücken

$$(19)\quad A_{kl}(\alpha) = \frac{\hbar}{|2\alpha|} \int \psi_k^*(\alpha, x', 0)\, g\left(\frac{\hbar\xi}{x'-x''}, \frac{x'+x''}{2}, \frac{x'-x''}{2}, 0\right) \cdot$$
$$\cdot\, \psi_l(\alpha, x'', 0) \exp(i\alpha\xi)\, dx'\, dx''\, d\xi.$$

Sie geben zusammen mit Gl. (18) die Lösung für das durch die Liouvillesche Gleichung (7) definierte Anfangswertproblem, vorausgesetzt daß die Schrödingerfunktionen $\psi_k(\alpha, x, t)$ für alle k und α bekannt sind.

Auch bei der Berechnung der Mittelwerte beliebiger Funktionen $F(p, q, Q)$ zeigt sich die enge Verwandtschaft der obigen Liouvilleschen Gleichung mit der Quantenmechanik. Aus der Definitionsgleichung für Mittelwerte

$$(20)\qquad \bar{F} = \int F(p, q, Q)\, g(p, q, Q, t)\, dp\, dq\, dQ$$

folgt, wenn wir darin Gl. (8) einsetzen und (10) und (11) berücksichtigen:

$$(21)\quad \bar{F} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int |\alpha|\, F\left(p, \frac{x'+x''}{2}, \frac{x'-x''}{2}\right) P(\alpha, x', x'', t)$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{i\alpha p}{\hbar}(x'-x'')\right) dx'\, dx''\, d\alpha.$$

Führen wir neben den Matrizen $\underline{P}(\alpha, t)$ mit den Elementen

$$(22)\qquad \langle x' | \underline{P}(\alpha, t) | x'' \rangle = P(\alpha, x', x'', t)$$

auch die Operatormatrizen $\underline{F}(\alpha)$ mit den Elementen

(23) $$<x'|\underline{F}(\alpha)|x''> =$$
$$= \frac{|\alpha|}{2\pi\hbar}\int F\left(p, \frac{x'+x''}{2}, \frac{x'-x''}{2}\right)\exp\left(\frac{i\alpha}{\hbar}p\,(x'-x'')\right)dp$$

ein, so nimmt Gl. (21) folgende vertraute Gestalt an:

(24) $$\bar{F} = \int \mathrm{Spur}\,(\underline{P}(\alpha, t)\,\underline{F}(\alpha))\,d\alpha$$

Man überzeugt sich leicht, daß Gl. (23) umkehrbar ist. Multiplikation mit $\frac{1}{|\alpha|}$ $\exp(-ik\alpha)$ und Integration über α führt zu der Gleichung

(25)
$$F(p, q, Q) = 2Q\int <q+Q|\underline{F}(\alpha)|q-Q> \exp\left(-\frac{2i\alpha pQ}{\hbar}\right)\frac{d\alpha}{|\alpha|}.$$

Wenn die Verteilungsfunktion $g(p, q, Q, t)$ in Q gerade ist, so sind die Matrizen $\underline{P}(\alpha, t)$ wie die statistischen Matrizen der Quantenmechanik hermitesch. Zunächst folgt aus (8), da g reell sein muß:

(26) $$G(-\alpha, q, Q, t) = G(\alpha, q, Q, t)^*$$

und nach Gl. (11) entsprechend:

(27) $$P(-\alpha, x', x'', t) = P(\alpha, x', x'', t)^*.$$

Die Funktion g ist in Q gerade, wenn

$$\int G(\alpha, q, -Q, t)\exp\left(\frac{2i\alpha Qp}{\hbar}\right)d\alpha = \int G(\alpha, q, +Q, t)\exp\left(-\frac{2i\alpha Qp}{\hbar}\right)d\alpha$$

ist. Ersetzen wir hierin auf der linken Seite $\alpha \to -\alpha$ und G gemäß Gl. (11) durch P und berücksichtigen wir Gl. (27), so folgt, wenn wir die Bezeichnung aus Gl. (10) verwenden:

$$\int \{P(\alpha, x'', x', t)^* - P(\alpha, x', x'', t)\}\exp\left(-\frac{i\alpha p}{\hbar}(x'-x'')\right)d\alpha = 0$$

und nach dem Fourierschen Integraltheorem die Hermitezität:

(28) $$P(\alpha, x'', x', t)^* = P(\alpha, x', x'', t).$$

Die Beschränkung auf Verteilungsfunktionen, die in Q gerade sind, ist physikalisch sinnvoll. Nach Gl. (7) bleibt die Parität in Q im Laufe der Zeit erhalten, so daß man gerade und ungerade Funktionen gesondert betrachten kann. Interessiert man sich speziell nur für die Verteilungsfunktionen in den Makrovariablen wie in Ziff. 3:

$$f(p, q, t) = \int g(p, q, Q, t)\, dQ\,, \tag{29}$$

so heben sich die ungeraden Anteile von g heraus; sie sind ohne Einfluß auf f.

Aber auch wenn man nicht über die Mikrovariablen integriert, scheiden rein antimetrische Funktionen wegen der negativen Funktionswerte aus und unsymmetrische, weil in den Nullstellen der geraden Anteile die ungeraden im allgemeinen nicht verschwinden werden, so daß auch in diesem Falle im allgemeinen mit negativen Funktionswerten zu rechnen ist.

Hermitezität und Spurbedingung gelten also ähnlich wie in der Quantenmechanik. Ein Analogon der Bedingung, daß die statische Matrix in der Quantenmechanik positiv definit ist, existiert hier noch nicht.

3. Ableitung der statistischen Bewegungsgleichung der Quantenmechanik

In Ziff. 2 hat sich herausgestellt, daß die Liouvillesche Gleichung für ein linienhaft ausgedehntes Elektron eng mit der Schrödingergleichung für ein punktförmiges Elektron zusammenhängt. Doch können wir sie nicht als statistische Bewegungsgleichung der Quantenmechanik ansprechen. Erstens enthalten quantenmechanische Gleichungen nicht den Elektronenradius Q. Zweitens kann der Parameter α beliebige Werte annehmen, so daß die Plancksche Konstante noch nicht fixiert ist.

Darum ist die Quantenmechanik auch von dem vorliegenden Modell aus nicht ohne Hypothesen erreichbar, und zwar sind zwei Hypothesen notwendig, von denen die eine so einschneidend ist wie je. So wenig wie in I und II geht es uns hier darum, die klassische Mechanik zu retten. In jenen Arbeiten und in einigen vorangegangenen haben wir durch mathematische Abbildung quantenmechanischer Systeme auf Punktgesamtheiten im Phasenraum gezeigt, daß es bei aller Verschiedenheit zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik nicht notwendig ist, den Partikelaspekt aufzugeben. Hier stellen wir fest, was zunächst viel weniger tiefgreifend, aber überraschend ist, daß es klassisch mechanische Modelle gibt, deren Korrespondenz zur Quantenmechanik viel enger ist als die des Punktelektrons.

Formal gelangt man zur Schrödingergleichung mit $\alpha = 1$, wenn man beachtet, daß mit $\underline{P}(\alpha, t)$ auch $C(\alpha) \cdot \underline{P}(\alpha, t)$ bei beliebiger Zahlenfunktion $C(\alpha)$ eine Lösung von Gl. (12) ist. Setzen wir

$$\int P(\alpha, x, x, t)\, dx = N(\alpha, t),$$

so folgt aus Gl. (13) für $\underline{P}$ ohne und mit Faktor C:

$$\int N(\alpha, t)\, d\alpha = 1, \qquad \int N(\alpha, t)\, C(\alpha)\, d\alpha = 1,$$

und Gl. (27) liefert

$$C(-\alpha) = C(\alpha)^*.$$

Beide Bedingungen befriedigt der spezielle Ansatz:

$$C(\alpha, t) = \frac{1}{2N(1, t)}\, \delta(\alpha - 1) + \frac{1}{2N(-1, t)}\, \delta(\alpha + 1).$$

Er führt nach Gl. (11) und (8) zu der Verteilungsfunktion

$$(30) \quad g(p, q, Q, t = \frac{1}{2\pi\hbar}\Big[P(q+Q, q-Q)\exp\left(-\frac{2iQp}{\hbar}\right) + P(q-Q, q+Q)\exp\left(+\frac{2iQp}{\hbar}\right)\Big].$$

wenn wir für $P(1, x', x'', t)$ kurz $N(1, t)\, P(x', x'', t)$ schreiben und für $P(-1, x', x'', t)$ nach den Gl. (27) und (28) $N(-1, t)$ $P(x'', x', t)$. Die nur von den Makrovariabeln abhängige Verteilungsfunktion (29) lautet hier

$$(31) \quad f(p, q, t) = \frac{1}{\pi\hbar}\int P(q+Q, q-Q)\exp\left(\frac{-2iQp}{\hbar}\right) dQ.$$

Sie genügt, wie man leicht nachrechnet, der Wignerschen Gleichung[1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{i\hbar}\left(V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right) f. \tag{32}$$

Bekanntlich können die Funktionen (31) negative Werte annehmen. Das trifft erst recht für die Funktionen (30) zu, so daß sich oben angegebene Spezialisierung die der Funktion $C(\alpha)$ verbietet, wenn man mehr sucht als nur eine formale Analogie.

Erst wenn man die Liouvillesche Gleichung (7) durch eine neue statische Bewegungsgleichung ersetzt, kann man die obige Spezialisierung auf die Werte $\alpha = \pm 1$ durchführen. Die vorzunehmende Abänderung ist auf den ersten Blick sehr anschaulich. Will man die in der Liouvilleschen Gleichung vorkommende Verteilungsfunktion wirklich beobachten, so setzt das eine Meßgenauigkeit voraus, die die Anwendung statistischer Methoden eigentlich entbehrlich macht. Denn die Feststellung von Wahrscheinlichkeiten in beliebig kleinen Phasenvolumen erfordert, daß wir von jedem System der Gesamtheit wissen, in welchem Phasenpunkt es sich befindet. Was wir im besten Falle beobachten können, sind nicht lokale Wahrscheinlichkeiten, sondern mittlere für endliche Umgebungen eines jeden Phasenpunktes.

Wir berechnen diese Mittelwerte unter Annahme des Gauss'schen Fehlergesetzes. Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^3}\, abc} \exp\left(-\left(\frac{p-p'}{a}\right)^2 - \left(\frac{q-q'}{b}\right)^2 - \left(\frac{Q-Q'}{c}\right)^2\right) dp\, dq\, dQ \tag{33}$$

die Wahrscheinlichkeit, die Werte p, q, Q mit der Genauigkeit $dp\, dq\, dQ$ zu beobachten, wenn die wirklichen Werte p', q', Q' sind. Dann lautet die aus der Liouvilleschen Funktion hervorgehende Grobverteilung:

$$\bar{g}(p, q, Q, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}\, abc} \int \exp(\quad)\, g(p', q', Q', t)\, dp'\, dq'\, dQ'. \tag{34}$$

Dem vorliegenden Problem ist es angemessen, daß wir die Unschärfe c für die Q-Bestimmung unendlich werden lassen. Wir nehmen also an, daß die Mikrovariabeln nicht beobachtbar

[1] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932), Gl. (8).

sind oder jedenfalls nicht beobachtet werden. Für die Unschärfen a und b von Impuls und Ort lassen wir zu, daß sie noch von α abhängen, daß also die verschiedenen Summanden in Integral (8) mit verschiedener Genauigkeit beobachtet werden, so daß die Funktion für die Grobverteilung folgende Gestalt annimmt:

$$(35)\quad \bar{f}(p, q, t) = \frac{1}{\pi^2 \hbar} \int \frac{d\alpha \cdot |\alpha|}{a b} \int P(\alpha, q' + Q, q' - Q, t)$$
$$\exp\left(-\frac{2 i \alpha Q p'}{\hbar} - \left(\frac{p-p'}{a}\right)^2 - \left(\frac{q-q'}{b}\right)^2\right) dp'\, dq'\, dQ.$$

Die Integration über p' läßt sich ausführen. Setzen wir im übrigen analog zu Gl. (10) $x' = q' + Q$ und $x'' = q' - Q$, so folgt:

$$(36)\qquad \bar{f}(p, q, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}\,\hbar} \int \frac{d\alpha \cdot |\alpha|}{b} \int P(\alpha, x', x'', t)$$
$$\exp\left[-\frac{a^2 \alpha^2}{4\hbar^2}(x' - x'')^2 - \frac{1}{4 b^2}(2q - x' - x'')^2 - \frac{i \alpha p}{\hbar}(x' - x'')\right] dx'\, dx''.$$

Dieses Integral ist für positiv definite $P(\alpha, x', x'', t)$ stets positiv sobald

$$(37)\qquad a b \geq \frac{\hbar}{\alpha}$$

ist, weil auch die Matrix mit den Elementen

$$< x' | \quad | x'' > =$$
$$= \exp\left[-\frac{a^2 \alpha^2}{4 \hbar^2}(x' - x'')^2 - \frac{1}{4 b^2}(\alpha q - x' - x'')^2 - \frac{i \alpha p}{\hbar}(x' - x'')\right]$$

positiv definit ist. Das Gleichheitszeichen liefert die kleinste Unschärfe, die zu positiven Wahrscheinlichkeiten führt. Setzen wir

$$(38)\qquad b = l,\ a = \frac{\hbar}{\alpha l},$$

und führen wir zur Abkürzung die Funktionen

$$(39)\quad u(\alpha, p, q, x) = \frac{1}{\sqrt{l \sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{1}{2 l^2}(q - x)^2 + \frac{i \alpha p}{\hbar} x\right]$$

ein, so folgt aus Gl. (36)

$$(40)\quad \bar{f}(p, q, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int da \cdot$$
$$\cdot\, |\alpha| \int u\,(\alpha, p, q, x')^*\, P(\alpha, x', x'', t)\, u\,(\alpha, p, q, x'')\, dx'\, dx''.$$

Hierin ist jeder einzelne Summand des Integrals positiv, so daß wir uns nunmehr auf spezielle Lösungen beschränken dürfen, in denen nur noch die Werte $a = \pm 1$ vorkommen. In diesem Fall erhalten wir, — $u(1, p, q, x) = u(p, q, x)$ gesetzt, — in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in I und II

(41)
$$\bar{f}(p, q, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int u\,(p, q, x')^*\, P(x', x'', t)\, u\,(p, q, x'')\, dx'\, dx''.$$

Diese Funktion genügt, wie früher gezeigt, der statischen Bewegungsgleichung

$$(42)\quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{p}{M} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} + \frac{\hbar^2}{M l^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial p\, \partial q} =$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \left[V\left(q + \frac{l^2}{4} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{l^2}{4} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right)\right] \bar{f}.$$

Zwei nicht im Modell begründete Voraussetzungen gehen in die Ableitung von Gl. (42) ein:

1. Die Liouvillesche Feinverteilung ist durch die in Gl. (36) definierte Grobverteilung zu ersetzen.
2. Unter allen Lösungen von Gl. (12) sind nur diejenigen physikalisch zulässig, für die das Wirkungsquantum den Planckschen Wert hat.

Die zuletzt stillschweigend eingeführte Beschränkung auf positiv definite Matrizen, folgt bereits aus obigen Annahmen, wie in I gezeigt. Denn die Lösungen von Gl. (42) zerfallen in zwei Klassen, zwischen denen es keine Übergänge gibt. Von den beiden kann nur diejenige realisiert werden, zu der der Grenzfall völliger Unkenntnis über die Lage des Systems im Phasenraum gehört, d. i. gerade der Fall positiv definiter Matrizen.

Von den beiden obigen Voraussetzungen ist die erste ziemlich plausibel, und die zweite ist unproblematisch, obwohl es unverständlich bleibt, warum gerade die durch die Plancksche Konstante gekennzeichneten Lösungen auszuwählen sind. Die eigentliche Schwierigkeit, die uns veranlaßt, nur von einer Korrespondenz und nicht von einer Ableitung zu sprechen, ist darin zu sehen, daß zu positiven Grobverteilungen u. U. nichtpositive Feinverteilungen gehören.

Unberührt von dieser Schwierigkeit bleibt die überraschende Verwandtschaft zwischen der Quantenmechanik und dem eingangs geschilderten Modell. Man kann es auch dreidimensional formulieren. Dabei behält das Elektron seine Linienhaftigkeit. Angesichts dieser unerwarteten und unplausibel erscheinenden Struktur sei betont, daß das Modell keineswegs willkürlicher Spekulation entspringt, sondern durch den Ausdruck $V(x') - V(x'')$ in der v. Neumannschen Gleichung (12) vorgezeichnet ist.

Die Verwandtschaft zwischen Quantenmechanik und Modelltheorie und die Zwangsläufigkeit, mit der das Modell bestimmt ist, mögen diese Untersuchung rechtfertigen.