BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen über Unterteilungsintegrale und lineare Funktionale

von

Otto Haupt und **Christian Y. Pauc**
in Erlangen in Nantes

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 2. Dezember 1955

Einleitung

1. Im Rahmen einer Darstellung der Integralrechnung haben wir ([3], 8. Abschn.) eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals angegeben. Ausgangspunkt dieser Verallgemeinerung ist ein bikompakter Raum R und ein an die Topologie von R „(eng) adaptierter" (vgl. unten) Inhalt $j \mid \mathfrak{q}$ als Verallgemeinerung des Jordaninhaltes der klassischen Theorie im euklidischen n-dimensionalen Raum. Und zwar wird $j \mid \mathfrak{q}$ erklärt unter Bezugnahme auf ein vorgegebenes, in R vollständiges, endliches Maß $m \mid \mathfrak{z}$, welches als Verallgemeinerung des klassischen Lebesgueschen Maßes oder einer Erweiterung von diesem gelten kann. Dabei ist $m \mid \mathfrak{z}$ als an R „(eng) adaptiert" vorausgesetzt, d. h. es soll folgendes gelten: Erstens enthält der Boolesche σ-Verband (Hausdorffsche σ-Körper) $\mathfrak{z}$ alle offenen Mengen von R (und folglich alle Borelschen), insbesondere also R selbst; zweitens ist jede Menge aus $\mathfrak{z}$ von oben her dem Maße m nach beliebig genau durch offene Mengen approximierbar; drittens enthält $\mathfrak{z}$ eine Basis von R, gebildet aus offenen Mengen, deren Begrenzungen m-Nullmengen sind. Es ist dann $j \mid \mathfrak{q}$ erklärt als diejenige Verengerung von $m \mid \mathfrak{z}$, deren Definitionsbereich $\mathfrak{q}$ alle und nur solche Mengen aus $\mathfrak{z}$ umfaßt, deren Begrenzungen m-Nullmengen sind. Das zu $j \mid \mathfrak{q}$ gehörige bestimmte (oder Unterteilungs-)Integral besitzt dann im wesentlichen alle Eigenschaften des klassischen Riemannintegrals.

2. Es erhebt sich die Frage, ob nicht umgekehrt, unabhängig von einem a priori gegebenen, an R (eng) adaptierten Maß $m|\mathfrak{z}$, ein σ-additiver, endlicher, mit der Topologie in R geeignet verknüpfter Inhalt $j|\mathfrak{q}$ definiert werden kann derart, daß $j|\mathfrak{q}$ sich zu einem an R (eng) adaptierten Maß $j''|\mathfrak{z}''$ erweitern läßt. Diese Frage ist in einer früheren Note [4] behandelt, und zwar – etwas weitergehend als in [3] – für den Fall eines *lokal* bikompakten Raumes R; dabei zeigt sich, daß $j''|\mathfrak{z}''$ im allgemeinen nicht mit der in R *kleinsten* Erweiterung von $j|\mathfrak{q}$ zu einem vollständigen Maß $j'_v|\mathfrak{z}'_v$ identisch ist, sondern daß es vielmehr der Adjunktion neuer Nullmengen (zu $\mathfrak{z}'_v$) bedarf, um von $j'_v|\mathfrak{z}'_v$ zu dem über $j|\mathfrak{q}$ kleinsten, an R (eng) adaptierten Maß $j''|\mathfrak{z}''$ zu gelangen.

3. In der vorliegenden Note (und in später daran anschließenden) soll unter anderem die soeben erwähnte Untersuchung [3] weitergeführt werden. Und zwar werden wir in der gegenwärtigen Note *von jeglicher Topologie absehen*, d. h. wir geben $j|\mathfrak{q}$ als endlichen (und soweit nötig σ-additiven) Inhalt vor, wobei $\mathfrak{q}$ ein Boolescher Verband von Teilmengen einer festen Grundmenge G (m. a. W. ein Hausdorffscher Körper) ist und wobei $\mathfrak{q}$ *keine Einheit* (größte Menge) zu besitzen braucht. Sodann wird *das* (bestimmte) *j-Integral* (j-Unterteilungsintegral), das also dem Inhalt $j|\mathfrak{q}$ entspricht und über G erstreckt ist, *als lineares Funktional* $J|\mathfrak{l}$ betrachtet; dabei ist $\mathfrak{l}$ ein Vektorverband reeller, beschränkter Funktionen, deren jede je außerhalb einer zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Menge Null ist. Es läßt sich nun $J|\mathfrak{l}$ auf zweierlei Weise erweitern: *Erstens* indem man zur kleinsten Erweiterung von $j|\mathfrak{q}$ in G zu einem Maß $j'|\mathfrak{z}'$ bzw. zu einem vollständigen Maß $j'_v|\mathfrak{z}'_v$ übergeht und das j'- bzw. j'_v-Integral $J'|\mathfrak{l}'$ bzw. $J'_v|\mathfrak{l}'_v$ als lineares Funktional, und zwar als Erweiterung des linearen Funktionals $J|\mathfrak{l}$ auffaßt; *zweitens* indem man von $J|\mathfrak{l}$ zu seiner ersten Erweiterung $S|\mathfrak{s}$ im Sinne der Theorie der linearen (stetigen) Funktionale übergeht (vgl. z. B. [3], Nr. 6. 1. 6., Seite 138). Es wird dann *gezeigt:* Es ist $S|\mathfrak{s}$ die größte Verengerung des j'_v-Integrals – letzteres aufgefaßt als lineares Funktional – zu einem *endlichen* linearen Funktional; ferner ist $S|\mathfrak{s}$ darstellbar als j_0-Integral, wobei $j_0|\mathfrak{f}$ die größte Verengerung von $j'_v|\mathfrak{z}'_v$ zu einem *endlichen* Inhalt bedeutet.

Dieses Ergebnis ist zu erwarten. Denn die Erweiterung (a) des endlichen Inhaltes $j\,|\,\mathfrak{q}$ zum größten, in $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$ enthaltenen endlichen Inhalt $j_0\,|\,\mathfrak{k}$ ist parallel zur (b) Erweiterung von $J\,|\,\mathfrak{l}$ zu $S\,|\,\mathfrak{s}$; genauer: Beide Erweiterungen lassen sich deuten als Bildung der vollständigen (perfekten) Hülle des (quasi-)metrisierten Grundverbandes $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{l}$; die Quasimetrik (vgl. z. B. [3], Nr. 6.1.5.) ist dabei in $\mathfrak{q}$ bzw. in $\mathfrak{l}$ bestimmt durch $j(Q' \dotplus Q'') = j((Q' - Q' \cap Q'') \cup (Q'' - Q' \cap Q''))$ bzw. durch $\int |f' - f''|\, dj$. Anders ausgedrückt: Im Falle (a) bzw. (b) handelt es sich um die Vervollständigung des (Booleschen) Verbandes der charakteristischen Funktionen der Mengen aus $\mathfrak{q}$ bzw. des Vektorverbandes $\mathfrak{l}$, beide Male mit der gleichen Quasimetrik.

Andererseits kann folgendes bemerkt werden: Statt der „metrischen" Erweiterung kann man zunächst eine „algebraische" vornehmen, indem man zum kleinsten σ, δ-System (Borelschen System) über dem Grundverband aufsteigt und daran die Vervollständigung durch Einschließung anfügt. (Vgl.: Für $\mathfrak{q}$ in [3], Nr. 3.1. und 3.2.1.; für $\mathfrak{l}$ die Überlegungen weiter unten Nr. 2.2., Bew., Ziff. (II″ 3)). Allerdings erhält man schon bei der algebraischen Erweiterung auch *unendliche* Werte des erweiterten Inhaltes bzw. Integrals, während die metrischen Prozesse ihrer Natur nach *endliche* Erweiterungen liefern. Die größte Verengerung der (durch Einschließung vervollständigten) algebraischen Erweiterung auf endlichen Inhalt bzw. endliches Integral liefert das gleiche Ergebnis wie die metrische Erweiterung (Zum Vergleich zwischen „algebraischer" und „metrischer" Erweiterung siehe [8].)

4. Die entsprechende Klarstellung der Beziehung zwischen dem j''-Integral (aufgefaßt als lineares Funktional) und der zweiten Erweiterung $S'\,|\,\mathfrak{s}'$ von $J\,|\,\mathfrak{l}$ (vgl. [3], Nr. 6.2.1.) soll später besprochen werden. Ferner sind Ausführungen über Produktbildung bei adaptierten Massen und Inhalten vorgesehen. Außerdem sollen Bemerkungen über den Fall folgen, daß die Grundmenge G ein topologischer (lokal bikompakter) Raum ist.

5. Hinsichtlich der Ausführungen in gegenwärtiger Note sei noch folgendes bemerkt: Der § 1 bringt vor allem eine Zusammenstellung von Hilfsmitteln, ferner unter anderem die Dar-

stellung des oberen bzw. unteren j-Integrals einer reellen beschränkten, außerhalb einer Menge aus $\mathfrak{q}$ verschwindenden, im übrigen beliebigen (Punkt-)Funktion f als (gewöhnliches Riemannsches) Integral des äußeren bzw. inneren Inhaltes der Spektralscharmengen $[f \geq \alpha]$ von f; dabei ist $j \mid \mathfrak{q}$ nicht als σ-additiv vorauszusetzen. – Der § 2 enthält dann den Beweis der oben (in Ziff. 3) genannten Ergebnisse.

§ 1. Das zu einem Inhalt gehörige obere und untere Unterteilungsintegral

1.1. Es sei G eine Menge, die Grundmenge, und $\mathfrak{r}$ der Boolesche Verband[1] aller Teilmengen von G einschließlich der *leeren Menge* $\emptyset$. Weiter sei $\mathfrak{q}$ ein Boolescher Unterverband $\mathfrak{r}$, wobei $\mathfrak{q}$ ohne Einheit[2] (oder mit Einheit) angenommen werden kann.

Eine Menge $M \in \mathfrak{r}$ heiße $\mathfrak{q}$-beschränkt, wenn ein $Q \in \mathfrak{q}$ existiert mit $M \subset Q$. Das System $\mathfrak{k}$ dieser $\mathfrak{q}$-beschränkten Mengen ist ein Ideal in $\mathfrak{r}$.

1.1.1. Die im gegenwärtigen § 1 betrachteten Funktionen sollen sämtlich die Grundmenge G als Definitionsbereich besitzen sowie reell und *beschränkt* sein; außerdem sei für eine solche Funktion f die *Menge der Nicht-Nullstellen* $\mathfrak{q}$-*beschränkt*, also[3]

---

[1] Ein System $\mathfrak{p}$ von Mengen (aus $\mathfrak{r}$, wobei auch $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}$ zugelassen ist) heißt *Boolescher Verband*, wenn die Vereinigung und der Durchschnitt je endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{p}$ wieder zu $\mathfrak{p}$ gehört, ebenso das Komplement einer Menge aus $\mathfrak{p}$ bezüglich einer anderen. – Eine Gesamtheit von Elementen heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder aus endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen Elementen besteht. – Enthält ein Teilsystem $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{r}$ die Vereinigung bzw. den Durchschnitt je abzählbar vieler Mengen aus $\mathfrak{m}$, so heißt $\mathfrak{m}$ ein σ- bzw. δ-*System*, in Zeichen $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\delta$. – Ist $\mathfrak{p}$ ein Boolescher Verband mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\sigma$, so ist auch $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\delta$ und $\mathfrak{p}$ heißt *Boolescher σ-Verband*. – Ein Boolescher Verband $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{r}$ heißt *Ideal in* $\mathfrak{r}$, wenn mit $A \in \mathfrak{i}$ und $B \in \mathfrak{r}$ auch $A \cap B \in \mathfrak{i}$. Ist $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_\sigma$, so spricht man von einem σ-*Ideal* in $\mathfrak{r}$. – Die leere Menge wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

[2] Besitzt ein Boolescher Verband $\mathfrak{p}$ (in $\mathfrak{r}$) eine größte Menge, so heißt diese eine *Einheit* von $\mathfrak{p}$.

[3] Mit $[f \geq \alpha]$, $[f > \alpha]$ usw. wird die Menge aller $x \in G$ bezeichnet, für die $f(x) \geq \alpha$ bzw. $f(x) > \alpha$ usw.

$[f \neq 0] \in \mathfrak{k}$ oder, was das gleiche, $[f = 0] \supset G - K$ für ein von f abhängiges $K = K(f) \in \mathfrak{q}$. Jedes solche, *nicht leere*, $K(f)$ heiße ein Kernbereich von f. Das System der $K(f)$ ist eine Filter in $\mathfrak{q}$; insbesondere ist *mit* $K \in \mathfrak{q}$ auch *jedes* $K' \in \mathfrak{q}$ *mit* $K \subset K'$ ein *Kernbereich* von f. Daraus folgt: Das *System aller reellen*, beschränkten *Funktionen* f mit $[f \neq 0] \in \mathfrak{k}$ ist ein *Vektorverband*[4] $\mathfrak{v}$; übrigens ist $\mathfrak{v}$ auch eine Vektoralgebra.[5]

1.1.2. Unter einer $\mathfrak{q}$-Einteilung $T = T(Q)$ von $Q \in \mathfrak{q}$ *mit* $Q \neq \emptyset$ verstehen wir jede Darstellung von Q als Vereinigung endlich vieler, paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{q}$, also etwa $T = (Q_1, \ldots, Q_n)$ mit $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, wobei $Q_\nu \in \mathfrak{q}$ und $Q_\nu \cap Q_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$; $\nu, \mu = 1, \ldots, n$. Die $\mathfrak{q}$-Einteilung $T' = (Q_1', \ldots, Q_k')$ von Q heißt *Verfeinerung* (oder Unterteilung) von T, und T' heißt feiner als T, wenn jedes $Q_\varkappa'$ Teilmenge eines der $Q_1, \ldots, Q_n$ ist $\varkappa = 1, \ldots, k$. Mit der Relation „feiner als" ist das *System* $\mathfrak{t}(Q)$ *der* $\mathfrak{q}$-*Einteilungen* $T(Q)$ *von* Q *gerichtet*[6] (dabei ist Q als *fest* anzusehen).

Als eine zu einem $T = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathfrak{t}(Q)$ gehörige Treppenfunktion bezeichnen wir jedes $g \in \mathfrak{v}$ mit $Q \in \mathfrak{q}$ als Kernbereich von g und mit $g(x) = \gamma_\nu =$ konst. für $x \in Q_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$.

1.1.3. Ist $f \in \mathfrak{v}$ und $M \in \mathfrak{r}$, so setzen wir $\bar{f}(M) = \sup(f(x); x \in M)$ und $\underline{f}(M) = \inf(f(x); x \in M)$. Ist $K = K(f)$ ein Kernbereich von f und $T = T(K) = (K_1, \ldots, K_k) \in \mathfrak{t}(K)$, also $\mathfrak{q}$-Einteilung von K, so seien als die zu T und f gehörigen Treppenfunktionen, genauer als die zu T und f gehörige obere bzw. untere Treppenfunktion $\bar{f}_T$ bzw. $\underline{f}_T$ bezeichnet, die zu T gehörige Treppenfunktion mit $\bar{f}_T(x) = \bar{f}(K_\varkappa)$ bzw. $= \underline{f}(K_\varkappa)$ für $x \in K_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, und $\bar{f}_T(x) = \underline{f}_T(x) = 0$ für $x \in G - K$.

---

[4] D. h. mit $f, g \in \mathfrak{v}$ ist auch $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{v}$ (α, β reelle Zahlen), ferner $f \cup g = \operatorname{Max}(f, g)$ und $f \cap g = \operatorname{Min}(f, g) \in \mathfrak{v}$. (Dabei ist $(f \cup g)(x) = \operatorname{Max}(f(x), g(x))$ usw. (Vgl. [3], Nr. 1.8.)

[5] d. h. mit $f, g \in \mathfrak{v}$ ist auch $f.g \in \mathfrak{v}$ (wobei $(f.g)(x) = f(x).g(x)$).

[6] d. h. zu irgend zwei $\mathfrak{q}$-Einteilungen $T', T'' \in \mathfrak{t}(Q)$ existiert eine $\mathfrak{q}$-Einteilung $T \in \mathfrak{t}(Q)$, die feiner ist sowohl als T' wie als T'' (Betr. gerichtete Systeme vgl. z. B. [3], Nr. 1.9.1., 1.9.6. und 4.2.1.)

1.2.1. Es sei nun $j \mid \mathfrak{q}$ ein endlicher Inhalt[7] und $g \in \mathfrak{v}$ eine zur Einteilung $T = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathfrak{t}(K)$ gehörige Treppenfunktion mit K als Kernbereich und mit den Werten $g(x) = \gamma_\nu$ für $x \in Q_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Wir setzen

$$J(g; K) = \int_K g\,dj = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu\, j(Q_\nu).$$

Wie üblich bezeichnen wir $J(g; K)$ als das j-Integral der (zu T gehörigen) Treppenfunktion g über K.

1.2.2. Es sei jetzt $f \in \mathfrak{v}$ beliebig mit K als einem Kernbereich. Die Mengenfunktion $F(Q) = \bar{f}(Q) j(Q)$ über $\mathfrak{q}$, d. h. mit $Q \in \mathfrak{q}$, ist oberadditiv, d. h. $F(Q') + F(Q'') \leq F(Q' \cup Q'')$ für Q', $Q'' \in \mathfrak{q}$, wenn $Q' \cap Q'' = \emptyset$; dies folgt aus der Definition von $\bar{f}$ und aus der Additivität von $j \mid \mathfrak{q}$. Daher nimmt $J(\bar{f}_T; K)$ bei Verfeinerung von $T \in \mathfrak{t}(K)$ nicht zu, wenn f und K festgehalten werden. Somit existiert das j-Oberintegral $\bar{J}(f; K) = \bar{\int}_K f\,dj$ *von f über K*, nämlich $\bar{J}(f; K) = \inf\,(J(\bar{f}_T; K);\; T \in \mathfrak{t}(K)) = \lim\limits_{T \in \mathfrak{t}(K)} J(\bar{f}_T; K) = \inf\,(J(t; K);\, f \leq t)$, wobei T alle $\mathfrak{q}$-Einteilungen von K durchläuft und t alle zu T gehörigen Treppenfunktionen, für die $f \leq t$ ist (d. h. $f(x) \leq t(x)$ für alle $x \in G$). Entsprechend existiert das j-Unterintegral $\underline{J}(f; K)$ *von f über K*, erklärt als $\underline{J}(f; K) = \underline{\int}_K f\,dj = \sup\,(J(\underline{f}_T; K);\; T \in \mathfrak{t}(K)) = \sup\,(J(t; K);\; t \leq f)$; es ist nämlich $H(Q) = \underline{f}(Q) j(Q)$ unteradditiv.

1.2.3. Wichtig für das Folgende ist der

Hilfssatz. *Bei festem $f \in \mathfrak{v}$ ist der Wert $\bar{J}(f; K)$ des j-Oberintegrals von f der gleiche für alle Kernbereiche $K = K(f)$ von f. Das nämliche gilt für das j-Unterintegral.*

Bew. (1) Es genügt zu zeigen, daß für je zwei Kernbereiche K, K' von f mit $K \subset K'$ gilt: $\bar{J}(f; K) = \bar{J}(f; K')$. Ist nämlich

---

[7] Ist $\mathfrak{p}$ Boolescher Verband und $i \mid \mathfrak{p}$ eine reelle, nicht-negative Funktion, so heißt $i \mid \mathfrak{p}$ ein *Inhalt*, wenn $i \mid \mathfrak{p}$ *additiv* ist, d. h. wenn aus $A, B \in \mathfrak{p}$ mit $A \cap B = \emptyset$ folgt $i(A \cup B) = i(A) + i(B)$. Folgt aus $A_n \in \mathfrak{p}, A_n \cap A_k = \emptyset$ für $n \neq k$, und $A = \bigcup_n A_n \in \mathfrak{p}$, daß $i(A) = \sum_n i(A_n)$, so heißt der Inhalt *σ-additiv*. Ist der Definitionsbereich $\mathfrak{p}$ des σ-additiven Inhaltes $i \mid \mathfrak{p}$ ein Boolescher σ-Verband, so heißt $i \mid \mathfrak{p}$ ein *Maß*.

letzteres richtig und sind K', K'' beliebige Kernbereiche von f, so ist auch $K' = K \cup K''$ Kernbereich von f mit $K \subset K'$ und $K'' \subset K'$, so daß $\bar{J}(f; K) = \bar{J}(f; K') = \bar{J}(f; K'')$, wie im Hilfssatz behauptet. – (2) Ist nun $K \subset K'$, so liefert $K' = K \cup (K' - K)$ eine $\mathfrak{q}$-Einteilung $T'_0 \in \mathfrak{t}(K')$; ferner ist $\bar{J}(f; K')$ der Limes der $J(\bar{f}_{T'}; K')$ für das gerichtete System $\mathfrak{t}(K'; T')$ aller Verfeinerungen T' von T'_0, weil $\mathfrak{t}(K'; T'_0)$ ein Ende[8] von $\mathfrak{t}(K')$ ist. Ist $T' \in \mathfrak{t}(K'; T'_0)$ beliebig und *verengert* man T' auf K, d.h. streicht man aus T' alle Teile, die in $K' - K$ enthalten sind, so ergibt sich eine $\mathfrak{q}$-Einteilung $T(K; T')$ von K, also $T(K; T') \in \mathfrak{t}(K)$, die wir als die *Verengerung* von T' auf K bezeichnen. Umgekehrt ist jedes $T \in \mathfrak{t}(K)$ Verengerung von (mindestens) einem $T' \in \mathfrak{t}(K'; T'_0)$, das entsprechend mit $T'(K'; T)$ zu bezeichnen ist. Da $f(x) = 0$ für $x \in K' - K$, so gilt $J(\bar{f}_{T'}; K') = J(\bar{f}_{T(K; T')}; K)$ und $J(\bar{f}_T; K) = J(\bar{f}_{T(K'; T)}; K')$. Daraus folgt $\inf(J(\bar{f}_{T'}; K'); T' \in \mathfrak{t}(K'; T'_0)) = \bar{J}(f; K') \geq \bar{J}(f; K) = \inf(J(\bar{f}_T; K); T \in \mathfrak{t}(K))$ und $\inf(J(\bar{f}_T; K); T \in \mathfrak{t}(K)) \geq \inf(\bar{f}_{T'}; T' \in \mathfrak{t}(K'))$, also $\bar{J}(f; K') = \bar{J}(f; K)$. Entsprechend für $\underline{J}(f; K) = \underline{J}(f; K')$.

Zufolge der im Hilfssatz behaupteten Unabhängigkeit der Integrale $\bar{J}(f; K)$ und $\underline{J}(f; K)$ von K, sind wir berechtigt, die Angabe von K in den Bezeichnungen für diese Integrale wegzulassen; wir schreiben also auch kürzer $\underline{J}(f)$ bzw. $\bar{\int} f dj$ usw.

In bekannter Weise zeigt man jetzt:

Satz. (1) Für $f \in \mathfrak{v}$ ist $-\infty < \underline{\int} f dj \leq \bar{\int} f dj < +\infty$.

(2) Ist $g \in \mathfrak{v}$ und α eine reelle (endliche) Zahl, so gilt:

$$\bar{\int} (\alpha g) dj = \alpha \bar{\int} g dj \text{ und } \underline{\int} (\alpha g) dj = \alpha \underline{\int} g dj \text{ falls } \alpha \geq 0,$$

$$\bar{\int} (\alpha g) dj = a \underline{\int} g dj \text{ und } \underline{\int} (\alpha g) dj = \alpha \bar{\int} g dj \text{ falls } \alpha \leq 0.$$

(3) Für $g, h \in \mathfrak{v}$ ist $\underline{\int} g dj + \underline{\int} h dj \leq \underline{\int} (g+h) dj \leq \bar{\int} (g+h) dj \leq \underline{\int} g dj + \underline{\int} h dj$.

(4) $\operatorname{Max}(|\underline{\int} g dj|; \ |\bar{\int} g dj|) \leq \bar{\int} |g| dj$.

---

[8] d. h. es existiert eine Einteilung, eben T'_0, deren sämtliche Verfeinerungen zu $\mathfrak{t}(K'; T'_0)$ gehören.

1.2.4. Es sei $M \in \mathfrak{k}$ (vgl. Nr. 1.1). Dann heißt $\bar{j}(M) = \inf(j(Q); Q \in \mathfrak{q}; M \subset Q)$ bzw. $\underline{j}(M) = \sup(j(Q); Q \in \mathfrak{q}; Q \subset M)$ der *äußere* bzw. *innere j-Inhalt* von M. Bezeichnet $c(M) = c(x; M)$ die charakteristische Funktion von M (also $c(x; M) = 1$ bzw. $= 0$ für $x \in M$ bzw. $x \in G - M$), so ist

$\bar{j}(M) = \bar{J}(c(M))$ und $\underline{j}(M) = \underline{J}(c(M))$, woraus $-\infty < \underline{j}(M) \leq \bar{j}(M) < +\infty$.

Es sei $M \in \mathfrak{k}$. *Damit* $M \in \mathfrak{q}$, *ist notwendig und – wenn* $j \mid \mathfrak{q}$ *vollständig*[9] *in* $\mathfrak{r}$ *ist – auch hinreichend, daß* $\underline{j}(M) = \bar{j}(M)$.

1.3. Mit $[f \geq \alpha]$ *bezeichne* man die Menge aller $x \in G$, für die $f(x) \geq \alpha$. Dann gilt der

Satz. Vor. *Es sei* $j \mid \mathfrak{q}$ *ein endlicher Inhalt. Ferner sei* $h \in \mathfrak{v}$ *und* K *ein Kernbereich von* h*; es sei*

$$\beta < \inf(h(x); x \in G) \leq \sup(h(x); x \in G) < \gamma.$$

Beh. *Es ist*

$$\bar{\int} h\,dj = \bar{J}(h) = \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \bar{j}([h \geq \alpha] \cap K)\,d\alpha$$

$$= \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \bar{j}([h > \alpha] \cap K)\,d\alpha,$$

$$\underline{\int} h\,dj = \underline{J}(h) = \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \underline{j}([h \geq \alpha] \cap K)\,d\alpha$$

$$= \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \underline{j}([h > \alpha] \cap K)\,d\alpha.$$

Für $[h \leq \alpha]$ (*und* $[h < \alpha]$) *gilt entsprechend:*

$$\bar{J}(h) = \gamma j(K) - \int_\beta^\gamma \bar{j}([h \leq \alpha] \cap K)\,d\alpha \textit{ usw.}$$

---

[9] Der Inhalt $j \mid \mathfrak{q}$ heißt *vollständig in* $\mathfrak{r}$, wenn $M \in \mathfrak{q}$, falls zu beliebigem $\varepsilon > 0$ solche Q', $Q'' \in \mathfrak{q}$ gehören, daß $Q' \subset M \subset Q''$ und $j(Q'' - Q') < \varepsilon$. (Vgl. auch [3], Nr. 2.4.)

Zusatz. *Es ist*

$$\begin{aligned} j(K) = \bar{j}([h \geq \alpha] \frown K) + \underline{j}([h < \alpha] \frown K) = \\ \underline{j}([h \geq \alpha] \frown K) + \bar{j}[h < \alpha] \frown K) = \\ \bar{j}([h > \alpha] \frown K) + \underline{j}([h \leq \alpha] \frown K). \end{aligned}$$

Ferner ist $\bar{j}([h \geq \alpha] \frown K) = \bar{j}([h > \alpha] \frown K)$ *und*

$$\underline{j}([h \leq \alpha] \frown K) = \underline{j}([h < \alpha] \frown K) \text{ usw.}$$

bis auf abzählbar viele α.

Übrigens ist $\bar{j}([h \geq a] \frown K) = \bar{\int} c([h \geq a] \frown K)\, dj$ *usw.*

Bew. Zur *Abkürzung* betrachten wir h nur in K, schreiben also $[h \geq \alpha]$ statt $[h \geq \alpha] \frown K$ usw. Ferner setzen wir

$$\bar{R}(h) = \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \bar{j}([h \geq \alpha])\, d\alpha.$$

Betr. Zusatz. Ist $[h \geq \alpha] \subset Q$ mit $Q \in \mathfrak{q}$, so $Q' = K - Q \subset K - [h \geq \alpha] = [h < \alpha]$; daraus folgt die erste Beh. des Zusatzes. – Es gilt $\bar{j}([h \geq \alpha + \varepsilon]) \leq \bar{j}([h > \alpha]) \leq \bar{j}([h \geq \alpha]) \leq \bar{j}([h \geq \alpha - \varepsilon])$ für $\varepsilon > 0$. In jedem Stetigkeitspunkt von $\bar{j}([h \geq \alpha])$ ist daher $\bar{j}([h \geq \alpha]) = \bar{j}([h > \alpha])$, also bis auf abzählbar viele α. Die beiden monotonen, beschränkten, also Riemann- (und folglich Lebesgue-) integrierbaren Funktionen $\bar{j}([h \geq \alpha])$ und $\bar{j}([h > \alpha])$ sind mithin fast überall gleich. Daraus folgt die Gleichheit der Lebesgueschen Integrale $\int_\beta^\gamma \bar{j}([h \geq \alpha])\, d\alpha = \int_\beta^\gamma \bar{j}([h > \alpha])\, d\alpha$, und diese stimmen mit den Riemannschen Integralen überein. Das nämliche gilt für $\underline{j}([h \geq \alpha])$ und $\underline{j}([h > \alpha])$, woraus auch die rechte Seite der zweiten Zeile der Beh. des Satzes betr. $\underline{\int} h\, dj$ folgt.

Betr. Beh. des Satzes. (I) Wir brauchen die Beh. nur für das Oberintegral zu beweisen. Denn wegen $\underline{J}(h) = -\bar{J}(-h)$ (Nr. 1.2.3., Satz) folgt $\underline{J}(h) = -(-\gamma) j(K) - \int_{-\gamma}^{-\beta} \bar{j}([-h \geq \alpha])\, d\alpha = \gamma j(K) + \int_\gamma^\beta \bar{j}([\alpha \geq h])\, d\alpha = \gamma j(K) - \int_\beta^\gamma \bar{j}([\alpha > h])\, d\alpha = \gamma j(K) - (\gamma - \beta)$

$j(K) + \int_\beta^\gamma \underline{j}([h \geq a])da = \beta j(K) + \int_\beta^\gamma \underline{j}([h \geq a])da$ (letzteres mit Hilfe des Zusatzes).

(**II**) Die Beh. *betr. das Oberintegral* ist *richtig*, wenn h eine, zu einer $\mathfrak{q}$-Einteilung T von $K \in \mathfrak{q}$ gehörige *Treppenfunktion* t (im Sinne von Nr. 1.1.2.) ist. Nämlich: Es sei $T = (Q_1, \ldots, Q_n)$ eine $\mathfrak{q}$-Einteilung von $K \in \mathfrak{q}$, ferner sei $\beta = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} \leq \gamma$ und $\delta_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ sowie $t = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu+1}\, c(Q_\nu)$; es ist t eine zu T gehörige Treppenfunktion. Setzen wir $Q'_\nu = [t \geq \alpha_{\nu+1}]$, $\nu = 1, \ldots, n$ und $R(t) = \beta j(K) + \int_\beta^\gamma j([t \geq \alpha])d\alpha$, so gilt (gemäß der Definition von t):

$$R(t) = \beta j(K) + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu j(Q'_\nu).$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist aber gleich $J(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu+1} j(Q_\nu)$. In der Tat: Es ist $Q'_\nu = Q_\nu \cup Q_{\nu+1} \cup \ldots \cup Q_n \in \mathfrak{q}$, $\nu = 1, \ldots, n$; also $Q'_1 = K$ und $Q'_n = Q_n$. Setzt man noch $Q'_{n+1} = \emptyset$, so gilt: $Q'_{\nu+1} \subset Q'_\nu$ und $Q_\nu = Q'_\nu - Q'_{\nu+1}$ sowie $Q_\nu \cap Q_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$; $\nu, \mu = 1, \ldots, n$, und $Q_1 \cup \ldots \cup Q_n = K$. Dann ist aber

$$\beta j(K) + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu j(Q'_\nu) =$$

$$\beta j(K) + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_{\nu+1}\Big(\sum_{\varrho=\nu}^{n} j(Q_\varrho)\Big) - \alpha_\nu \Big(\sum_{\varrho=\nu}^{n} j(Q_\varrho)\Big)\right) =$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu+1} j(Q_\nu) = J(t).$$

(**III**) Es ist $\bar{R}(h) \leq \bar{J}(h)$.

Bew. Es ist $h(x) \leq \bar{h}_T(x)$, also $[h \geq \alpha] \subset [\bar{h}_T \geq \alpha]$; mithin $\bar{R}(h) \leq R(\bar{h}_T)$. Da $\bar{h}$ eine zu T gehörige Treppenfunktion ist, gilt (Ziff. (II)) $R(\bar{h}_T) = J(\bar{h}_T)$. Weil aber T beliebig aus $\mathfrak{t}(K)$, folgt $\bar{R}(h) \leq \inf(J(\bar{h}_T);\ T \in \mathfrak{t}(K)) = \bar{J}(h)$.

(**IV**) Es ist auch $\bar{J}(h) \leq \bar{R}(h)$.

Bew. (1) Zu beliebigem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ existiert bekanntlich ein $n = n(\varepsilon)$ mit $\delta = (\gamma - \beta)n^{-1} < \varepsilon$ derart, daß

$$\text{(B 1)} \int\limits_{\beta}^{\gamma} \bar{j}([h \geq \alpha])\, d\alpha = \delta\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \bar{j}([h \geq \beta_\nu])\Big) + \vartheta\varepsilon, \text{ wobei}$$

$|\vartheta| \leq 1$ und $\beta_{\nu+1} = \beta_1 + \nu\delta$ mit $\beta_1 = \beta < \inf(h(x);\, x \in G)$, $\beta_{n+1} = \gamma > \sup(h(x);\, x \in G)$, also $\delta = \beta_{\nu+1} - \beta_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$.

(2) Zu diesen β_ν (Ziff. (1)) existieren $Q'_\nu \in \mathfrak{q}$ mit

(B 2) $[h \geq \beta_\nu] \subset Q'_\nu$ und $0 \leq j(Q'_\nu) - \bar{j}([h \geq \beta_\nu]) < n^{-1}\delta$, $\nu = 1, \ldots, n+1$.

Unbeschadet der Gültigkeit von (B 2) kann dabei und soll daher angenommen werden: $Q'_{\nu+1} \subset Q'_\nu$ (wegen $[h \geq \beta_{\nu+1}] \subset [h \geq \beta_\nu]$), ferner $Q'_{n+1} = \emptyset$ (wegen $[h \geq \beta_{n+1}] = \emptyset$), schließlich $Q'_1 = K$ (wegen $[h \geq \beta_1] = K$).

(3) Man setze $Q_\nu = Q'_\nu - Q'_{\nu+1}$, $\nu = 1, \ldots, n$; es ist $T = (Q_1, \ldots, Q_n)$ eine $\mathfrak{q}$-Einteilung von K. Man definiere die zu T (im Sinne von Nr. 1.1.2.) gehörige Treppenfunktion t durch $t(x) = \beta_{\nu+1}$ für $x \in Q_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Es gilt

(3a) $Q'_\nu = [t \geq \beta_{\nu+1}]$ und (3b) $\sup(h(x);\, x \in Q_\nu) < t(x)$ für $x \in Q_\nu$, letzteres, weil $h(x) < \beta_{\nu+1}$ für $x \in Q_\nu \subset G - Q'_{\nu+1} \subset G - [h \geq \beta_{\nu+1}]$.

(4) Gemäß (B 1) ist $\bar{R}(h) = \beta j(K) + \delta\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \bar{j}([h \geq \beta_\nu])\Big) + \vartheta\varepsilon$.

Gemäß (B 2) folgt $\bar{R}(h) > \beta j(K) + \delta\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} j(Q'_\nu)\Big) - \delta^2 + \vartheta\varepsilon$.

Wegen $0 < \delta < \varepsilon < 1$ und $|\vartheta| \leq 1$ ist $-\delta^2 + \vartheta\varepsilon = 2\zeta\varepsilon$ mit $|\zeta| < 1$, wegen (3a) also

$$\bar{R}(h) > \beta j(K) + \delta\Big(\sum_{\nu=1}^{n} j([t \geq \beta_{\nu+1}])\Big) + 2\zeta\varepsilon.$$

(5) Da t eine zu $T = (Q_1, \ldots, Q_n)$ gehörige Treppenfunktion mit den Werten $\beta_{\nu+1}$ in Q_ν, soweit $Q_\nu \neq \emptyset$; $\nu = 1, \ldots, n$, läßt sich die letzte Ungleichung in (4) gemäß Ziff. (II) so schreiben: $\bar{R}(h) > 2\zeta\varepsilon + J(t)$. Gemäß (3b) ist aber $\bar{h}_T \leq t$, also $J(\bar{h}_T) \leq J(t)$. Folglich $\bar{R}(h) > 2\zeta\varepsilon + J(\bar{h}_T) \geq 2\zeta\varepsilon + \bar{J}(h)$. Da ε mit $0 < \varepsilon < 1$ beliebig und $|\zeta| < 1$ ist, folgt $\bar{R}(h) \geq \bar{J}(h)$; w. z. b. w.

Corollar. *Unter den Voraussetzungen (und mit den Bezeichnungen) des vorstehenden Satzes gilt:*

(1) *die* Formel für partielle Integration

$$\int_{\beta}^{\gamma} \bar{j}([h > \alpha] \cap K)\, d\alpha + \int_{\beta}^{\gamma} \alpha\, d\bar{j}([h > \alpha] \cap K) = -\beta \bar{j}(K)$$

und entsprechend für den inneren Inhalt $\underline{j}$*;*

(2) *die aus* (1) *und dem vorstehenden Satz folgende* Darstellung *für das j-Oberintegral (und die entsprechende für das j-Unterintegral):*

$$\bar{\int} h\, dj = -\int_{\beta}^{\gamma} \alpha\, d\bar{j}([h > \alpha] \cap K).$$

Dabei ist in (1) das zweite Integral linkerhand (und in (2) das Integral rechterhand) aufzufassen als das (klassische) *Stieltjes-* (Riemann-)*Integral* $\int g\, df$ der stetigen Funktion $g(\alpha) = \alpha$ bezüglich der beschränkten, nicht-negativen und nicht-zunehmenden Funktion $f(\alpha) = \bar{j}([h > a] \cap K)$.

Bew. Man setze $f(\alpha) = \bar{j}([h > \alpha] \cap K)$; dann ist $f(\beta) = \bar{j}(K)$ und $f(\gamma) = 0$. Es ist $f(\alpha) \geq 0$ für $\beta < \alpha \leq \gamma$ erklärt, beschränkt und nicht-zunehmend mit zunehmendem a, ferner sind β und γ Stetigkeitspunkte von f. Falls noch $g(\alpha) = \alpha$, sind also alle Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formel der partiellen Integration erfüllt (vgl. z. B. [3], Nr. 10.2.7., Satz 1. und Zusatz); mithin gilt $\int_{\gamma}^{\beta} \alpha\, df(a) + \int_{\beta}^{\gamma} f(\alpha) d\alpha = f(\gamma)\gamma - f(\beta)\beta = -\beta \bar{j}(K)$. Daraus ergibt sich unmittelbar die 1. Beh. unseres Corollars und aus dieser, in Rücksicht auf den obigen Satz, auch die 2. (Das Stieltjesintegral bezüglich $f(\alpha)$ ist bekanntlich im wesentlichen das Integral bezüglich des, durch eine mit f gebildete Intervallfunktion bestimmten (endlichen) Inhaltes (vgl. [3], Nr. 10.2.7. und Nr. 8.5.2.)

Anmerkung. Der vorstehende Satz liefert eine mit der unsrigen gleichwertige Definition des oberen und unteren j-Integrals. Bei Ridder ([7], § 17, S. 97) wird das obere bzw. untere Integral, zunächst für nicht-negative, (beschränkte) Integranden f erklärt als der äußere bzw. innere (Produkt-) Inhalt der Ordinatenmenge von f und es wird gezeigt ([7], § 18, Lemma B., S. 99): Das obere Integral von f im Sinne von Ridder ist gleich $\lim_{\zeta\to 0}\left(\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu)\bar{j}([f\geq\alpha_{\nu+1}]\cap K)\right)$, wenn $\zeta=\mathrm{Max}$ $(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu, \nu=1,\ldots,n)$; $\alpha_1=0$; und entsprechend für das untere Integral im Sinne von Ridder. Ist f integrierbar (im Sinne von Ridder), ist also das obere gleich dem unteren Integral, so kann man unter dem Limeszeichen $\bar{j}$ ersetzen durch j, wenn die α_ν so gewählt sind, daß $[f\geq\alpha_{\nu+1}]\cap K\in\mathfrak{q}$. (Vgl. [7], § 18, Satz XXVII). – Außerdem beweist Ridder ([7], § 19, Satz XXIX) für den Fall integrierbarer Funktionen f die Gleichwertigkeit seines (als „geometrisch" bezeichneten) Integralbegriffes mit dem unsrigen (dem „Youngschen"). (Bezüglich des von Ridder zugrunde gelegten $j\,|\,\mathfrak{q}$ vgl. Nr. 1.3.1., Anmerkung.)

1.3.1. Ist wieder $j\,|\,\mathfrak{q}$ ein endlicher Inhalt in $\mathfrak{r}$, so existiert stets die in $\mathfrak{r}$ kleinste *Erweiterung* von $j\,|\,\mathfrak{q}$ zu einem *in* $\mathfrak{r}$ vollständigen[9] *Inhalt;* diese Erweiterung werde mit $j_v\,|\,\mathfrak{q}_v$ bezeichnet. Es gilt der

Satz. Vor. *Es sei $j\,|\,\mathfrak{q}$ ein endlicher Inhalt in $\mathfrak{r}$.*

Beh. (1) *Für beliebiges $g\in\mathfrak{v}$ gilt*

$$\underline{\int} g\,dj=\underline{\int} g\,dj_v \quad \textit{sowie} \quad \overline{\int} g\,dj=\overline{\int} g\,dj_v$$

(2) *Insbesondere gilt also: Für beliebiges $M\in\mathfrak{k}$ ist*

$$\underline{j}(M)=\underline{j}_v(M) \quad \textit{und} \quad \bar{j}(M)=\bar{j}_v(M).$$

Bew. *Betr. Beh.* (1) Wegen $\underline{\int} g\,dj=\beta j(K)+\int_\beta^\gamma \underline{j}([g\geq\alpha]\cap K)\,d\alpha$ usw. genügt es, die Beh. (2) zu beweisen. – *Betr. Beh.* (2) Wegen $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}_v$ ist $\underline{j}(M)\leq\underline{j}_v(M)\leq\bar{j}_v(M)\leq\bar{j}(M)$. Wir zeigen, daß auch $\underline{j}_v(M)\leq\underline{j}(M)$ sowie $\bar{j}(M)\leq\bar{j}_v(M)$. In der Tat: Zufolge der Definition von $\underline{j}_v(M)$ gibt es zu beliebigem $\varepsilon>0$ solche $Q_v\in\mathfrak{q}_v$ mit $Q_v\subset M$, daß $\underline{j}_v(M)-\varepsilon<j_v(Q_v)$. Gemäß Definition von $j_v\,|\,\mathfrak{q}_v$ existiert ferner zu Q_v ein $Q\in\mathfrak{q}$ mit $Q\subset Q_v$ und $j_v(Q)-\varepsilon<j(Q)$. Daher existiert $Q\in\mathfrak{q}$ mit $Q\subset M$ und $\underline{j}_v(M)-2\varepsilon<j(Q)\leq\underline{j}(M)=\sup(j(Q'); Q'\in\mathfrak{q}; Q'\subset M)$. Da $\varepsilon>0$ beliebig, folgt $\underline{j}_v(M)\leq\underline{j}(M)$. Entsprechend zeigt man $\bar{j}_v(M)\geq\bar{j}(M)$.

Anmerkung. Wenn, wie bei Ridder [7], die additive Funktion $\mathfrak{j} \mid \mathfrak{q}$ sowohl positive als negative Werte annehmen darf und wenn, wie in [7], die Totalvariation $w \mid \mathfrak{q}$ von $j \mid \mathfrak{q}$ (vgl. z. B. [3], Nr. 5.1.) auf jedem $Q \in \mathfrak{q}$ endlich ist, erklärt man die Erweiterung $j_v \mid \mathfrak{q}_v$ von $j \mid \mathfrak{q}$ auf folgende Weise: Es sei $j^+ \mid \mathfrak{q}$ bzw. $j^- \mid \mathfrak{q}$ die positive bzw. negative Variation von $j \mid \mathfrak{q}$, also $j = j^+ - j^-$ und $w = j^+ + j^-$. Ferner seien $j_v^+ \mid \mathfrak{q}_v^+$, $j_v^- \mid \mathfrak{q}_v^-$ und $w_v \mid \bar{\mathfrak{q}}_v$ die in $\mathfrak{r}$ kleinsten Erweiterungen der (nicht-negativen) Inhalte $j^+ \mid \mathfrak{q}$ bzw. $j^- \mid \mathfrak{q}$ bzw. $w \mid \mathfrak{q}$ zu vollständigen Inhalten. Dann gilt (wie aus [7] Satz XI. und seinem Beweis folgt): $\bar{\mathfrak{q}}_v = \mathfrak{q}_v^+ \frown \mathfrak{q}_v^-$. Und schließlich wird $j_v \mid \mathfrak{q}_v$ erklärt gemäß $\mathfrak{q}_v = \bar{\mathfrak{q}}_v$ und $j_v = j_v^+ - j_v^-$, ferner das j-Integral gemäß $\int f\,dj = \int f\,dj^+ - \int f\,dj^-$.

1.4. Ein $h \in \mathfrak{v}$ heiße j-summierbar, wenn $\bar{J}(h) = \underline{J}(h)$; der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral einer j-summierbaren Funktion h heiße das j-Integral von h.

Man bezeichnet ferner $g \in \mathfrak{v}$ als $\mathfrak{q}$-meßbar, wenn für *jeden* Kernbereich K von g (wobei $K \in \mathfrak{q}$) folgende Bedingung (M) erfüllt ist: (M) Es existiert eine abzählbare Menge $A(K; g)$ reeller Zahlen derart, daß $[g \geq \alpha] \frown K \in \mathfrak{q}$ für jedes nicht zu $A(K; g)$ gehörige (reelle) α. Zu dieser Definition bemerke man: *$g \in \mathfrak{v}$ ist $\mathfrak{q}$-meßbar genau dann, wenn die Bedingung (M) für* mindestens *einen Kernbereich von g erfüllt ist.*

In der Tat: Sind K', $K'' \in \mathfrak{q}$ zwei Kernbereiche von g, so setze man $K = K' \frown K''$, ferner $G'(\alpha) = [g \geq \alpha] \frown K'$ und $G''(\alpha) = [g \geq \alpha] \frown K''$, sowie $H(\alpha) = (K'' - K) \frown G''(\alpha)$. Dann ist $K'' \frown G'(\alpha) = K' \frown G''(\alpha) = K \frown G''(\alpha)$ und mithin $G''(\alpha) = (K \frown G''(\alpha)) \smile ((K'' - K) \frown G''(\alpha)) = (K'' \frown G'(\alpha)) \smile H(\alpha)$. Nun ist $g(x) = 0$ für jedes $x \in H(\alpha)$ (weil $H(\alpha)$ fremd ist zum Kernbereich K von g); daher $G''(\alpha) = K'' \frown G'(\alpha)$ für $\alpha > 0$ und $G''(\alpha) = (K'' \frown G'(\alpha)) \smile (K'' - K)$ für $\alpha \leq 0$. Wegen K'', $K \in \mathfrak{q}$ folgt $G''(\alpha) \in \mathfrak{q}$ aus $G'(\alpha) \in \mathfrak{q}$.

Beispiele $\mathfrak{q}$-meßbarer Funktionen. *Eine Treppenfunktion t aus $\mathfrak{v}$ ist $\mathfrak{q}$-meßbar genau dann, wenn t zu einer $\mathfrak{q}$-Einteilung T eines $K \in \mathfrak{q}$ gehört* (im Sinne von Nr. 1.1.2.).

1.4.1. Nunmehr läßt sich zeigen:

Satz. Vor. *Es sei $j \mid \mathfrak{q}$ ein endlicher, in $\mathfrak{r}$* vollständiger *Inhalt. Ferner sei $h \in \mathfrak{v}$.*

Beh. (1) *Folgende Aussagen sind gleichwertig:* (a) *Zu beliebigem* $\varepsilon > 0$ *und beliebigem Kernbereich* K *von* h *existiert eine* $\mathfrak{q}$-*Einteilung* T *von* K, *derart, daß* $J(\bar{h}_T; K) - J(\underline{h}_T; K) < \varepsilon$. – (b) *Es ist* h j-*summierbar.* – (c) *Es ist* h $\mathfrak{q}$-*meßbar.*

(2) *Die* j-*summierbaren Funktionen (aus* $\mathfrak{v}$*) bilden einen Vektorverband* $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{l}(\mathfrak{v}; j \mid \mathfrak{q})$ [*wobei* $\mathfrak{l}$ *Vektorunterverband von* $\mathfrak{v}$ *ist*] *und eine Vektoralgebra. Zu* $\mathfrak{l}$ *gehören insbesondere: Die charakteristischen Funktionen der Mengen* $Q \in \mathfrak{q}$ *und keine anderen charakteristischen Funktionen; die Treppenfunktionen, welche lineare Verbindungen dieser (d. h. der* $\mathfrak{q}$-*meßbaren) charakteristischen Funktionen sind (und keine anderen Treppenfunktionen, vgl.* Nr. 1.4., *Beispiele); der in* G *gleichmäßige Limes einer Folge* j-*summierbarer Funktionen* $f_n \in \mathfrak{l}$, *wenn die* f_n *einen* gemeinsamen Kernbereich *besitzen.*

Zusatz. Falls $j \mid \mathfrak{q}$ *nicht* vollständig ist (in $\mathfrak{r}$), existiert die kleinste Erweiterung $j_v \mid \mathfrak{q}_v$ von $j \mid \mathfrak{q}$ zu einem (in $\mathfrak{r}$) vollständigen Inhalt. Der vorstehende Satz bleibt auch für solche (nicht-vollständige) $j \mid \mathfrak{q}$ in Vor. und Beh. wörtlich richtig, sofern man nur in Beh. (1) (c) und (2) „$\mathfrak{q}$-meßbar" ersetzt durch „$\mathfrak{q}_v$-meßbar", ferner in Beh. (2) noch $Q \in \mathfrak{q}$ durch $Q \in \mathfrak{q}_v$. Übrigens *ist* h j-*summierbar genau dann, wenn* h j_v-*summierbar ist; es ist dann* $\int h\,dj = \int h\,dj_v$.

Anmerkung. Die Gleichwertigkeit der Aussagen (1) (b) und (c) des obigen Satzes findet sich schon bei Ridder ([7], Satz XXVII.), auch läßt sie sich aus einem Satze der Loomisschen Theorie der linearen Funktionale bzw. aus dessen Beweis entnehmen. (Vgl. [6], z. B. S. 171; auch [2], Nr. 1.5.) – Bei Hewitt ([5], Nr. 2.26.) wird das j-Integral $\int h\,dj$ zunächst nur für solche nicht-negative, beschränkte h erklärt, für die (in unseren Bezeichnungen) die Mengen $[h > \alpha] \cap K$ zu $\mathfrak{q}$ gehören für *jedes* α; und zwar wird definiert: $\int h\,dj = \lim\limits_{\zeta \to 0} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, j([\alpha_\nu < h \leq \alpha_{\nu+1}] \cap K)\right)$ (vgl. Nr. 1.3., Anmerkung). Unter Bezugnahme auf das Corollar in unserer Nr. 1.3. können wir also die Definition von Hewitt so schreiben:

$$\int h\,dj = -\int_{\beta}^{\gamma} \alpha\,dj\,([h > \alpha] \cap K).$$

Bew. *Betr. Beh.* (1) Gemäß der Definition der j-Summierbarkeit sind (a) und (b) gleichwertig. Die Gleichwertigkeit von (b) und (c) ergibt sich aus $\bar{J}(h; K) - \underline{J}(h; K) = \int_\beta^\gamma h'(\alpha)\, d\alpha$, wobei $h'(\alpha) = \bar{j}([h \geq \alpha] \cap K) - \underline{j}([h \geq \alpha] \cap K)$ (Nr. 1.3., Satz), so: Als Differenz zweier (beschränkter) monotoner Funktionen besitzt h' nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Da $h'(\alpha) \geq 0$ für alle α, so ist $\int_\beta^\gamma h'(\alpha)\, d\alpha = 0$ genau dann, wenn $h'(\alpha) = 0$ in jeder Stetigkeitsstelle α von h' ([3], Nr. 8.4.4., Satz 1.), also *weil* $j \mid \mathfrak{q}$ *vollständig*, genau dann, wenn $[h \geq a] \cap K \in \mathfrak{q}$ bis auf abzählbar viele α. – *Betr. Beh.* (2). Gemäß Nr. 1.2.3., Satz, ist $\mathfrak{l}$ Vektorraum. Es ist $\mathfrak{l}$ auch Verband, d. h. aus $h \in \mathfrak{l}$ folgt $|h| \in \mathfrak{l}$; letzteres ergibt sich mit Benutzung von Beh. (1) (a) aus $\overline{|h|}(Q) - \underline{|h|}(Q) \leq \bar{h}(Q) - \underline{h}(Q)$ und dieses aus $||h|(x) - |h|(y)| \leq |h(x) - h(y)| \leq \bar{h}(Q) - \underline{h}(Q)$. – Schließlich ist $g(x)h(x) - g(y)h(y) = (g(x) - g(y))h(x) + (h(x) - h(y))g(y)$, also $\overline{gh}(Q) - \underline{gh}(Q) \leq (\bar{g}(Q) - \underline{g}(Q))\, \overline{|h|}(Q) + (\bar{h}(Q) - \underline{h}(Q))\, \overline{|g|}(Q)$, so daß (zufolge Beh. (1) (a)) mit $g, h \in \mathfrak{l}$ auch $gh \in \mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}$ Vektoralgebra. – *Betr. Gleichmäßige Konvergenz.* Klar. –

Betr. Zusatz. Gemäß Nr. 1.3.1., Satz, ist $\underline{\int} g\, dj_v = \bar{\int} g\, dj_v$ genau dann, wenn $\underline{\int} g\, dj = \bar{\int} g\, dj$.

Folgerungen. (1) Aus der Eigenschaft (1) (a) von $\mathfrak{l}$ (gemäß des obigen Satzes) entnimmt man: *Die* $\mathfrak{q}$*-meßbaren Treppenfunktionen* p *liegen dicht in* $\mathfrak{l}$ *bezüglich der durch* $J(|f|) = \int |f|\, dj$ *bestimmten Quasimetrik* (d. h. zu jedem $f \in \mathfrak{l}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren p mit $J(|f - p|) < \varepsilon$). – (2) Aus der Beh. (1) (c) des obigen Satzes folgt noch: Ist $j \mid \mathfrak{q}$ vollständig und ist h j-summierbar, so ist h auch j'-summierbar, wenn $j' \mid \mathfrak{q}$ ein anderer vollständiger Inhalt ist (mit dem gleichen Definitionsbereich $\mathfrak{q}$ wie $j \mid \mathfrak{q}$). *In diesem Sinne* läßt sich behaupten: *Die Eigenschaft der* j*-Summierbarkeit bezüglich eines* vollständigen *Inhaltes* $j \mid \mathfrak{q}$ *hängt nur von* $\mathfrak{q}$ *ab, nicht von* $j \mid \mathfrak{q}$.

1.5. Das j-Integral, aufgefaßt als reelles Funktional $J(f)$ über dem Vektorverband $\mathfrak{l}$ der j-summierbaren Funktionen, ist linear und positiv, d. h. $J(f+g) = J(f) + J(g)$ und $J(h) \geq 0$, wenn $h \geq 0$ (d. h. $h(x) \geq 0$ für jedes $x \in G$). (Folgt aus Nr. 1.2.3., Satz, (3), (4)). Das lineare Funktional $J(f)$ heiße **stetig**, wenn aus $f_n \in \mathfrak{l}$ mit $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ und $0 = \lim \operatorname{alg} f_n$[10] folgt: $0 = \lim J(f_n)$. Wir zeigen:

Satz. *Das lineare, positive Funktional* $J(f) = \int f\,dj$ *über* $\mathfrak{l}$ *ist stetig genau dann, wenn* $j \mid \mathfrak{q}$ *σ-additiv ist.*[7]

Anmerkung. Der Satz mit der auf die Norm zum Lebesgueschen Integral gegründeten (mit der obigen gleichwertigen) Stetigkeitsdefinition und mit einem etwas anderen Beweis bei G. Aumann [1], S. 448. Vgl. auch Bauer [2], Nr. 2.4., insbes. Satz 1.

Bew. (I) Es sei $j \mid \mathfrak{q}$ σ-additiv und $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ mit $0 = \lim \operatorname{alg} f_n$ sowie $f_n \in \mathfrak{l}$. Ist K Kernbereich von f_1, so auch von f_n; außerdem existiert ein $d > 0$ mit $0 \leq f_n(x) \leq f_1(x) \leq d < +\infty$ für $x \in G$. Wegen $f_n \in \mathfrak{l}$ ist $F_n(\alpha) = [f_n \geq \alpha] \cap K \in \mathfrak{q}_v$ für jedes α bis auf abzählbar viele Ausnahmen (Nr. 1.4.1.), die je von f_n abhängen. Daher gibt es beliebig kleine $\varepsilon > 0$ derart, daß $F_n(\varepsilon) \in \mathfrak{q}_v$ für *jedes n*. Für solche ε gilt:

$$0 \leq J(f_n; K) \leq dj(F_n(\varepsilon)) + \varepsilon j(K - F_n(\varepsilon)) \leq dj(F_n(\varepsilon)) + \varepsilon j(K).$$

Nun ist aber (1) $F_{n+1}(\varepsilon) \subset F_n(\varepsilon)$ (wegen $f_{n+1} \leq f_n$) und (2) $\bigcap F_n(\varepsilon) = 0$ (wegen $\lim \operatorname{alg} f_n = 0$). Zufolge der σ-Additivität von $j \mid \mathfrak{q}$, also des Nullimessatzes ([3], Nr. 2.3.), folgt aus (1) und (2), daß $\lim j(F_n(\varepsilon)) = 0$. Für hinreichend großes n, etwa $n > V(\varepsilon)$, ist also $0 \leq J(f_n; K) \leq (d + j(K)) \cdot \varepsilon$. Somit $\lim J(f_n; K) = 0$; w. z. b. w.

(II) Es sei $J \mid \mathfrak{l}$ stetig. Es genügt, aus der Stetigkeit auf die Gültigkeit des Nullimessatzes für $j \mid \mathfrak{q}$ zu schließen, also, wegen $j(Q) = J(c(Q))$, zu zeigen: Ist $Q_{n+1} \subset Q_n \in \mathfrak{q}$ und $\emptyset = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots$, so auch $\lim J(c(Q_n)) = 0$. Aber $0 \leq c(Q_{n+1}) \leq c(Q_n)$ und $\lim \operatorname{alg} c(Q_n) = 0$.

§ 2. Erste Erweiterung von Integral und Funktional

2.1. Im folgenden sei der endliche Inhalt $j \mid \mathfrak{q}$ stets als *σ-additiv vorausgesetzt*. Dann existiert (vgl. [3], S. 55) (eindeutig)

[10] Es bedeutet $f = \lim \operatorname{alg} f_n$, daß $f(x) = \lim f_n(x)$ für jedes $x \in G$.

die in $\mathfrak{r}$ kleinste Erweiterung von $j \mid \mathfrak{q}$ zu einem Maß $j' \mid \mathfrak{z}'$ bzw. zu einem in $\mathfrak{r}$ vollständigen Maß $j'_v \mid \mathfrak{z}'_v$.

Wegen der σ-Additivität von $j \mid \mathfrak{q}$ ist andererseits das Funktional $J \mid \mathfrak{l}$ stetig, es existiert daher (vgl. [3], Nr. 6.1.6.) dessen erste Erweiterung $S \mid \mathfrak{s}$ (im Sinne der Theorie der linearen Funktionale). Als S-meßbar bezeichnen wir dann diejenigen Mengen $M \in \mathfrak{r}$, deren charakteristische Funktionen zu $\mathfrak{s}$ gehören: $c(M) \in \mathfrak{s}$, und als S-summierbar die Funktionen aus $\mathfrak{s}$.

2.1.1. Der Definitionsbereich $\mathfrak{u}$ eines endlichen Inhaltes $u \mid \mathfrak{u}$ heiße σ-saturiert bezüglich u, wenn aus $U_n \in \mathfrak{u}$ mit $U_n \subset U_{n+1}$ und mit $u(U_n) < d < +\infty$, wobei die reelle Zahl d unabhängig von n ist, folgt: $\bigcup_n U_n \in \mathfrak{u}$. – Wir bemerken nun:

Das System der S-meßbaren Mengen ist ein Boolescher δ-Verband[1] $\mathfrak{u}$. *Die Funktion $u(U) = S(c(U))$ mit $U \in \mathfrak{u}$ ist ein endlicher, σ-additiver, in $\mathfrak{r}$ vollständiger Inhalt über* $\mathfrak{u}$, *der als* zu $S \mid \mathfrak{s}$ gehöriger Inhalt *bezeichnet werde. Schließlich ist* $\mathfrak{u}$ *σ-saturiert bezüglich u.*

In der Tat: Da das übrige bekannt ist (vgl. [3], Nr. 6.3.2., Satz 1), hat man nur festzustellen, daß $\mathfrak{u}$ ein δ-Verband und σ-saturiert bezüglich u ist. Beides folgt unmittelbar aus dem für $S \mid \mathfrak{s}$ gültigen, verallgemeinerten B. Levischen Satz (vgl. [3], Nr. 6.1.6., insbesondere Satz 3.), demzufolge eine monotone Folge von S-summierbaren Funktionen f_n mit beschränkten $S(f_n)$ gegen eine S-summierbare Funktion f konvergiert mit $S(f) = \lim S(f_n)$.

2.1.2. Im Anschluß an Nr. 2.1.1. erwähnen wir noch:

Bemerkung. Ist $\mathfrak{u}$ ein Boolescher δ-Verband in $\mathfrak{r}$, so ist[1] $\mathfrak{u}_\sigma$ identisch mit der (in $\mathfrak{r}$) kleinsten Erweiterung zu einem Booleschen σ-Verband $\mathfrak{u}'$.

Bew. Da $\mathfrak{u}_\sigma$ ein σ-Verband ist, genügt der Nachweis, daß $\mathfrak{u}_\sigma$ zugleich ein Boolescher Verband ist. Es seien nun $U', U'' \in \mathfrak{u}_\sigma$ mit $U' \subset U''$, also $U' = \bigcup_n U'_n$ und $U'' = \bigcup_r U''_r$ mit $U'_n, U''_r \in \mathfrak{u}$.

Daher ist $U'' - U' = \bigcup_r (U''_r - U''_r \cap (\bigcup_n U'_n))$. Da aber

$$U''_r - U''_r \cap (\bigcup_n U'_n)) = \bigcap_n (U''_r - U''_r \cap U'_n)$$

und da $\mathfrak{u}$ ein Boolescher δ-Verband ist, gilt $U''_r - U''_r \cap U'_n \in \mathfrak{u}$

und $\bigcap_n (U''_r - U''_r \cap U'_n) \in \mathfrak{u}$. Somit $U'' - U' \in \mathfrak{u}_\sigma$. Und da $\mathfrak{u}_\sigma$ in jedem Booleschen σ-Verband über $\mathfrak{u}$ enthalten ist, folgt die Beh.

2.1.3. Auf Grund der Nr. 2.1.2. ergibt sich der

Satz. Vor. *Es sei $u|\mathfrak{u}$ ein endlicher, in $\mathfrak{r}$ vollständiger Inhalt. Ferner sei $\mathfrak{u}$ ein (Boolescher) δ-Verband und σ-saturiert bezüglich u.*

Beh. (1) *Die Erweiterung $u'|\mathfrak{u}'$ von $u|\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_\sigma$ ist gleich der in $\mathfrak{r}$ kleinsten Erweiterung von $u|\mathfrak{u}$ zu einem Maß.* – (2) *Es ist $\mathfrak{u}' - \mathfrak{u}$ das System genau derjenigen Mengen $U' \in \mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_\sigma$, für die $u'(U') = +\infty$.* – (3) *Das Ideal $\mathfrak{n}(u)$ in $\mathfrak{r}$ der u-Nullmengen ist identisch mit dem σ-Ideal $\mathfrak{n}(u')$ der u'-Nullmengen, also σ-Ideal in $\mathfrak{r}$. Daher ist $u'|\mathfrak{u}'$ zugleich die in $\mathfrak{r}$ kleinste Erweiterung von $u|\mathfrak{u}$ zu einem in $\mathfrak{r}$ vollständigen Maß.*

Bew. *Betr. Beh.* (1). Folgt aus der Bemerkung in Nr. 2.1.2. Man beachte: Wegen der σ-Additivität von $u|\mathfrak{u}$ (in $\mathfrak{r}$) existiert die in $\mathfrak{r}$ kleinste Erweiterung von $u|\mathfrak{u}$ zu einem Maß. (Vgl. z. B. [3], Nr. 3.2.). – *Betr. Beh.* (2). Es sei $U' \in \mathfrak{u}_\sigma = \mathfrak{u}'$, also $U' = \bigcup_n U_n$ mit $U_n \in \mathfrak{u}$ und $U_n \subset U_{n+1}$. Wegen der σ-Saturiertheit von $\mathfrak{u}$ bezüglich u ist $U' \in \mathfrak{u}$, wenn $u'(U') = \sup(u(U_n); n = 1, 2, \ldots) < +\infty$; und umgekehrt folgt aus $U' \in \mathfrak{u}$ auch $u'(U') = u(U') < +\infty$. – *Betr. Beh.* (3). Gemäß Beh. (2) sind alle u'-Nullmengen schon u-Nullmengen. Da auch das Umgekehrte gilt, ist $\mathfrak{n}(u) = \mathfrak{n}(u')$. Es ist aber $u|\mathfrak{u}$ ein in $\mathfrak{r}$ vollständiger Inhalt, es ist also insbesondere jede Teilmenge einer u-Nullmenge selbst eine u-Nullmenge; somit ist $\mathfrak{n}(u)$ Ideal in $\mathfrak{r}$. Weil $\mathfrak{n}(u')$ ein σ-Ideal (in $\mathfrak{u}'$) ist, folgt, daß $\mathfrak{n}(u) = \mathfrak{n}(u')$ ein *σ-Ideal in* $\mathfrak{r}$ ist. Daher ist $u'|\mathfrak{u}'$ ein in $\mathfrak{r}$ *vollständiges* Maß, und zwar das in $\mathfrak{r}$ kleinste. (Vgl. z. B. [3], Nr. 2.4.2.)

2.2. Weiter ergibt sich jetzt der

Satz. Vor. *Es sei $j|\mathfrak{q}$ ein endlicher, σ-additiver Inhalt ($\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$). Ferner sei $J|\mathfrak{l}$ das durch das j-Integral bestimmte lineare Funktional, $S|\mathfrak{s}$ seine erste Erweiterung im Sinne der Theorie der linearen Funktionale und $u|\mathfrak{u}$ der zugehörige Inhalt.* (Vgl. Nr. 2.1. und 2.1.1.)

Beh. *Die in* $\mathfrak{r}$ *kleinsten Erweiterungen von* $j\,|\,\mathfrak{q}$ *und* $u\,|\,\mathfrak{u}$ *zu in* $\mathfrak{r}$ *vollständigen Massen* $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$ *bzw.* $u'\,|\,\mathfrak{u}'$ *sind identisch.* (*Es ist also* $\mathfrak{z}'_v = \mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_\sigma$ *und* $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v = u'\,|\,\mathfrak{u}'$).

Bew. (I) Das System $\mathfrak{n}(j'_v)$ der j'_v-Nullmengen ist ein σ-Ideal in $\mathfrak{r}$, da $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$ ein in $\mathfrak{r}$ vollständiges Maß ist. – *Es ist aber* $\mathfrak{n}(u) = \mathfrak{n}(u') = \mathfrak{n}(j'_v)$. Nämlich: Weil $u\,|\,\mathfrak{u}$ Erweiterung von $j\,|\,\mathfrak{q}$ ist, gilt $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{u}$ und folglich (da $u'\,|\,\mathfrak{u}'$ ein in $\mathfrak{r}$ vollständiges Maß ist) auch $\mathfrak{z}'_v \subset \mathfrak{u}'$. Daraus folgt $\mathfrak{n}(j'_v) \subset \mathfrak{n}(u)$. Daß umgekehrt auch $\mathfrak{n}(u) \subset \mathfrak{n}(j'_v)$ ist, ergibt sich so: Zu $U \in \mathfrak{n}(u)$ und 2^{-t} existieren (gemäß der Definition von $u\,|\,\mathfrak{u}$ und $S\,|\,\mathfrak{s}$) solche $f_{tn} \in \mathfrak{l}$, daß $0 \leq f_{tn} \leq f_{t,n+1}$ und $c(U) \leq \sup\limits_n f_{tn}$ sowie $\sup\limits_n J(f_{tn}) < 2^{-t}$. Es sei $j_v\,|\,\mathfrak{q}_v$ die kleinste Erweiterung von $j\,|\,\mathfrak{q}$ zu einem in $\mathfrak{r}$ vollständigen Inhalt; es ist $\mathfrak{q}_v \subset \mathfrak{z}'_v$. Ist K_{tn} ein Kernbereich von f_{tn}, so gibt es (wegen $f_{tn} \in \mathfrak{l}$ ein α_{tn} mit $0{,}5 < \alpha_{tn} < 0{,}6$ derart, daß $Q_{tn} = [f_{tn} \geq \alpha_{tn}] \cap K_{tn}$ zu $\mathfrak{q}_v$, also auch zu $\mathfrak{z}'_v$ gehört. (Vgl. Nr. 1.4.1., Satz, Zusatz.) Es ist $\alpha_{tn}\, c(Q_{tn}) \leq f_{tn}$, also $\alpha_{tn} J(c(Q_{tn})) \leq J(f_{tn}) < 2^{-t}$; wegen $0{,}5 < \alpha_{tn}$ ist mithin $j_v(Q_{tn}) = J(c(Q_{tn})) < 2^{1-t}$ für alle n. Wegen $f_{tn} \leq f_{t,n+1}$ ist $Q_{tn} \subset Q_{t,n+1}$. Setzt man $Q_t = \bigcup_n Q_{tn}$, so ist $Q_t \in (\mathfrak{q}_v)_\sigma \subset \mathfrak{z}'_v$. Außerdem ist $U \subset Q_t$; wegen $c(U) \leq \sup\limits_n f_{tn}$ ist nämlich $U \subset \bigcup_n ([f_{tn} \geq \beta] \cap K_{tn})$ für jedes $\beta < 1$, woraus für $\beta = 0{,}6$, also $\alpha_{tn} < \beta$ und $[f_{tn} \geq \beta] \subset [f_{tn} \geq \alpha_{tn}]$, die Beh. folgt. Daher ist $U \subset Q = \bigcap_t Q_t \in \mathfrak{z}'_v$ mit $j'_v(Q) = 0$. Weil $U \subset Q$ und $Q \in \mathfrak{n}(j'_v)$, folgt $U \in \mathfrak{n}(j'_v)$.

(II) *Es ist* $\mathfrak{u}' = \mathfrak{z}'_v$ *und* $u'\,|\,\mathfrak{u}' = j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$.

(II′) Gemäß der Definition von $u\,|\,\mathfrak{u}$ ist zunächst $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{u}$ und $j\,|\,\mathfrak{q} = u\,|\,\mathfrak{q}$. Da $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$ bzw. $u'\,|\,\mathfrak{u}'$ die in $\mathfrak{r}$ kleinste Erweiterung von $j\,|\,\mathfrak{q}$ bzw. von $u\,|\,\mathfrak{u}$ zu einem in $\mathfrak{r}$ vollständigen Masse ist, folgt aus $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{u}$ usw., daß $\mathfrak{z}'_v \subset \mathfrak{u}'$ und $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v = u'\,|\,\mathfrak{z}'_v$. *Es genügt* also zu zeigen, daß $\mathfrak{u}' \subset \mathfrak{z}'_v$ ist, und dazu, *daß* $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{z}'_v$; denn aus letzterem folgt wegen der Vollständigkeit von $j'_v\,|\,\mathfrak{z}'_v$ und $u'\,|\,\mathfrak{u}'$ in $\mathfrak{r}$, daß $\mathfrak{u}' \subset \mathfrak{z}'_v$.

(II″) Gemäß Ziff. (II′) zeigen wir: *Aus* $U \in \mathfrak{u}$ *folgt* $U \in \mathfrak{z}'_v$. – In der Tat:

(II″ 1) Gemäß der Definition von $u\,|\,\mathfrak{u}$ existieren zu $U \in \mathfrak{u}$ und zu $t = 1, 2, \ldots$, solche $p_t \in \mathfrak{l}$, daß $S(|\,c(U) - p_t\,|) < 2^{-t}$.

Und da die $\mathfrak{q}$-meßbaren Treppenfunktionen dicht liegen in $\mathfrak{l}$ bezüglich der durch $J(|f|) = S(|f|)$ bestimmten Quasimetrik (vgl. Nr. 1.4.1., Folgerung (1)), kann *p_t als $\mathfrak{q}$-meßbare Treppenfunktion angenommen* werden. Überdies kann o. B. d. A. und soll vorausgesetzt werden, daß $0 \leq p_t \leq 1$; denn mit p_t ist auch $p_t' = \mathrm{Min}(1, \mathrm{Max}(0, p_t))$ eine $\mathfrak{q}$-*meßbare* Treppenfunktion, und zwar mit $S(|c(U) - p_t'|) \leq S(|c(U) - p_t|)$. Wir können also setzen $p_t = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu c(B_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu c(B_\nu \frown U) + \alpha_\nu c(B_\nu - B_\nu \frown U))$ mit $0 \leq \alpha_\nu \leq 1$; dabei ist $B_\nu \in \mathfrak{q}$ sowie $B_\nu \frown B_\mu = \emptyset$, $\nu \neq \mu$, und $K_t = \bigcup_{\nu=1}^{n} B_\nu \in \mathfrak{q}$ ist Kernbereich von p_t.

(II'' 2) *Ersetzung der Treppenfunktion $p_t \in \mathfrak{l}$ mit $0 \leq p_t \leq 1$ durch eine charakteristische Funktion $c(Q_t) \in \mathfrak{l}$.* – Es ist $c(U) = c(U - U \frown K_t) + \sum_{\nu=1}^{n} (1 . c(B_\nu') + 0 . c(B_\nu''))$, wenn $B_\nu' = B \frown U \in \mathfrak{u}$ und $B_\nu'' = B_\nu - B_\nu \frown U \in \mathfrak{u}$. Dabei ist $B_\nu' \frown B_\varrho'' = \emptyset$ für alle $\nu, \varrho = 1, \ldots, n$ und $B_\nu' \frown B_\mu' = B_\nu'' \frown B_\mu'' = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$. – Weiter sei $2^{-1} \leq \alpha_\nu$, d. h. $1 - \alpha_\nu \leq 2^{-1}$ für $\nu = \sigma_i$, ferner $\alpha_\nu < 2^{-1}$, d. h. $2^{-1} < 1 - \alpha_\nu$ für $\nu = \varrho_j$. *Wir setzen* $Q_t = \bigcup_i B_{\sigma_i}$, also $c(Q_t) = \sum_i (1 . c(B_{\sigma_i}') + 1 . c(B_{\sigma_i}''))$. Daher gilt *einerseits*

$$|c(U) - c(Q_t)| = c(U - U \frown K_t) + \sum_i c(B_{\sigma_i}'') + \sum_j c(B_{\varrho_j}').$$

Andererseits ist

$$|c(U) - p_t| = c(U - U \frown K_t) + \sum_{\nu=1}^{n} ((1 - \alpha_\nu) c(B_\nu') + \alpha_\nu c(B_\nu'')).$$

Die rechte Seite der ersten der beiden Gleichungen ist aber (gemäß der Definition der B_{σ_i} bzw. der B_{ϱ_j}) nicht größer als das Doppelte der rechten Seite der zweiten Gleichung. Somit $|c(U) - c(Q_t)| \leq 2|c(U) - p_t|$ und folglich $S(|c(U) - c(Q_t)|) < 2^{1-t}$ (gemäß Ziff. (II'' (1)). Dabei ist $c(Q_t) \in \mathfrak{l}$.

(II'' 3) Wegen $S(|c(U) - c(Q_t)|) < 2^{1-t}$ ist[11] $c(U) = (S) \lim_t c(Q_t)$ und es existiert mithin eine Teilfolge Q_t' aus der Folge der Q_t

---

[11] $c(U) = (S) \lim c(Q_t)$ bedeutet, daß $\lim_{\to \infty} S(|c(U) - c(Q_t)|) = 0$.

derart, daß $c(U) = \lim \operatorname{alg} c(Q'_t) \pmod{\mathfrak{n}(u)}$ (vgl. [3], Nr. 6.1.5., Satz 1., (2)). Weiter ist $u(U) = S(c(U)) = \lim S(c(Q'_t)) = \lim J(c(Q'_t)) = \lim j(Q'_t) = \lim j'_v(Q'_t)$ (vgl. [3], Nr. 6.1.6., Satz 2., (III)). Aber $\lim \operatorname{alg} c(Q'_t) = \inf(h_n; n = 1, 2, \ldots)$ mit $h_n = \sup(c(Q'_t); n \leq t) = c(U'_n)$, wenn $U'_n = \bigcup_{n \leq t} Q'_t$. Es ist $U'_n \in \mathfrak{q}_\sigma$, also $U' = \bigcap_n U'_n \in \mathfrak{q}_{\sigma\delta} \subset \mathfrak{z}'_v$, und $c(U) = c(U') \pmod{\mathfrak{n}(u)}$. Letzteres besagt, daß $U = (U' - U' \cap N) \cup (N - U' \cap N)$ mit $N \in \mathfrak{n}(u) = \mathfrak{n}(j'_v) \subset \mathfrak{z}'_v$ (vgl. Ziff. (I)). Daher ist $U \in \mathfrak{z}'_v$, also $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{z}'_v$, w. z. z. w.

2.3. Das untere bzw. obere j'_v-Integral $\underline{\int}_{Z'} f dj'_v = \underline{J}'_v(f; Z')$ usw. ist zunächst erklärt für ein $Z' \in \mathfrak{z}'_v$ als Definitionsbereich der reellen Funktion f (vorausgesetzt, daß das Oberintegral usw. existiert). Dementsprechend erklären wir $\underline{\int} f dj'_v = \underline{J}'_v(f)$ usw. allgemein für Integranden aus dem *Vektorverband* $\mathfrak{v}'$ aller reellen *Funktionen mit einem Kernbereich* $Z' \in \mathfrak{z}'_v$, wobei $\mathfrak{z}'_v = \mathfrak{u}_\sigma$. Die Ausführungen in Nr. 1.2.3. gelten auch für $\underline{J}'_v(f)$ usw. Das $'_v$-Integral $\int f dj'_v = J'_v(f) = J'_v(f; Z')$ wird wie üblich erklärt; ein j'_v-integrierbares f mit endlichem Integralwert heißt j'_v-summierbar ($f \in \mathfrak{v}'$).

Betrachtet man andererseits ein $h \in \mathfrak{s}$, dann existieren $f_n \in \mathfrak{l}$ mit $f = \lim \operatorname{alg} f_n \pmod{\mathfrak{n}(j'_v)}$ (vgl. [3], Nr. 6.1.5., 6.1.6.) Daher gilt $f(x) = 0$ für $x \in G - Z'$, wobei $Z' = N \cup \bigcup_n K_n$ ist, und zwar $K_n \in \mathfrak{q}$ Kernbereich von f_n sowie $N \in \mathfrak{n}(j'_v)$. Mithin $Z' \in \mathfrak{z}'_v$ (also $f \in \mathfrak{v}'$) Es gilt nun der

Satz. Vor. *Wie in* Nr. 2.2., *Satz.*

Beh. (1) *Es ist $u \mid \mathfrak{u}$ die größte Verengerung von $j'_v \mid \mathfrak{z}'_v$ zu einem endlichen Inhalt.*

(2) *Es ist der Vektorverband $\mathfrak{s}$ der S-summierbaren Funktionen f identisch mit dem der j'_v-summierbaren Funktionen; dabei ist $S(f) = \int f dj'_v$.*

Bew. (1) Folgt aus Nr. 2.1.3. – (2) Ist $f \in \mathfrak{s}$ mit Z' als Kernbereich, so gilt $S(f) = \int_{Z'} f du'_v$, mit $Z' \in \mathfrak{u}'_v = \mathfrak{u}_\sigma$ (Vgl. [3], Nr. 6.3.3.). Wegen $j'_v \mid \mathfrak{z}'_v = u'_v \mid \mathfrak{u}'_v$ ist daher $S(f) = \int_{Z'} f dj'_v$. Und umgekehrt gehört jede j'_v-*summierbare* Funktion zu $\mathfrak{s}$. (Vgl. [3], a. a. O.)

Literatur

[1] G. Aumann, Integralerweiterungen mittels Normen. Arch. d. Math. 3 (1952), 441–450.

[2] H. Bauer, Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. Jahrg. 1955, 187–208.

[3] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 3. Bd., 2. Aufl. Berlin 1955.

[4] O. Haupt und Chr. Y. Pauc, Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Akad. d. Wiss. u. d. Literatur, Abh. d. math.-naturw. Kl. Jahrg. 1955, Nr. 7 (189–218) (Mainz).

[5] E. Hewitt, Integral representation of certain linear functionals, Arkiv f. mat. 2 (1952), Nr. 11 (269–282).

[6] L. H. Loomis, Linear functionals and content, Amer. Journ. of Math. 76 (1954), 168–182.

[7] J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen, Fund. math. 24 (1935), 72–117.

[8] E. Thoma, Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen, Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. Jahrg. 1953, 77–80.